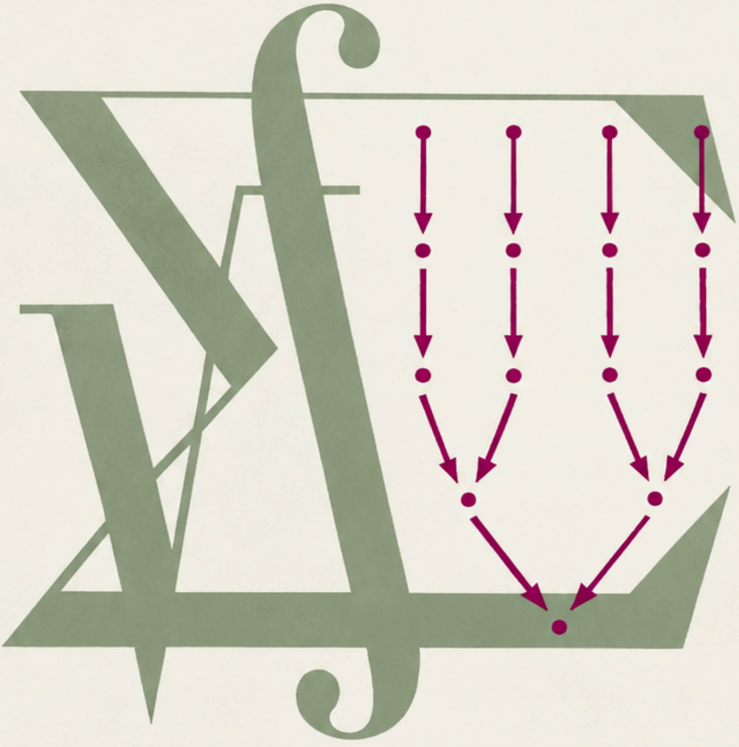
А. А. РЫВКИН, А. З. РЫВКИН, Л. С. ХРЕНОВ

# СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ



А. А. РЫВКИН, А. З. РЫВКИН, Л. С. ХРЕНОВ

# СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1987

ББК 22.1
Р 93
УДК 51(031)

Рецензент

В. П. Моденов (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова)

**Рывкин А. А., Рывкин А. З., Хренов Л. С.**

Р 93 Справочник по математике: Справочное пособие для учащихся сред. спец. учеб. заведений и поступающих в вузы. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1987. — 480 с.: ил.

Справочник содержит основные разделы элементарной математики, элементы высшей математики, изучаемые в техникумах, а также элементы приближенных вычислений с описанием технических средств обучения. В настоящее издание включены главы «Обработка и анализ статистических данных» и «Элементы информатики». Справочный материал иллюстрируется примерами. Третье издание вышло в 1975 г.

**Р $\frac{4306020400-065}{001(01)-87}$ КБ — 22—14—86**

**ББК 22.1**
**51(03)**

© Издательство «Высшая школа», 1975
© Издательство «Высшая школа», 1987, с изменениями

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . . 3

*Часть первая*

## СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

### I Арифметика

**1.** Натуральные и целые числа
1.1. Действия над натуральными числами . . . . . 5
1.2. Порядок действий. Скобки . . . . . 6
1.3. Десятичная система счисления . . . . . 7
1.4. Двоичная система счисления . . . . . 8
1.5. Троичная система счисления . . . . . 11
1.6. Восьмеричная система счисления . . . . . 12
1.7. Делимость чисел . . . . . 13
1.8. Простые и составные числа. Общие делители и общие кратные . . . . . 14
1.9. Множество натуральных чисел . . . . . 16
1.10. Множество целых чисел . . . . . 16
**2.** Рациональные числа
Рациональные дроби
2.1. Определения. Свойства рациональных дробей . . . . . 17
2.2. Сравнение дробей с положительными знаменателями 18
2.3. Действия над дробями . . . . . 19
2.4. Пропорции . . . . . 20
Десятичные дроби. Проценты. Двоичные дроби . . . . . .
2.5. Определение . . . . . 22
2.6. Действия над десятичными дробями . . . . . 22
2.7. Обращение десятичной дроби в простую и простой в десятичную . . . . . 23
2.8. Периодические дроби . . . . . 23
2.9. Проценты . . . . . 24
2.10. Двоичные дроби . . . . . 25
2.11. Множество рациональных чисел . . . . . 26

### II. Алгебра

**3.** Расширение понятия о числе
Действительные числа
3.1. Числовая ось. Отрицательные числа . . . . . 27
3.2. Иррациональные числа . . . . . 28
3.3. Алгебраические и трансцендентные числа . . . . . 28
3.4. Действия над действительными числами . . . . . 29
3.5. Абсолютная величина действительного числа . . . . . 29
Комплексные числа
3.6. Определения. Действия над комплексными числами . 32

3.7. Геометрическое истолкование . . . . . 34
3.8. Тригонометрическая форма . . . . . 34
3.9. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме . . . . . 35

**4.** Алгебраические выражения
Степени и корни
4.1. Определения . . . . . 37
4.2. Действия над степенями . . . . . 38
4.3. Вынесение множителя из-под радикала . . . . . 38
4.4. Исключение иррациональности в дроби . . . . . 39
4.5. Формула сложного радикала . . . . . 41
Многочлены
4.6. Определения. Действия над многочленами . . . . . 41
4.7. Формулы сокращенного умножения и деления . . . . . 42
4.8. Деление многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера . . . 42
4.9. Разложение многочлена на множители . . . . . 44
4.10. Условие равенства многочленов. Восстановление многочлена по его корням . . . . . 45
4.11. Симметрические многочлены . . . . . 46
Алгебраические дроби
4.12. Определение. Свойства . . . . . 47
4.13. Действия с алгебраическими дробями . . . . . 47
4.14. Разложение на простейшие дроби . . . . . 48

**5.** Уравнения
Общие сведения
5.1. Равенство. Тождество. Уравнение . . . . . 51
5.2. Системы и совокупности уравнений . . . . . 53
5.3. Классификация уравнений . . . . . 54
5.4. Равносильность уравнений . . . . . 54
Алгебраические уравнения с одним неизвестным
5.5. Уравнение первой степени (линейное) . . . . . 60
5.6. Уравнение второй степени (квадратное) . . . . . 60
5.7. Биквадратное уравнение . . . . . 61
5.8. Возвратное уравнение четвертой степени . . . . . 62
5.9. Двучленное уравнение . . . . . 63
5.10. Трехчленное уравнение . . . . . 63
5.11. Уравнение $n$-й степени . . . . . 64
5.12. Дробное уравнение . . . . . 64
5.13. Иррациональные уравнения . . . . . 67
Трансцендентные уравнения
5.14. Показательные уравнения . . . . . 68
5.15. Логарифмические уравнения . . . . . 69
Системы алгебраических уравнений
5.16. Метод Гаусса исключения неизвестных . . . . . 73
5.17. Определители . . . . . 75
5.18. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными 76
5.19. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными 78
5.20. Простейшие системы, содержащие уравнения второй степени . . . . . 82
5.21. Симметричные системы уравнений . . . . . 83

**6.** Неравенства
Общие сведения
6.1. Определения . . . . . 83
6.2. Свойства и преобразования неравенств . . . . . 84
6.3. Система и совокупность неравенств . . . . . 84

Решение неравенств
6.4. Неравенство первой степени (линейное) . . . . . 85
6.5. Метод интервалов . . . . . 85
6.6. Неравенство второй степени (квадратное) . . . . . 87
6.7. Иррациональные неравенства . . . . . 87
6.8. Логарифмические неравенства . . . . . 89
6.9. Средние величины . . . . . 90
6.10. Некоторые важные неравенства . . . . . 91
7. Числовые последовательности
7.1. Понятие последовательности. Примеры. . . . . 92
7.2. Арифметическая прогрессия . . . . . 94
7.3. Геометрическая прогрессия . . . . . 94
8. Логарифмы
8.1. Определение . . . . . 95
8.2. Свойства логарифмов . . . . . 96
8.3. Десятичные логарифмы . . . . . 98
9. Комбинаторика. Бином Ньютона
9.1. Перестановки. Размещения. Сочетания . . . . . 99
9.2. Формула Ньютона (натуральная степень бинома) . . . . 101
9.3. Свойства разложения по формуле Ньютона . . . . . 102
10. Элементы математической логики
10.1. Определения. Действия над множествами . . . . . 102
10.2. Некоторые свойства множеств . . . . . 103
10.3. Алгебра символической логики . . . . . 104
10.4. Принцип математической индукции . . . . . 106
10.5. Аксиомы, теоремы, следствия . . . . . 108
10.6. Прямая и обратиая теоремы. Необходимость и достаточность . . . . . 109

## III. Геометрия

11. Плоские фигуры
Луч, отрезок, угол, ломаная
11.1. Определения . . . . . 111
11.2. Измерение углов . . . . . 112
11.3. Радианная мера . . . . . 112
11.4. Классификация углов . . . . . 113
11.5. Углы при параллельных прямых . . . . . 113
Треугольник
11.6. Обозначения. Основные свойства . . . . . 114
11.7. Высота, медиана, биссектриса . . . . . 114
11.8. Вписанная и вневписанная окружности . . . . . 115
11.9. Описанная окружность . . . . . 116
11.10. Центр тяжести, ортоцентр . . . . . .
11.11. Площадь треугольника . . . . . 117
11.12. Частные случаи треугольников . . . . . 117
Четырехугольник . . . . . 117
11.13. Обозначения. Основные свойства . . . . . 117
11.14. Частные случаи четырехугольников . . . . . .
Многоугольник
11.15. Основные свойства . . . . . 117
11.16. Правильные многоугольники . . . . . 123
11.17. Соотношения в правильных многоугольниках . . . . 123
Круг
11.18. Элементы круга . . . . . 123
11.19. Углы и окружность . . . . . 126
11.20. Пропорциональные отрезки . . . . . 127

11.21. Соотношения . . 127
**12.** Задачи на построение
Элементарные построения
12.1. Перпендикуляр к отрезку в его середине . . . 128
12.2. Угол, равный данному . . . . . 128
12.3. Прямая, параллельная данной . . . . . 128
12.4. Биссектриса угла . . . . . 128
12.5. Четвертый пропорциональный отрезок . . . . . 129
12.6. Средний пропорциональный отрезок . . . . . 129
12.7. Деление отрезка на равные части . . . . . 129
12.8. Перпендикуляр в конце луча . . . . . 129
12.9. Золотое сечение . . . . . 130
12.10. Сегмент, вмещающий данный угол . . . . . 130
12.11. Касательная к окружности . . . . . 130
12.12. Общая касательная к двум окружностям . . . . . 130
Построение треугольника
12.13. По трем сторонам . . . . . 131
12.14. По двум сторонам и углу между ними . . . . . 131
12.15. По стороне и прилежащим к ней углам . . . . . 131
12.16. По трем медианам . . . . . 131
Построение правильных многоугольников
12.17. Треугольник и шестиугольник . . . . . 131
12.18. Квадрат и восьмиугольник . . . . . 132
12.19. Пятиугольник и десятиугольник . . . . . 132
**13.** Геометрические преобразования
13.1. Параллельный перенос . . . . . 132
13.2. Осевая симметрия . . . . . 133
13.3. Подобие. Центральная симметрия . . . . . 133
13.4. Инверсия . . . . . 135
**14.** Фигуры в пространстве
14.1. Прямые и плоскости. Углы . . . . . 136
14.2. Многогранники . . . . . 137
14.3. Правильные многогранники . . . . . 139
14.4. Правильные самопересекающиеся многогранники . . . 141
14.5. Полуправильные многогранники . . . . . 144
14.6. Цилиндр. Конус . . . . . 144
14.7. Шар . . . . . 146
14.8. Фигуры вращения . . . . . 147

## IV. Тригонометрия

**15.** Тригонометрические функции
15.1. Определения . . . . . 149
15.2. Основные соотношения . . . . . 150
15.3. Теоремы сложения . . . . . 153
**16.** Обратные тригонометрические функции
16.1. Определения . . . . . 156
16.2. Основные соотношения . . . . . 157
**17.** Тригонометрические уравнения
17.1. Простейшие уравнения . . . . . 160
17.2. Разложение на множители . . . . . 160
17.3. Необходимые и достаточные условия равенства тригонометрических функций . . . . . 161
17.4. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим . . . . . 162
**18.** Решение прямолинейных треугольников
18.1. Основные теоремы и формулы . . . . . 163
18.2. Прямоугольные треугольники . . . . . 164

18.3. Косоугольные треугольники . . . . . 165
19. Решение сферических треугольников
19.1. Основные понятия и определения . . . . . 166
19.2. Основные формулы . . . . . 167
19.3. Прямоугольные треугольники . . . . . 167
19.4. Косоугольные треугольники . . . . . 168

### V. Статистические данные и информатика

20. Обработка и анализ статистических данных (элементы)
20.1. Оформление данных в виде таблиц . . . . . 171
20.2. Анализ табличных данных . . . . . 172
20.3. Временные ряды . . . . . 177
20.4. Изображение данных в виде графиков и диаграмм. 185
20.5. Обобщающие показатели. 186
21. Элементы информатики и программирования
Алгоритм
21.1. Предмет информатики и понятие алгоритма . . . . . 193
21.2. Данные, входы и выходы алгоритма . . . . . 194
21.3. Типы данных и типы операций . . . . . 195
21.4. Форма записи и структура алгоритмов . . . . . 197
Обработка данных на вычислительной системе
21.5. Общее представление о вычислительной системе . . . 201
21.6. Аппаратные средства ВС . . . . . 203
21.7. Программные средства ВС . . . . . 204
Программирование на языке BASIC
21.8. BASIC-система . . . . . 206
21.9. Работа с BASIC-системой и правила записи BASIC-программ . . . . . 206
21.10. Типы данных . . . . . 209
21.11. Стандартные арифметические функции . . . . . 210
21.12. Арифметические выражения и оператор присваивания 210
21.13. Оператор ввода/вывода . . . . . 212
21.14. Оператор безусловного перехода . . . . . 212
21.15. Условный оператор . . . . . 212
21.16. Оператор цикла . . . . . 214

*Часть вторая*

## СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

### VI. Аналитическая геометрия на плоскости

22. Метод координат и простейшие задачи
22.1. Декартова прямоугольная система координат . . . . . 215
22.2. Расстояние между двумя точками . . . . . 216
22.3. Деление отрезка в данном отношении . . . . . 216
22.4. Преобразование декартовых координат . . . . . 217
22.5. Полярные координаты . . . . . 218
22.6. Переход от полярных координат к декартовым и обратно 218
22.7. Уравнение линии . . . . . 219
23. Прямая
23.1. Уравнение прямой . . . . . 219
23.2. Угол между двумя прямыми . . . . . 222
23.3. Пересечение двух прямых . . . . . 224
24. Кривые второго порядка
24.1. Окружность . . . . . 225
24.2. Эллипс . . . . . 226

24.3. Гипербола . . . . . 228
24.4. Парабола . . . . . 231
24.5. Общие свойства кривых второго порядка . . . . . 232
**25.** Некоторые замечательные кривые 233
**26.** Векторы
26.1. Определения . . . . . 237
26.2. Сложение и вычитание векторов . . . . . 238
26.3. Проекции вектора на оси координат . . . . . 238
26.4. Умножение вектора на число. Скалярное произведение двух векторов . . . . . 239

### VII. Элементы математического анализа

**27.** Функции и графики
27.1. Понятие функции . . . . . 240
27.2. Способы задания функции . . . . . 241
27.3. Задание области определения и области значений функции . . . . . 242
27.4. Классификация функций . . . . . 243
27.5. Взаимно обратные функции . . . . . 247
27.6. Монотонность. Четность. Периодичность. Ограниченность 247
27.7. Преобразование графиков . . . . . 249
**28.** Основы теории пределов
28.1. Бесконечно малая и бесконечно большая величины . . . 250
28.2. Предел функции . . . . . 251
28.3. Приращение функции . . . . . 253
28.4. Непрерывность функции . . . . . 254
**29.** Основы дифференциального исчисления
29.1. Производная . . . . . 255
29.2. Основные правила и формулы дифференцирования . . . 257
29.3. Исследование функций с помощью производной . . . . 260
29.4. Дифференциал . . . . . 264
**30.** Основы интегрального исчисления
30.1. Неопределенный интеграл . . . . . 268
30.2. Основные свойства, формулы и способы интегрирования 269
30.3. Таблица неопределенных интегралов . . . . . 275
30.4. Определенный интеграл . . . . . 281
30.5. Простейшие дифференциальные уравнения . . . . . 286
**31.** Ряды
31.1. Числовые ряды . . . . . 289
31.2. Функциональные ряды . . . . . 292
31.3. Таблица разложения некоторых функций в ряд Маклорена 293
31.4. Ряды Фурье . . . . . 295

*Часть третья*

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

### VIII. Методы и средства приближенных вычислений

**32.** Приближенные вычисления
32.1. Определения . . . . . 299
32.2. Значащие цифры и верные знаки . . . . . 300
32.3. Оценка точности приближенных чисел . . . . . 301
32.4. Округление чисел . . . . . 301
32.5. Правила действий с приближенными числами . . . . . 302
32.6. Приближенные формулы . . . . . 304
**33.** Ошибки и оценка точности результатов измерений
33.1. Методы и ошибки измерений . . . . . 306

33.2. Среднее арифметическое (арифметическая середина) . . 307
33.3. Оценка точности результатов непосредственных измерений . . . . . 308
33.4. Ошибки функций измеренных величин . . . . . 311
**34.** Способы и средства вычислений
34.1. Формула, алгоритм, схема . . . . . 313
34.2. Выражение углов в разных мерах . . . . . 314
34.3. Средства вычислений . . . . . 315
34.4. Таблицы . . . . . 316
34.5. Счеты . . . . . 322
34.6. Логарифмические линейки . . . . . 323
34.7. Малые электронно-клавишные вычислительные машины — ЭКВМ . . . . . 331

**IX. Решение уравнений, дифференцирование и интегрирование**

**35.** Приближенные графические решения уравнений . . . . . 341
35.1. Уравнение с одним неизвестным . . . . . 341
35.2. Уравнение с двумя неизвестными . . . . . 341
**36.** Графическое дифференцирование и интегрирование. Формулы для приближенного интегрирования . . . . . 342
36.1. Графическое дифференцирование . . . . . 342
36.2. Приближенное вычисление определенных интегралов . . 342
36.3. Графическое интегрирование . . . . . 343
**37.** Приближенное решение уравнений 344
37.1. Метод проб . . . . . 344
37.2. Метод хорд . . . . . 345
37.3. Метод Ньютона (касательных) . . . . . 345

Таблицы 346
1. Степени, корни, длины окружностей, площади кругов и обратные величины . . . . . 346
2. Степень некоторых чисел . . . . . 365
3. Числа $\frac{n}{\pi}$ и $\frac{\pi}{n}$ . . . . . 367
4. Числа, кратные и обратные $M$ . . . . . 368
5. Числа, кратные и обратные $e$ . . . . . 368
6. Простые числа до 2803 . . . . . 369
7. Некоторые несократимые дроби . . . . . 370
8. Квадратные и кубические корни из некоторых дробей . . 371
9. Длина дуги круга радиуса $R=1$ . . . . . 372
10. Элементы сегмента круга . . . . . 373
11. Длина дуги и площадь сегмента для хорды $a=1$ . . . . 381
12. Элементы правильных многоугольников . . . . . 382
13. Факториалы, обратные им величины и логарифмы . . . . 384
14. Мантиссы десятичных логарифмов чисел . . . . . 385
15. Антилогарифмы чисел . . . . . 389
16. Десятичные логарифмы тригонометрических функций . . 393
17. Десятичные логарифмы тригонометрических функций для углов в радианной мере . . . . . 407
18. Натуральные логарифмы чисел . . . . . 411
19. Значения величин для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно . . . . . 415
20. Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90° через каждые 10′ . . . . . 416
21. Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90° через каждые 0°, 1 . . . . . 429

22. Натуральные значения тригонометрических функций для углов в радианной мере . . . . . 447
23. Обратные тригонометрические функции . . . . . 449
24. Перевод десятичных долей градуса в градусную меру . . 451
25. Перевод углов из градусной меры в радианы . . . . 452
26. Перевод радианов в градусную меру . . . . . 453
27. Пропорциональные части . . . . . 454
28. Постоянные величины и их логарифмы . . . . . 459
29. Метрическая система мер . . . . . 461
Предметный указатель . . . . . 463

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник включает материал, предусмотренный программами как для средней школы, так и для средних специальных учебных заведений различного профиля. Он будет полезен и тем, кто после нескольких лет перерыва в учебе готовится поступать в институт.

Программа по математике в ряде средних специальных учебных заведений несколько отличается от программы средней школы. В частности, в техникумах нередко более широко излагаются элементы математического анализа, аналитической геометрии, теории приближенных вычислений и при этом меньше внимания уделяется традиционным разделам элементарной математики. В результате выпускники среднего специального учебного заведения оказываются в невыгодных условиях на конкурсных экзаменах в вуз. Стремясь помочь этой группе читателей преодолеть такой разрыв, авторы расширили раздел, посвященный элементарной математике, и включили в него материал, способствующий приобретению навыков решения соответствующих задач.

В настоящем издании появилось несколько дополнительных разделов.

Все чаще в повседневной практике читателю приходится сталкиваться с вычислительной техникой. В средней школе введен курс информатики, в рамках которого должны быть даны начальные сведения о компьютерах и решаемых с их помощью задачах. В связи с этим в справочник включена глава «Элементы информатики и программирования».

Недостаточно только владеть вычислительными средствами. Нужно уметь привлекать их для решения именно тех задач, где эти средства окажутся полезными и оправданными. Для выпускника среднего специального учебного заведения приобретение подобных навыков становится все более необходимым, особенно если учесть характер современных требований, предъявляемых в связи с широким технологическим обновлением многих отраслей народного хозяйства, намеченным в Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года. К сожалению, подготовка по математике не обеспечивает сегодняшнего выпускника даже элементарными знаниями о том, как организовать

имеющиеся данные, как их обобщить и какие содержательные выводы можно получить с помощью простейших приемов анализа данных. Чтобы восполнить этот пробел, авторы включили в справочник главу «Элементы обработки и анализа статистических данных».

Следует сразу же обратить внимание читателя на то обстоятельство, что две новые главы, посвященные информатике и анализу данных, написаны в иной манере, чем остальные разделы справочника. Авторы стремились, во-первых, разъяснить читателю основные понятия, во-вторых, продемонстрировать на примерах характер возникающих задач и элементарную технику их решения, в-третьих, побудить его (а возможно и подготовить) к чтению более подробных специальных руководств.

Помощь в практической работе, связанной с использованием микрокалькуляторов и других малых вычислительных средств, окажет существенно обновленный раздел «Способы и средства вычисления».

Работа между авторами распределялась следующим образом. Главы 1—18, 20, 26, 27 и частично 30 написаны А. А. Рывкиным, глава 21 — А. А. Рывкиным совместно с Н. Е. Бузикашвили, главы 22—25, 28—31, 35—37 — А. З. Рывкиным, главы 19, 32—34 и таблицы — Л. С. Хреновым.

Мы искренне признательны В. П. Моденову, который своими замечаниями содействовал улучшению этой книги.

Авторы с благодарностью примут отзывы и замечания, которые следует направлять в адрес издательства.

*Авторы*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

## I. АРИФМЕТИКА

### 1. НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

**1.1. Действия над натуральными числами.** Числа 1, 2, 3,..., появившиеся в результате счета, называются *натуральными*. Для них определены следующие арифметические действия:

| Наименование действия | Пример | Составляющие |
|---|---|---|
| *Сложение* | $31+12=43$ | 31 и 12 — слагаемые<br>43 — сумма |
| *Вычитание* (действие, обратное сложению) | $43-12=31$ | 43 — уменьшаемое<br>12 — вычитаемое<br>31 — разность |
| *Умножение* | $12\cdot 5=60=12+12+12+12+12=5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60$ | 12 и 5 — сомножители<br>60 — произведение |
| *Деление* (действие, обратное умножению; деление на нуль невозможно) | $60:12=5$<br>$\frac{60}{12}=5$ | 60 — делимое<br>12 — делитель<br>5 — частное |
| *Возведение в степень* — умножение одинаковых сомножителей (показатель степени — число сомножителей) | $3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$ | 3 — основание степени<br>4 — показатель степени<br>81 — степень |
| *Извлечение корня* — действие, обратное возведению в степень | $\sqrt[4]{81}=3$ | 81 — подкоренное число<br>4 — показатель корня<br>3 — корень |

Действия сложения и умножения обладают свойствами переместительности, сочетательности и распределительности (подробнее см. п. 3.4).

*Выражения, по определению не имеющие смысла:* $\left[\frac{a}{0}\right]$, где $a \neq 0$ полагают не имеющим смысла, так как результат деления не существует; $\left[\frac{0}{0}, 0^0\right]$ считают не имеющими смысла, поскольку результат соответствующих действий не может быть определен.

**1.2. Порядок действий. Скобки.** При любой записи действий над числами установлен определенный порядок вычислений. Порядок действий, определенный для арифметических выражений, распространяется и на другие математические выражения.

Основные арифметические действия упорядочены следующим образом: сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и в последнюю очередь сложение и вычитание.

Несколько действий сложения и вычитания, а также несколько действий умножения и деления выполняются в том порядке, в котором они записаны.

Если хотят, чтобы порядок действий в какой-нибудь записи отличался от установленного, то употребляют скобки.

Математические выражения заключают последовательно в круглые (...), квадратные [...(...)...] и фигурные {..[...(...)...]...} скобки; действия над числами выполняются последовательно: вначале в круглых, затем в квадратных и, наконец, в фигурных скобках.

**Пример.** Вычислить

$$\{[9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + (3^2 - 21:7)^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Выполняем действия в круглых скобках:

$$2 \cdot 6 = 12, \quad 3^2 - 21:7 = 9 - 3 = 6.$$

Переписываем пример без этих скобок:

$$\{[9 \cdot 4^2 : 12 + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Теперь выполняем действия в квадратных скобках, соблюдая порядок действий:

$$9 \cdot 16:12 + 36 + 125 \cdot 8:100 =$$
$$= 144:12 + 36 + 1000:100 = 12 + 36 + 10 = 58.$$

Наконец, выполняем последние действия:

$$58:29 \cdot 2 = 4.$$

В записи математических выражений могут употребляться скобки одинаковой конфигурации. В этом случае в первую очередь выполняются действия во внутренних скобках:

$$(((3+7)\cdot 2+(4-2)\cdot 5):10+7)\cdot 5=((10\cdot 2+2\cdot 5):10+7)\cdot 5=$$
$$=(30:10+7)\cdot 5=(3+7)\cdot 5=50.$$

Иногда деление обозначают чертой и производят вычисление, предварительно сократив дроби:

$$9\cdot 4^2:(2\cdot 6)+6^2+5^3\cdot 2^3:100=\frac{9\cdot 4^2}{2\cdot 6}+6^2+$$
$$+\frac{5^3\cdot 2^3}{100}=3\cdot 4+36+5\cdot 2=58.$$

Деление, обозначенное чертой, выполняют после вычисления выражений, стоящих в числителе и в знаменателе.

Знак извлечения корня рассматривается как запись с помощью скобок.

При возведении в степень сначала выполняют действия, указанные в показателе степени:

$$2^{2^5}=2^{32}.$$

Если требуется указать иной порядок действий, то употребляются скобки:

$$(2^2)^5=4^5=2^{10}.$$

**1.3. Десятичная система счисления.** Наиболее употребительна запись чисел с помощью *позиционной десятичной системы счисления.* В основании системы лежит число десять. Это означает, что счет ведется *единицами, десятками,* десятками десятков — *сотнями,* десятками сотен — *тысячами* и т. д. Для записи используются десять значков — *цифр:* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Одна и та же цифра может иметь разные значения в зависимости от места, которое она занимает в записи числа. Так, на первом месте справа она означает количество единиц, на втором — количество десятков, на третьем — количество сотен и т. д. В этом и заключается *позиционность* системы.

При записи число подразделяют на разряды и классы.

| *Разряд* | *Класс* |
|---|---|
| единиц<br>десятков<br>сотен | единиц |
| тысяч<br>десятков тысяч<br>сотен тысяч | тысяч |
| миллионов<br>десятков миллионов<br>сотен миллионов | миллионов |

Далее идут классы миллиардов, триллионов и т. д.

В десятичной системе счисления каждое натуральное число может быть записано в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 ,$$

где каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_k$ принимает значения 0, 1, 2, 3, ... , 9.

**Пример.** $3845 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Число 10 было избрано в качестве основания системы счисления, потому что человеку, имеющему на руках десять пальцев, оно казалось наиболее удобным. С точки зрения математики, этот выбор чисто случаен. Ничто не мешает нам рассматривать систему счисления, в которой в качестве основания взято 2, 3, 7, 12, 17 и вообще любое целое число, большее единицы.

В системе счисления с основанием $p$ (она называется $p$-ичной — читается «пэ-ичной») будет $p$ цифр, а каждое натуральное число запишется в виде

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 .$$

**1.4. Двоичная система счисления.** Основание — число 2. Для записи используются лишь две цифры 0 и 1; широкое применение двоичной системы в электронных вычислительных машинах связано с удобством изображения значения каждого разряда с помощью простейшего элемента: 1, когда элемент возбужден (например, по нему идет ток), 0 — в противном случае.

Записать число в двоичной системе счисления — значит представить его в виде суммы степеней числа 2. Для перевода числа из любой системы счисления в двоичную делят данное число на 2 и записывают остаток (0 или 1), результат снова делят на 2 и новый остаток записывают слева от первого и т. д. Когда в частном получается 1, то она приписывается слева к последовательности остатков, и эта последовательность превращается в двоичную запись данного числа.

**Пример 1.** Записать в двоичной системе счисления число 23.

Осуществляя последовательное деление на 2, располагаем результаты справа налево, и записывая остатки под делимым, получаем следующую форму записи:

| 1 | 2 | 5 | 11 | 23 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Итак, $23_{10} = 10111_2$.

**Пример 2.** Записать в двоичной системе счисления число 65 600.

Вычисления запишутся в следующем виде:

| 1025 | 2050 | 4100 | 8200 | 16 400 | 32 800 | 65 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Итак,

$$65\,600_{10} = 10\ 000\ 000\ 001\ 000\ 000_2 .$$

Для сокращения вычислений и приблизительной оценки числа удобно пользоваться табл. 1. Получив на некотором этапе число, содержащееся в этой таблице и соответствующее некоторому $n$, приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам $n$ нулей и единицу.

Таблица 1

**Последовательные степени числа 2**

| $n$ | $2^n$ | $n$ | $2^n$ | $n$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10 | 1 024 | 20 | 1 048 576 |
| 1 | 2 | 11 | 2 048 | 21 | 2 097 152 |
| 2 | 4 | 12 | 4 096 | 22 | 4 194 304 |
| 3 | 8 | 13 | 8 192 | 23 | 8 388 608 |
| 4 | 16 | 14 | 16 384 | 24 | 16 777 216 |
| 5 | 32 | 15 | 32 768 | 25 | 33 554 432 |
| 6 | 64 | 16 | 65 536 | 26 | 67 108 864 |
| 7 | 128 | 17 | 131 072 | 27 | 134 217 728 |
| 8 | 256 | 18 | 262 144 | 28 | 268 435 456 |
| 9 | 512 | 19 | 524 288 | 29 | 536 870 912 |

Таблица 2

**Двоичные представления чисел от 64 до 128 (от $2^6$ до $2^7$)**

| Десятичная запись | | Двоичная запись | | Десятичная запись | |
|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 80 | *** | 0000 | 96 | 112 |
| 65 | 81 | *** | 0001 | 97 | 113 |
| 66 | 82 | *** | 0010 | 98 | 114 |
| 67 | 83 | *** | 0011 | 99 | 115 |
| 68 | 84 | *** | 0100 | 100 | 116 |
| 69 | 85 | *** | 0101 | 101 | 117 |
| 70 | 86 | *** | 0110 | 102 | 118 |
| 71 | 87 | *** | 0111 | 103 | 119 |
| 72 | 88 | *** | 1000 | 104 | 120 |
| 73 | 89 | *** | 1001 | 105 | 121 |
| 74 | 90 | *** | 1010 | 106 | 122 |
| 75 | 91 | *** | 1011 | 107 | 123 |
| 76 | 92 | *** | 1100 | 108 | 124 |
| 77 | 93 | *** | 1101 | 109 | 125 |
| 78 | 94 | *** | 1110 | 110 | 126 |
| 79 | 95 | *** | 1111 | 111 | 127 |
| | 64 | 100 | 0000 | | |
| | 80 | 101 | 0000 | | |
| | 96 | 110 | 0000 | | |
| | 112 | 111 | 0000 | | |
| | 128 | 1000 | 0000 | | |

Значительно упрощает перевод чисел из десятичной системы в двоичную табл. 2, в которую сведены двоичные представления всех чисел от 64 до 128, т. е. от $2^6$ до $2^7$. Чтобы найти, например, двоичную запись числа 91, нужно к четырем цифрам, стоящим после черты против этого числа, приписать вместо звездочек первые три цифры из двоичного представления числа 80, возглавляющего столбец. Двоичные записи этих «заглавных» чисел помещены отдельно внизу таблицы и тоже разделены чертой.

Итак, $91_{10} = 1011011_2$. Аналогично, $117_{10} = 1110101_2$.

**Пример 3.** Записать в двоичной системе счисления число 65 600, используя табл. 1.

Осуществляем последовательное деление числа 65 600 на 2 так же, как и в предыдущем примере.

Получив в качестве частного число 512, стоящее в табл. 1 против цифры 9, мы приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам 9 нулей и единицу:

$$65\,600_{10} = 10\,000\,000\,00|1\,000\,000_2.$$

**Пример 4.** Записать в двоичной системе счисления число 7381.

Производим последовательное деление данного числа на 2, пока не получаем число, содержащееся в табл. 2. Затем приписываем слева двоичное представление этого числа:

| 115 | 230 | 461 | 922 | 1845 | 3690 | 7381 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1110011 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$$7381_{10} = 1\ 110\ 011\ 010\ 101_2.$$

Для перевода чисел из двоичной системы в десятичную пользуются табл. 1. При этом поступают, как в примере 5.

**Пример 5.** Записать в десятичной системе счисления число $1000\,111\,000\,110\,101\,001_2$.

Перенумеровав справа налево (начиная с номера 0) все двоичные разряды данного числа, берем сумму тех степеней двойки, которым соответствуют разряды, содержащие единицу (см. табл. 1):

$$\begin{array}{c} 1\ \ 0\ 0\ 0\ \ 1\ 1\ 1\ \ 0\ 0\ 0\ \ 1\ 1\ 0\ \ 1\ 0\ 1\ \ 0\ 0\,1_2 = \\ 18\ \ 17\ 16\ 15\ \ 14\ 13\ 12\ \ 11\ 10\ 9\ \ \ 8\ 7\ 6\ \ \ 5\ 4\ 3\ \ \ 2\ 1\ 0 \end{array}$$

$$= 2^{18} + 2^{14} + 2^{13} + 2^{12} + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^0 = 291241_{10}.$$

Используя таблицу сложения и таблицу умножения для двоичных чисел, с ними можно производить все арифметические действия.

Таблица сложения

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 10 |

Таблица умножения

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Можно предложить более сложный, но зато и более общий способ перехода от двоичной системы счисления к десятичной, который легко обобщается на случай перехода от любой системы к некоторой заданной.

Действительно, достаточно лишь последовательно делить данное двоичное число на число десять в двоичной записи: $10_{10} = 1010_2$. Располагая остатки справа налево и переводя их в десятичную систему счисления, получим десятичную запись данного двоичного числа.

**Пример 6.** Записать в десятичной системе счисления число $1000110110_2$. Осуществляя приведенную выше схему, получим

```
1000110110 | 1010
 1010      | 111000 | 1010
 ----      | 1010   | ----
  1111     | ----   | 101 = 5
 1010      | 10000
 ----      |  1010
  1010     | ----
  1010     |  110=6
 ----
   110=6
```

Итак, $1000110110_2 = 566_{10}$.

**1.5. Троичная система счисления.** В троичной системе счисления три цифры: 0, 1, 2. Процесс перехода от десятичной системы счисления к троичной аналогичен процессу, рассмотренному для двоичной системы счисления: осуществляются последовательные деления данного числа на 3 и остатки записываются справа налево.

**Пример 1.** Записать в троичной системе счисления число 2358.

Запись удобно вести так же, как и в предыдущем пункте:

| 1 | 3 | 9 | 29 | 87 | 262 | 786 | 2358 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |

$$2358_{10} = 10\ 020\ 100_3.$$

Для обратного перехода (от троичной записи к десятичной) пользуются табл. 3.

Таблица 3

**Последовательные степени числа 3**

| $n$ | $3^n$ | $n$ | $3^n$ | $n$ | $3^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 7 | 2 187 | 14 | 4 782 969 |
| 1 | 3 | 8 | 6 561 | 15 | 14 348 907 |
| 2 | 9 | 9 | 19 683 | 16 | 43 046 721 |
| 3 | 27 | 10 | 59 049 | 17 | 129 140 163 |
| 4 | 81 | 11 | 177 147 | 18 | 387 420 489 |
| 5 | 243 | 12 | 531 441 | 19 | 1 162 261 467 |
| 6 | 729 | 13 | 1 594 323 | 20 | 3 486 784 401 |

**Пример 2.** Записать в десятичной системе счисления число $10\,020\,100_3$.

Подписав под каждым разрядом его номер (начиная с нуля подряд справа налево) и воспользовавшись табл. 3, получим

$$10\,020\,100_3 = 3^7 + 2 \cdot 3^4 + 3^2 = 2358_{10}.$$

$$76\ 543\ 210$$

Используя таблицы сложения и умножения для троичной системы, можно легко осуществлять в ней все арифметические действия.

Таблица сложения

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 10 |
| 2 | 2 | 10 | 11 |

Таблица умножения

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 11 |

**1.6. Восьмеричная система счисления.** Основание — число 8. В системе восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. В вычислительных машинах она широко используется при составлении программ, так как перевод из восьмеричной системы в двоичную производится с помощью записи каждой восьмеричной цифры тремя двоичными разрядами:

$$23\,751_8 = 010\ 011\ 111\ 101\ 001_2.$$

Перевод числа из десятичной системы счисления в восьмеричную осуществляется с помощью последовательного деления его на восемь. Все записанные справа налево подряд остатки (включая нули) образуют запись числа в восьмеричной системе.

**Пример 1.** Записать в восьмеричной системе счисления число 19 432:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 37 | 303 | 2429 | 19 432 |
| 4 | 5 | 7 | 5 | 0 |

$$19\,432_{10} = 45\,750_8.$$

Обратный переход осуществляется с помощью табл. 4, являющейся выборкой из табл. 1.

Таблица 4

**Последовательные степени числа 8**

| $n$ | $8^n$ | $n$ | $8^n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 5 | 32 768 |
| 1 | 8 | 6 | 262 144 |
| 2 | 64 | 7 | 2 097 152 |
| 3 | 512 | 8 | 16 777 216 |
| 4 | 4096 | 9 | 134 217 728 |
| | | 10 | 1 073 841 824 |

**Пример. 2.** Записать в десятичной системе счисления число $45\,750_8$. Пользуясь табл. 4, получим

$$45\,750_8 = 4\cdot 8^4 + 5\cdot 8^3 + 7\cdot 8^2 + 5\cdot 8 =$$
$$= 4\cdot 4096 + 5\cdot 512 + 7\cdot 64 + 5\cdot 8 = 19\,432_{10}.$$

Используя таблицы сложения и умножения, в восьмеричной системе можно осуществлять все арифметические действия.

Таблица сложения

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Таблица умножения

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 3 | 3 | 6 | 11 | 14 | 17 | 22 | 25 |
| 4 | 4 | 10 | 14 | 20 | 24 | 30 | 34 |
| 5 | 5 | 12 | 17 | 24 | 31 | 36 | 43 |
| 6 | 6 | 14 | 22 | 30 | 36 | 44 | 52 |
| 7 | 7 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 |

**1.7. Делимость чисел.** Число $a$ называется *делителем* числа $c$, если существует такое число $b$, что $c=ab$ (числа $a$, $b$, $c$ — натуральные).

**Необходимые и достаточные признаки делимости чисел***

| Делитель | Признак |
|---|---|
| 2 | Оканчивается одной из цифр: 0, 2, 4, 6, 8 |
| 3 | Сумма цифр делится на 3 |
| 4 | Две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4 |
| 5 | Последняя цифра 0 или 5 |
| 6 | Одновременно соблюдаются признаки делимости на 2 и на 3 |
| 7 | Разность между числом десятков и удвоенной цифрой единиц делится на 7 |
| 8 | Три последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8 |
| 9 | Сумма цифр делится на 9 |
| 10 | Последняя цифра — нуль |
| 11 | Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11 |

* О необходимых и достаточных признаках см. п. 10.8.

*Замечание* 1. На 1 делятся все числа.

*Замечание* 2. Нуль делится на все числа. Несколько подряд стоящих нулей обозначают число нуль (см. признаки делимости на 4 или на 8).

*Замечание* 3. Числа, делящиеся на 2, называются *четными*, остальные числа — *нечетными*.

*Замечание* 4. Для делимости на 8 недостаточно одновременного выполнения признаков делимости на 2 и на 4 (сравни признак делимости на 6), так как числа 2 и 4 не являются взаимно простыми (см. п. 1.8).

**1.8. Простые и составные числа. Общие делители и общие кратные.** Натуральное число $a$ называется *простым*, если его делителями являются только единица и само число $a$. Натуральные числа, имеющие и другие делители, называют *составными*.

Число *единица* рассматривается особо, оно не является ни простым, ни составным.

Простых чисел бесконечно много. Все простые числа до 2803 сведены в табл. 6 в конце книги.

Основная теорема арифметики. *Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых чисел и притом единственным образом* (порядок записи сомножителей не учитывается).

Такое представление называется *разложением на простые множители*. Оно производится с использованием признаков делимости.

Приступая к разложению натурального числа на простые множители, следует проверить, не является ли оно простым (см. табл. 6 в конце книги).

**Пример.** Разложить на простые множители число 1050.

| | | |
|---|---|---|
| 1050 | 2 | Число четное, т. е. делится на 2. |
| 525 | 3 | Сумма цифр равна 12, число делится на 3. |
| 175 | 5 | На 3 число 175 уже не делится; оно делится на 5, так как оканчивается цифрой 5 |
| 35 | 5 | Полученное число еще раз делится на 5 |
| 7 | 7 | |
| 1 | | |

Итак, $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Наибольший общий делитель. *Общим делителем* нескольких натуральных чисел называется натуральное число, на которое делится каждое из них. Для любых натуральных чисел общим делителем является единица, т. е. общий делитель всегда существует. Общих делителей у нескольких натуральных чисел не больше, чем делителей у любого из них, следовательно, число общих делителей всегда конечно. Поэтому для любой совокупности натуральных чисел всегда существует *наибольший общий делитель* (НОД).

Если наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел равен единице, то числа называются *взаимно простыми*. Очевидно, что всегда существует и наименьший общий делитель, который для любых натуральных чисел равен единице.

Порядок разыскания наибольшего общего делителя. *Первый способ*. Каждое из данных натуральных чисел раз-

лагают на простые множители, выписывают множители, входящие в состав каждого из чисел (с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях).

*Замечание.* Если множитель не входит хотя бы в одно из чисел, то его не включают и в наибольший общий делитель.

**Пример 1.** Найти наибольший общий делитель чисел 540, 126 и 630.

$540 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5;$

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7;$

$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7;$

наибольший общий делитель $= 2 \cdot 3^2 = 18.$

*Второй способ (способ Евклида).* Применяется обычно при отыскании общего наибольшего делителя д в у х чисел. Большее из них делят на меньшее, затем меньшее — на первый остаток, далее первый остаток — на второй, второй — на третий и так до тех пор, пока не получится в остатке нуль; тогда последний делитель будет наибольшим общим делителем данных чисел.

**Пример 2.** Найти наибольший общий делитель чисел 357 и 273.

| | 357 | 273 |
|---|---|---|
| | 273 | 1 |
| 273 | 84 | |
| 252 | 3 | |
| 84 | 21 | |
| 84 | 4 | |

Последний делитель равен 21 Значит, наибольший общий делитель равен 21.

Наименьшее общее кратное (НОК). *Общим кратным* нескольких натуральных чисел называется натуральное число, делящееся на каждое из них. Для любых натуральных чисел общим кратным является их произведение. Таким образом, общее кратное существует для любой (конечной) совокупности натуральных чисел. Общих кратных бесконечно много: умножая любое общее кратное последовательно на 2, 3, 4 ..., мы снова получим число, кратное данных чисел. Так как общие кратные для данных чисел образуют совокупность натуральных чисел, то всегда существует *наименьшее общее кратное* (НОК) для данной совокупности.

Порядок разыскания наименьшего общего кратного. Каждое из данных натуральных чисел разлагают на простые множители, выписывают все множители какого-нибудь одного из чисел, дописывают все недостающие множители из других чисел и все их перемножают (т. е. каждый множитель берется с наибольшим показателем из встречающихся в разложениях).

**Пример.** Найти наименьшее общее кратное чисел 270, 300, 315.

$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$;
$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$;
$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$;
наименьшее общее кратное $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900$.

**1.9. Множество натуральных чисел.** Множество всех натуральных чисел обозначают символом **N**:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Для любых двух натуральных чисел $p$ и $q$ имеет место одно из соотношений: либо $p=q$ ($p$ равно $q$), либо $p<q$ ($p$ меньше $q$), либо $p>q$ ($p$ больше $q$), т. е. множество **N** *упорядочено.*

Сумма и произведение любых натуральных чисел тоже являются натуральными числами. Вычитание натуральных чисел приводит к натуральному числу лишь при условии, что уменьшаемое больше вычитаемого. Умножение натуральных чисел можно рассматривать как последовательное сложение одинаковых натуральных слагаемых. Деление натуральных чисел можно представить как последовательное вычитание делителя из делимого, из первой полученной разности, из второй и т. д. до тех пор, пока разность либо станет равной делителю, либо будет меньше делителя. В первом случае имеет место деление без остатка, во втором — с остатком. Деление без остатка можно условно рассматривать как деление с остатком, равным нулю. Тогда деление натурального числа $m$ на другое натуральное число $n (m \geqslant n)$ с остатком возможно всегда. В результате деления будут найдены такие натуральные числа $p$ и $r (r < n)$, что

$$m = pn + r.$$

Натуральное число $m$, если оно не делится на другое натуральное число $n$ без остатка, дает в остатке одно из чисел: 1, ..., $n-1$. Множество натуральных чисел **N** можно разбить на $n$ множеств

$$\mathbf{N}_n, \ \mathbf{N}_1, \ \mathbf{N}_2, \ \ldots, \ \mathbf{N}_{n-1},$$

где $\mathbf{N}_n$ — все натуральные числа, делящиеся на $n$ без остатка, $\mathbf{N}_1$ — все натуральные числа, которые при делении на $n$ дают в остатке 1, ..., $\mathbf{N}_{n-1}$ — все натуральные числа, которые при делении на $n$ дают в остатке $n-1$. Множества $\mathbf{N}_n$, $\mathbf{N}_1$, ..., $\mathbf{N}_{n-1}$ называют *классами по модулю n*, а представление множества **N**:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_n \cup \mathbf{N}_1 \cup \ldots \cup \mathbf{N}_{n-1}$$

называют *разбиением на классы по модулю n.*

**1.10. Множество целых чисел.** Дополним множество натуральных чисел новыми элементами: нулем и отрицательными целыми числами. Число *нуль* обозначается символом 0 и по определению обладает свойством $n + 0 = 0$. Любому натуральному числу $n$ ставится в соответствие единственное отрицательное число $-n$ такое, что $n + (-n) = 0$.

Число $-n$ называется *противоположным* числу $n$. Числа, противоположные натуральным, образуют множество *отрицательных целых чисел*. По аналогии натуральные числа называют *положительными целыми числами*.

Множество всех целых чисел обозначают **Z**.

Имеет место равенство $-(-n)=n$, из которого легко выводятся правила действий с отрицательными числами, справедливые и для действительных чисел:

$$m+(-n) = m-n,$$
$$m(-n) = -(mn),$$
$$(-m)(-n) = mn,$$
$$m:(-n) = (-m):n = -(m:n),$$
$$(-m):(-n) = m:n.$$

При доказательстве удобно сначала предположить, что $m$, $n>0$, а затем убедиться в том, что это ограничение может быть устранено.

Для каждого целого числа $n$ можно определить:

его *знак* (обозначается sign $n$), который равен $-1$, если $n<0$, 0, если $n=0$, и 1, если $n>0$;

его *абсолютную величину* (обозначается $|n|$), которая равна $n$, если $n\geqslant 0$, и равна $-n$, если $n<0$ (т. е. $|n|$ — неотрицательное число). Можно записать

$$n=|n|\operatorname{sign} n.$$

Такое представление чисел упрощает доказательство многих свойств (подробнее см. п. 3.5).

## 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

### Рациональные дроби

**2.1. Определения. Свойства рациональных дробей.** Рациональной дробью называется выражение $\frac{p}{q}$, где $p$ и $q$ — целые ($q\neq 0$). Говорят также, что дробь $\frac{p}{q}$ является *простой* или *обыкновенной* дробью (в отличие от десятичной дроби, см. п. 2.5), или *отношением*. Черту в записи рациональной дроби можно воспринимать как знак деления и писать $p:q$ (или $p/q$). Число, расположенное над чертой, называется *числителем* дроби, а число, расположенное под чертой, — ее *знаменателем*. Доказывая свойства рациональных дробей, а также работая с конкретными числовыми выражениями, удобно сделать знаменатель дроби положительным числом, умножая, если это нужно, ее числитель и знаменатель одновременно на $-1$.

Свойства положительных рациональных дробей.

1. Если $0<p<q$, то дробь меньше единицы,
   если $p=q$, то дробь равна единице,
   если $p>q>0$, то дробь больше единицы.

2. Если числитель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, т. е. умножить (разделить) на натуральное число, то дробь увеличится (уменьшится) во столько же раз.

3. Если знаменатель дроби увеличить (уменьшить) в несколько раз, то дробь уменьшится (увеличится) во столько же раз.

4. Из свойств 2 и 3 следует, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель одновременно увеличить (уменьшить) в несколько раз.

Деление числителя и знаменателя на общий множитель называется *сокращением дроби.* Умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число называется *расширением дроби.*

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называется *правильной.* Дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называется *неправильной.* Разделив числитель неправильной дроби на знаменатель, мы можем записать ее в виде *смешанного* числа. Например, $\frac{59}{11}=5\frac{4}{11}$.

Дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты, называется *несократимой.*

**2.2. Сравнение дробей с положительными знаменателями.**

| Дроби | Если | то |
|---|---|---|
| $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}$ | $a>0,\ 0<b<c$ | $0<\frac{a}{c}<\frac{a}{b}$ |
| $b,\ c>0$ | $a<0,\ 0<b<c$ | $\frac{a}{c}<\frac{a}{b}<0$ |
| $\frac{d}{f}, \frac{e}{f}$ | $0<d<e$ | $0<\frac{d}{f}<\frac{e}{f}$ |
| $f>0$ | $d<e<0$ | $\frac{e}{f}<\frac{d}{f}<0$ |

Если знаменатель дроби отрицателен, то ее числитель и знаменатель предварительно умножают на $-1$, а затем сравнивают дроби с положительными знаменателями.

Для сравнения дробей с разными числителями и знаменателями их предварительно приводят к общему знаменателю. *Наименьшим общим знаменателем* нескольких дробей называется наименьшее общее кратное их знаменателей.

Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, находим наименьшее общее кратное (см. п. 1.8) знаменателей дробей и берем его в качестве знаменателя каждой данной дроби. Числитель каждой дроби увеличиваем во столько раз, во сколько раз ее знаменатель меньше общего.

Например, для дробей 2/11, 2/9, 1/33 наименьший общий знаменатель будет $11 \cdot 9 = 99$:

$$\frac{2}{11} = \frac{18}{99}; \quad \frac{2}{9} = \frac{22}{99}; \quad \frac{1}{33} = \frac{3}{99}$$

и поэтому $\frac{1}{33} < \frac{2}{11} < \frac{2}{9}$.

### 2.3. Действия с дробями.

| Наименование действия | Порядок действия | Пример |
|---|---|---|
| *Сложение* | Дроби приводят к общему знаменателю и складывают получённые числители, подписывая под ними общий знаменатель | $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{13}{20} = \frac{40 + 12 + 39}{60} = 1\frac{31}{60}$ |
| *Вычитание* | Приводят дроби к общему знаменателю и из числителя уменьшаемого вычитают числитель вычитаемого | $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7-6}{8} = \frac{1}{8}$ |
| *Умножение* | Перемножают отдельно числители дробей и отдельно их знаменатели (произведя предварительно сокращение дробей), первое произведение будет числителем результата, второе — его знаменателем | $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}$ |
| *Деление* | Заменяют умножением на дробь, обратную* делителю | $\frac{3}{7} : \frac{9}{14} = \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = \frac{2}{3}$ |

* Поменяв в дроби местами числитель и знаменатель, получим дробь, называемую обратной по отношению к данной.

*Замечание* 1. Чтобы сложить смешанные числа, находят отдельно сумму целых чисел и сумму дробных частей, например:

$$2\frac{3}{4} + 7\frac{4}{7} = (2+7) + \left(\frac{3}{4} + \frac{4}{7}\right) = 10\frac{9}{28}.$$

*Замечание* 2. В случае, когда дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого, в уменьшаемом «занимается» единица и превращается в неправильную дробь, например:

$$3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = 3\frac{2}{6} - 2\frac{3}{6} = 2\frac{8}{6} - 2\frac{3}{6} = \frac{5}{6}.$$

*Замечание* 3. Если в умножении или делении участвуют смешанные числа, то их обращают в неправильные дроби.

**Типы задач**

| Тип задачи | Решение | Пример |
|---|---|---|
| 1. *Отыскание целого числа по заданной величине его части* | Разделить величину части числа на дробь, выражающую его часть | Найти число, $^3/_4$ которого равно 750. $750 : \frac{3}{4} = 750 \cdot \frac{4}{3} = 1000$. |
| 2. *Отыскание части числа по его целому* | Умножить число на дробь, выражающую его часть | Имея 6 руб., школьник $^1/_6$ истратил на тетради. Какова истраченная сумма? $6 \text{ руб.} \cdot \frac{1}{6} = 1 \text{ руб.}$ |
| 3. *Отыскание части числа в долях целого* | Разделить величину части числа на целое | Цех выпустил 5000 деталей; из них 20 бракованных. Какую часть составляет брак? $20 : 5000 = \frac{1}{250}$ |

**2.4. Пропорции.** *Пропорцией* называется равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \qquad (1)$$

Например:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \quad \text{или } 2 : 3 = 8 : 12.$$

Члены $a$ и $d$ пропорции (1) называются *крайними*, $b$ и $c$ — *средними*.

Каждый член пропорции называется *четвертым пропорциональным* по отношению к остальным трем.

Свойства пропорций. Если задана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a : b = c : d,$$

то:

1. $ad = bc$, т. е. произведение ее крайних членов равно произведению средних;

2. $a = \frac{bc}{d}$, $d = \frac{bc}{a}$, т. е. каждый ее крайний член равен произведению средних, деленному на другой крайний;

3. $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, т. е. каждый ее средний член равен произведению крайних, деленному на другой средний;

4. Одновременно справедливы пропорции:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a},$$

т. е. в каждой пропорции можно менять местами или только средние члены, или только крайние, или и те и другие одновременно.

Производные пропорции. Если задана пропорция

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то справедливо соотношение

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}, \tag{2}$$

называемое *производной пропорцией.*

Частные случаи производной пропорции

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d},\quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d},$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

получаются из пропорции (2) при некоторых значениях коэффициентов $m$, $n$, $p$, $q$.

Особые виды пропорций. *Непрерывная* пропорция

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},\quad \text{или}\quad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

— пропорция с двумя равными средними или с двумя равными крайними членами. Для *непрерывной* пропорции

$$b^2=ac.$$

*Гармоническая* пропорция

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}.$$

*Непрерывная гармоническая* пропорция

$$\frac{a-b}{b-d}=\frac{a}{d}.$$

Из равенства нескольких отношений

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$$

следует:

1) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\dfrac{a_1}{b_1}$;

2) $\dfrac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\dfrac{a_1}{b_1}$,

где $m_1$, $m_2$,..., $m_n$ — любые величины, не обращающие знаменатель в нуль.

## Десятичные дроби. Проценты. Двоичные дроби

**2.5. Определение.** *Десятичная дробь* — частный случай обыкновенной дроби. Знаменатель десятичной дроби есть целая степень числа 10. Десятичную дробь записывают в одну строку, отделяя в ней запятой столько цифр, сколько нулей в знаменателе:

$$\frac{38\,543}{100} = 385{,}43; \qquad 49\frac{72}{1000} = 49{,}072.$$

Так как мы пользуемся десятичной системой счисления, то десятичные дроби приобретают особое значение.

Без существенных изменений правила действий над целыми числами переносятся на десятичные дроби.

**2.6. Действия над десятичными дробями**

| Название действия | Правило | Пример |
|---|---|---|
| *Сложение* и *вычитание* | Аналогично сложению и вычитанию целых чисел. Необходимо следить за тем, чтобы соответствующие разряды целых и десятичные доли были записаны строго друг под другом | $+\begin{array}{r}418{,}471\\ 31{,}19\\ \hline 449{,}661\end{array}$ <br> $-\begin{array}{r}536{,}14\\ 79{,}472\\ \hline 456{,}668\end{array}$ |
| *Умножение* | Дроби умножают как целые числа, затем в произведении справа отделяют запятой столько цифр, сколько десятичных знаков во всех сомножителях | $\times\begin{array}{r}4{,}09\\ 0{,}024\\ \hline 1636\\ 818\\ \hline 0{,}09816\end{array}$ |
| *Деление* десятичной дроби на целое число | Делят как целые числа. Перед тем как внести в остаток первую цифру после запятой, ставят в частном запятую и далее продолжают деление, как обычно | $\begin{array}{r\|l}417{,}96 & 86\\ \cline{2-2} 344 & 4{,}86\\ \cline{1-1} 739\\ 688\\ \cline{1-1} 516\\ 516\\ \cline{1-1}\end{array}$ |

*Замечание* 1. От переноса запятой вправо (влево) на $n$ знаков десятичная дробь увеличивается (уменьшается) в $10^n$ раз.

*Замечание 2.* Если делимое меньше делителя, то в частном пишут нуль и ставят после него запятую. Затем к делимому приписывают справа нуль (т. е. увеличивают его в десять раз). Если после этого оно все еще остается меньше делителя, то в частном после запятой снова пишут нуль, а в делимом приписывают справа еще один нуль. Так поступают до тех пор, пока делимое не станет больше делителя. Дальше деление производят обычным образом.

*Замечание* 3. Если делитель есть десятичная дробь, то следует от-

бросить запятую в делителе, а в делимом перенести запятую вправо на столько знаков, сколько было в делителе после запятой. Дальше поступают по правилу деления десятичной дроби на целое число.

**2.7. Обращение десятичной дроби в простую и простой в десятичную.** Чтобы обратить десятичную дробь в простую, следует число, стоящее после запятой, написать в числителе, а в знаменателе написать $10^k$, где $k$ — число цифр справа от запятой.

**Пример.** $18{,}5104 = 18\frac{5104}{10^4} = 18\frac{5104}{10\,000} = 18\frac{319}{625}$.

Чтобы простую дробь обратить в десятичную, числитель простой дроби делят на ее знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число.

**Пример 1.** Дробь $\frac{36}{25}$ обратить в десятичную

```
 36 | 25
 25 | 1,44
---
 110
 100
---
  100
  100
---
```

**Пример 2.** Дробь $\frac{11}{18}$ обратить в десятичную

```
 110 | 18
 108 | 0,611...
-----
  20
  18
-----
   20
   18
-----
    2...
```

При обращении простой дроби в десятичную может образоваться *бесконечная десятичная дробь.*

**2.8 Периодические дроби.** Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным приписыванием справа одного и того же числа, называется *периодической*, а повторяющееся число — ее *периодом.*

**Примеры.** 0,333...; 3,5555...; 1,6111...; 2,18313131... В первых двух из них повторение начинается с первой цифры после запятой — такая дробь называется *чистой периодической.* В третьей дроби сначала идет цифра 6, а затем бесконечно повторяется 1, в четвертой повторение (период 31) начинается после 18. Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются *смешанными периодическими.*

При записи периодических дробей период заключают в скобки: 0,(3); 3,(5); 1,6(1); 2,18(31).

Обыкновенную конечную десятичную дробь можно считать периоди-

ческой с периодом нуль или девять: $3{,}168(0)=3{,}167(9)$. Принимая это во внимание, можно доказать, что любая обыкновенная дробь обращается в периодическую десятичную дробь.

Возможно и обратное преобразование: любую периодическую дробь можно обратить в простую. Здесь приходится рассматривать два случая.

1. *Обращение чистой периодической дроби в простую.* В качестве числителя простой дроби берут период чистой периодической дроби; в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

**Примеры.** $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $1,(18)=1\frac{18}{99}=1\frac{2}{11}$.

2. *Обращение смешанной периодической дроби в простую.* Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в простую, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

**Пример.**

$$1{,}31(12)=1\frac{3112-31}{9900}=1\frac{3081}{9900}=1\frac{1027}{3300}.$$

Второе правило легко следует из первого. Действительно, достаточно умножить смешанную периодическую дробь на $10^k$, где $k$ — число цифр после запятой до периода. Полученную чистую периодическую дробь нужно обратить по первому правилу и разделить результат на $10^k$.

**Примеры.**

1. $0{,}2(1)=\frac{1}{10}\cdot 2{,}(1)=\frac{1}{10}\cdot 2\frac{1}{9}=\frac{2}{10}+\frac{1}{90}=$

$$=\frac{2(10-1)+1}{90}=\frac{21-2}{90}=\frac{19}{90}.$$

2. $1{,}31(12)=\frac{1}{100}\cdot 131{,}(12)=\frac{1}{100}\cdot 131\frac{12}{99}=$

$$=1+\frac{31}{100}+\frac{12}{9900}=1\frac{31\cdot 99+12}{9900}=$$

$$=1\frac{31(100-1)+12}{9900}=1\frac{3112-31}{9900}=$$

$$=1\frac{3081}{9900}=1\frac{1027}{3300}.$$

Мы видим, что любую простую дробь можно обратить в периодическую и обратно — каждую периодическую дробь можно обратить в простую.

**2.9. Проценты.** *Процент* — сотая часть числа. Обозначение — %. Если число принято за единицу, то 1% его составляет 0,01 этого числа, 25% составляют 0,25, или 1/4 этого числа и т. д.

Выражение величины $a$ в процентах другой величины, $b$, т. е.

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\,\%,$$

называется *процентным отношением* чисел $a$ и $b$.

Если величина $a$ составляет $p\,\%$ величины $b$, то

$$a = \frac{bp}{100}, \quad b = \frac{100a}{p}.$$

Типы задач на проценты аналогичны типам задач на простые дроби (см. п. 2.3).

1. *Отыскание всего числа по заданной величине его процента.*
2. *Отыскание указанного процента от данного числа.*
3. *Отыскание процентного отношения двух чисел.*

*Промилле* — тысячная часть числа: обозначается ‰.

Сложные проценты. Рассмотрим одну из наиболее типичных задач на проценты. В сберегательную кассу внесен вклад в $a$ рублей и положен на $p$ процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в год). Какова будет сумма денег через $n$ лет?

Через один год на сберегательной книжке будет

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ руб.}$$

Через два года:

$$\left[a\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]\left(1+\frac{p}{100}\right) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ руб.}$$

Нетрудно убедиться, что через $n$ лет сумма составит

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \text{ руб.}$$

Это и есть *формула сложных процентов.*

(Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются *сложными.*)

**2.10. Двоичные дроби.** В двоичной системе счисления, используемой в электронных счетных машинах, роль десятичных дробей исполняют двоичные дроби. Правила действий с ними легко можно установить, используя правила действий с десятичными дробями и таблицы сложения и умножения для двоичных чисел (см. п. 1.4).

Перевод двоичной дроби в десятичную. Под каждым разрядом снизу подписывается его порядок и берется сумма степеней двойки, соответствующих тем разрядам, в которых стоит единица:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, & 0 & 1 & 1 & 0 & 1_2 = \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{array}$$

$$= 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} =$$

$$= 1235{,}40625_{10}.$$

При вычислениях полезно наряду с табл. 1 пользоваться табл. 5.

Перевод десятичной дроби в двоичную. Производится также с помощью табл. 5.

Таблица 5

**Отрицательные степени числа 2**

| $n$ | $2^n$ | $n$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|
| —1 | 0,5 | —11 | 0,00048828125 |
| —2 | 0,25 | —12 | 0,000244140625 |
| —3 | 0,125 | —13 | 0,0001220703125 |
| —4 | 0,0625 | —14 | 0,00006103515625 |
| —5 | 0,03125 | —15 | 0,000030517578125 |
| —6 | 0,015625 | —16 | 0,0000152587890625 |
| —7 | 0,0078125 | —17 | 0,00000762939453125 |
| —8 | 0,00390625 | —18 | 0,000003814697265625 |
| —9 | 0,001953125 | —19 | 0,0000019073486328125 |
| —10 | 0,0009765625 | —20 | 0,00000095367431640625 |

**Пример.** Записать в двоичной системе счисления число 1235,40625.

Сначала записываем в двоичной системе целую часть данного числа (см. п. 1.4):

$$1235 = 10\ 011\ 010\ 011.$$

Затем переводим в двоичную дробь число 0,40625. Осуществляется это с помощью последовательного вычитания из 0,40625 отрицательных степеней двойки, начиная с 0,5. Если вычитание осуществимо, то после запятой ставим единицу, если нет — нуль. Из остатка вычитаем следующую дробь из данной таблицы и т. д. Процесс продолжается либо до тех пор, пока мы не исчерпаем данную дробь, т. е. пока в остатке не получим нули, либо до получения необходимой точности. Запись ведется по следующей схеме:

$$\begin{array}{ll} & 0{,}40625 \\ (n=-2) & \underline{0{,}25} \\ & 0{,}15625 \\ (n=-3) & \underline{0{,}125} \\ & 0{,}03125 \\ (n=-5) & \underline{0{,}03125} \\ & 0 \end{array} \Big| \overline{0{,}01101}$$

Итак, $1235{,}40625_{10} = 10\ 011\ 010\ 011,\ 011\ 01_2$.

**2.11. Множество рациональных чисел.** Каждая конечная десятичная дробь (в том числе и любое целое число) может быть записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби с периодом, отличным от нуля: $0{,}7 = 0{,}6(9)$; $4 = 3{,}(9)$; $-6{,}579 = -6{,}578(9)$. Удобно определять *рациональное число* как бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом, отличным от нуля.

Часто определяют рациональное число как множество равных (точнее, эквивалентных) рациональных дробей. В этом случае приходится из множества рациональных дробей, соответствующих данному рациональному числу, выбирать одну, как бы определяющую это число

Обычно выбирают рациональную дробь с положительным знаменателем, у которой абсолютная величина числителя и знаменатель — взаимно простые числа:

$$\frac{-1}{3} \sim \left\{\frac{-1}{3}, \frac{1}{-3}, \frac{2}{-6}, \frac{-3}{9}, \frac{4}{-12}, \ldots\right\}.$$

Все рациональные числа образуют *множество рациональных чисел*, которое обозначается символом **Q**. Множество **Q** содержит в качестве своего подмножества множество целых чисел, а следовательно, и множество натуральных чисел. Сумма, разность, произведение и частное (деление на нуль невозможно) рациональных чисел также являются рациональными числами.

# II. АЛГЕБРА

## 3. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

### Действительные числа

В арифметике были введены положительные рациональные числа и изучены их свойства. В процессе развития алгебры и математического анализа понятие числа пришлось значительно расширить.

**3.1. Числовая ось. Отрицательные числа.** *Числовой осью* называется прямая, на которой заданы две точки — *нуль* и *единица*. Предположим, что нуль лежит левее единицы, а *направление* от нуля к единице отметим стрелкой (рис. 1). Расстояние между нулем и единицей называется *единицей масштаба* или *масштабным расстоянием*.

Отложив на числовой оси вправо от единицы отрезок, равный единице масштаба, получим точку, соответствующую числу 2, продолжая этот процесс, сможем каждому натуральному числу поставить в соответствие точку числовой оси (рис. 2).

Для каждой точки, соответствующей числу $n$, построим на оси точку, симметричную относительно нуля, и обозначим ее — $n$ (рис. 3). Числа, соответствующие построенным точкам, образуют совокупность *целых отрицательных чисел,* для которых можно сохранить все правила действий с положительными числами. При этом нужно иметь в виду свойства, указанные в п. 3.4.

Теперь с помощью деления отрезка между нулем и единицей на равные части (см. п. 12.7) легко построить точки, соответствующие числам

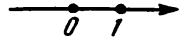



Рис. 1

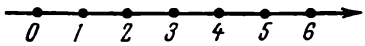



Рис. 2

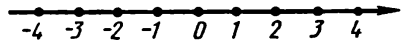



Рис. 3

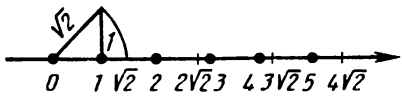



Рис. 4

вида $p/q$, где $p$ и $q$ — целые, $0<p<q$. Все остальные рациональные точки можно построить сдвигом (вправо или влево) на целое число единиц масштаба.

**3.2. Иррациональные числа.** В результате проведенного построения вся числовая ось оказывается настолько «густо» покрытой рациональными точками, что как бы мал ни был отрезок оси, в нем всегда окажется бесконечно много рациональных точек. Тем не менее на числовой оси можно указать точки, не являющиеся рациональными. Например, точка, отстоящая от нуля на расстояние, равное диагонали квадрата со стороной единица (рис. 4), не может быть рациональной.

Действительно, если предположить, что $\sqrt{2}=p/q$, где $p$ и $q$ — взаимно простые числа, то $p^2=2q^2$. Из записи следует, что $p$ четно, а значит $p^2$ делится на четыре. Тогда и $q$ четно, что противоречит предположению о несократимости дроби $p/q$. Следовательно, $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде несократимой рациональной дроби, в то время как любая рациональная дробь допускает такое представление. Поэтому $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Расстояние между числами 0 и $\sqrt{2}$ можно, как и единицу масштаба, разделить на любое число равных частей (см. п. 12.7) и получить точку для каждого числа $\sqrt{2}\,p/q$. Итак, одно нерациональное число $\sqrt{2}$ порождает столько же новых нерациональных чисел, сколько имеется в нашем распоряжении рациональных.

Любое рациональное число может быть записано в виде бесконечной *периодической* десятичной дроби и, обратно, любая бесконечная десятичная *периодическая дробь* может быть записана в виде $p/q$, где $p$ и $q$ — целые (см. п. 2.8). Чтобы обеспечить однозначность в записи, можно, например, условиться писать 1,(9) вместо 2,(0); 0,34(9) вместо 0,35(0) и т. д.

Число, которое можно выразить в форме бесконечной десятичной *непериодической* дроби, называется *иррациональным*.

Рациональные и иррациональные числа в совокупности называются *действительными* или *вещественными*.

Можно доказать, что каждому действительному числу соответствует только одна точка числовой оси, а каждой точке числовой оси соответствует только одно действительное число.

Таким образом, каждое действительное число можно изобразить в виде точки числовой оси. В этом и заключается *геометрическое представление* действительных чисел.

**3.3. Алгебраические и трансцендентные числа.** Действительные числа подразделяются также на алгебраические и трансцендентные.

*Алгебраическими* называют числа, которые являются корнями алгебраических многочленов с целыми коэффициентами.

Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $4\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ — алгебраические числа.

Неалгебраические числа называются *трансцендентными*.

Так как каждое рациональное число $p/q$ является корнем соответствующего многочлена первой степени с целыми коэффициентами $qx-p$, то оно алгебраическое, а все трансцендентные числа иррациональны. Доказать, что некоторое число трансцендентно, далеко не просто.

Трансцендентными являются числа $e$, $\pi$, синусы многих рациональных величин, логарифмы целых чисел и т. д.

**3.4. Действия над действительными числами.** Над действительными числами выполняются четыре арифметических действия, свойства которых сведены в таблицу.

| Формула | | Название свойства |
|---|---|---|
| для сложения | для умножения | |
| $a+b=b+a$ | $ab=ba$ | *Переместительность (коммутативность)* |
| $(a+b)+c=$ $=a+(b+c)$ | $(ab)c=a(bc)$ | *Сочетательность (ассоциативность)* |
| $a+0=a$ | $a\cdot 0=0$ $a\cdot 1=a$ | *Свойства нуля и единицы* |
| $a+(-a)=0$ | $a\cdot a^{-1}=\frac{a}{a}=1$ $(a\neq 0)$ | Существование *противоположного* числа (возможность *вычитания*) и *обратного* числа (возможность *деления*) |
| | $(a+b)c=ac+bc$ | *Распределительность (дистрибутивность)* |
| $-(-a)=a$ $a+(-b)=$ $=a-b$ $a-(-b)=$ $=a+b$ | $a\cdot(-b)=$ $=(-a)\cdot b=-(ab);$ $(-a)\cdot(-b)=ab$ | Свойства действий с отрицательными числами |
| | $a\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)=a:(-b)=$ $=(-a):b=(-a)\cdot\frac{1}{b}=$ $=-\frac{a}{b}$ | |

**3.5. Абсолютная величина действительного числа.** *Абсолютной величиной* действительного числа $a$ называется само это число, если оно неотрицательно, и это число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательно:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Наряду с $|a|$ рассматривают функцию $\operatorname{sign} a$ (*знак числа* $a$):

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0, \\ 0, & \text{если } a = 0, \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

При всех $a$ имеют место равенства:

$$a = |a| \operatorname{sign} a,$$
$$|a| = a \operatorname{sign} a.$$

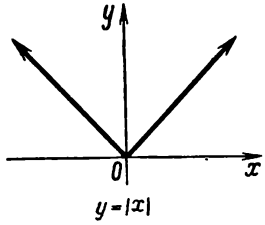



Рис. 5

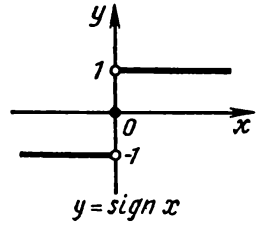



Рис. 6

На рис. 5 и 6 изображены графики функций $y=|x|$, $y=\operatorname{sign} x$.

О преобразовании графика функции $y=f(x)$ в графики $y=f(|x|)$, $y=|f(x)|$, $y=|f(|x|)|$ см. п. 27.7.

Абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин слагаемых:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

*Абсолютная величина произведения (частного)* равна произведению (частному) абсолютных величин сомножителей (делимого и делителя):

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Геометрический смысл абсолютной величины числа $a$ — расстояние на числовой оси от начала отсчета до точки, изображающей число $a$.

Понятие абсолютной величины тесно связано с понятием арифметического корня (см. п. 4.1).

Часто приходится решать уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком абсолютной величины. Решение таких уравнений мы поясним на примерах.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$|x+1| + |x-2| + |2x-5| = 1{,}5.$$

Чтобы решить такое уравнение, нужно раскрыть знаки абсолютной величины, а сделать это можно, лишь зная, отрицательны или неотрицательны стоящие под этими знаками величины. Поэтому поступают следующим образом: наносят на числовую прямую все те точки, в ко-

торых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, меняют знак. В нашем примере это точки $x=-1$, $x=2$, $x=2{,}5$ (рис. 7). Ими числовая прямая разбивается на столько частей, сколько нам предстоит разобрать случаев. В примере таких частей четыре. Рассмотрим их последовательно, двигаясь по числовой оси слева направо.

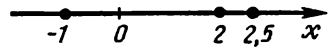


Рис. 7

Пусть $x<-1$, тогда каждая из величин $x+1$, $x-2$ и $2x-5$ отрицательна. Поэтому данное уравнение можно записать так:

$$-(x+1)-(x-2)-(2x-5)=1{,}5.$$

Раскрыв скобки, найдем

$$x=1{,}125,$$

что не согласуется с предположением $x<-1$. Следовательно, при $x<-1$ уравнение не имеет решений.

Пусть $-1\leqslant x<2$, тогда величина $x+1$ неотрицательна, а величины $x-2$ и $2x-5$ отрицательны. Данное уравнение примет вид

$$(x+1)-(x-2)-(2x-5)=1{,}5,$$

откуда $x=3{,}25$. Это снова не согласуется с предположением, что $-1\leqslant x<2$ и в этом промежутке решений нет.

Если $2\leqslant x\leqslant 2{,}5$, то уравнение примет вид

$$(x+1)+(x-2)-(2x-5)=1{,}5,$$

т. е.

$$1{,}5=1{,}5.$$

Так как уравнение обратилось в тождество, то любое значение из рассматриваемого промежутка является решением уравнения.

Пусть, наконец, $x>2{,}5$. Тогда все величины, стоящие под знаками абсолютных величин, положительны:

$$(x+1)+(x-2)+(2x-5)=1{,}5,$$

т. е.

$$x=1{,}875<2{,}5.$$

Итак, решением данного уравнения будет отрезок

$$2\leqslant x\leqslant 2{,}5.$$

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=3.$$

Воспользовавшись тем, что $\sqrt{a^2}=|a|$ (см. п. 4.1), перепишем это уравнение в виде

$$|x-1|+|x-2|=3.$$

Точки $x=1$ и $x=2$ делят числовую прямую на три части, в каждой из которых мы и решаем уравнение.

При $x<1$ уравнение примет вид

$$-(x-1)-(x-2)=3,\ x=0<1.$$

Если $1\leqslant x\leqslant 2$, то получим

$$(x-1)-(x-2)=3,\ 1=3,\ \text{решений нет.}$$

Когда $x>2$, уравнение запишется так:

$$(x-1)+(x-2)=3,\ x=3>2.$$

Итак, уравнение имеет два корня:

$$x_1=0,\ x_2=3.$$

## Комплексные числа

**3.6. Определения. Действия над комплексными числами.** Следующим этапом расширения понятия о числе является введение комплексных чисел. Необходимость такого расширения понятия о числе возникает хотя бы потому, что действие извлечения корня из действительного числа не всегда возможно в области действительных чисел. В самом деле, например, невозможно указать такое действительное число, квадрат которого равен отрицательному числу.

*Комплексными* называются числа вида $a+bi$ (где $a$ и $b$ — действительные числа*), если они обладают следующими свойствами:

1. *Равенство двух комплексных чисел* $a_1+b_1i=a_2+b_2i$ возможно тогда и только тогда, когда

$$a_1=a_2 \text{ и } b_1=b_2.$$

2. *Сложение двух комплексных чисел* осуществляется по правилу

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

3. *Умножение комплексных чисел* осуществляется по правилу

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

(т. е. по обычному правилу умножения многочленов с обязательной заменой $i^2$ числом $-1$).

Укажем два важных следствия из первого и третьего свойств.

---

* $a$ — *действительная часть* комплексного числа; $b$ — его *мнимая часть*.

Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных (при $b=0$).

Комплексные числа $a+bi$ при $b\neq 0$ называются мнимыми, числа вида $bi$ называются чисто мнимыми.

Следствие 1. $a_1+b_1i=0$ тогда и только тогда, когда $a_1=b_1=0$.

Следствие 2. Из правила умножения комплексных чисел вытекает, что

$$i^2=-1.$$

Таким образом,

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ \ldots$$
$$\ldots,\ i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

Комплексные числа обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для сложения и умножения (см. п. 3.4).

Для комплексных чисел понятия «больше» или «меньше» не определены.

Для каждого комплексного числа $a+bi$ существует *противоположное* ему число $-(a+bi)=-a-bi$. Отсюда получаем *правило вычитания комплексных чисел:*

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

Числа вида

$$a+bi \text{ и } a-bi,$$

отличающиеся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Свойства комплексно-сопряженных чисел.

1. Сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел есть всегда число действительное:

$$(a+bi)+(a-bi)=2a;\ (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

2. Деление комплексных чисел

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$$

при $a_2+b_2i\neq 0$ всегда возможно и осуществляется с помощью умножения делимого и делителя на число, комплексно-сопряженное делителю:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

**Примеры.**

1. $(3-2i)+(1+i)=(3+1)+(-2+1)i=4-i.$

2. $(3-i)-(3+2i)=(3-3)+(-1-2)i=-3i.$

3. $(6+2i)(3-4i)=(18+8)+(6-24)i=26-18i.$

4. $\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{(3-1)+(-1-3)i}{1+1}=1-2i.$

5. $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i\cdot i}=\dfrac{i}{-1}=-i.$

6. $\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i.$

**3.7. Геометрическое истолкование.** Расположив на плоскости две пересекающиеся под прямым углом числовые оси с общим масштабом, мы получим наиболее удобное геометрическое истолкование комплексных чисел: каждому комплексному числу $a+bi$ соответствует одна точка $(a, b)$ комплексной плоскости с координатами $a$ и $b$ или же вектор $\{a, b\}$ и, обратно, каждой точке $(a, b)$ плоскости соответствует одно комплексное число $a+bi$ (рис. 8). Горизонтальная ось называется *действительной,* вертикальная — *мнимой.* Комплексно-сопряженные числа симметричны относительно действительной оси, противоположные — симметричны относительно нуля.

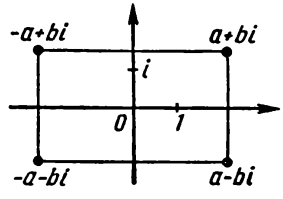



Рис. 8

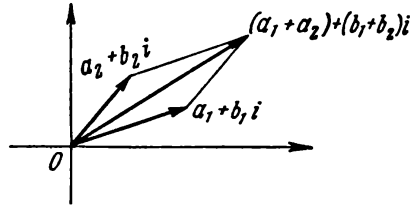



Рис. 9

Сложение и вычитание комплексных чисел можно истолковать как сложение и вычитание соответствующих векторов (см. п. 26.2). На рис. 9 и 10 показано геометрическое построение соответственно суммы и разности комплексных чисел.

**3.8. Тригонометрическая форма.** Комплексное число $a+bi\neq 0$ может быть записано в виде

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

называемом *тригонометрической формой* комплексного числа.

Здесь $r$ — расстояние от начала координат до заданной точки $(a, b)$, а $\varphi$ — угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против часовой стрелки действительную ось, чтобы она проходила через точку $(a, b)$ (рис. 11). Положительное число $r$ называется

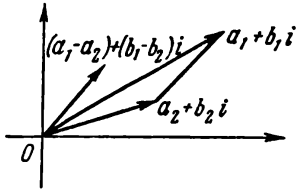



Рис. 10

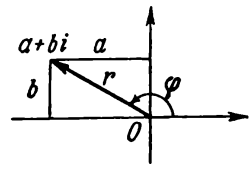



Рис. 11

*модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа $a+bi$, число $\varphi$ называется его *аргументом.*

Обозначения:

$$r=|a+bi|=\mathrm{mod}(a+bi),\quad \varphi=\arg(a+bi).$$

Модулем действительного числа является его абсолютная величина (см. п. 3.5).

Если на аргумент комплексного числа наложено ограничение $-\pi\leqslant\varphi<\pi$ (или $0\leqslant\varphi<2\pi$), то говорят, что $\varphi$ есть *главное значение* аргумента.

Переход от алгебраической формы $a+bi$ комплексного числа к его тригонометрической форме ($\varphi$ — главный аргумент) осуществляется по формулам:

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \mathrm{tg}\,\varphi=b/a,$$

или

$$\varphi=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}, & \text{если } a>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a=0,\ b>0,\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}+\pi & \text{если } a<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } a=0,\ b<0.\end{cases}$$

Комплексные числа $z$ с одним и тем же модулем $r$ (т. е. для которых $|z|=r$) образуют на комплексной плоскости окружность радиуса $r$ с центром в начале координат (рис. 12, *а*). Комплексные числа $z$ с одним и тем же аргументом $\varphi_0$ образуют луч, выходящий из начала координат под углом $\varphi_0$ к действительной полуоси (рис. 12, *б*).

**3.9. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.** Действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня значительно проще производить над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

*Умножение:*

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

(модули перемножают, а аргументы складывают).

*Деление:*

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\ (r_2\neq 0)$$

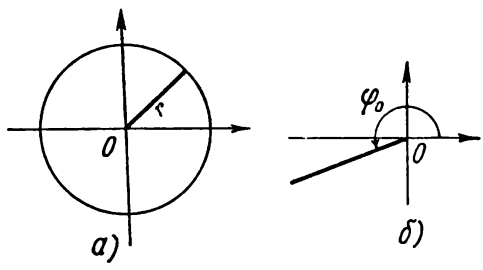



Рис. 12

(первый модуль делят на второй, из первого аргумента вычитают второй).

*Возведение в степень* (целую положительную) производят по *формуле Муавра:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(модуль возводят в ту же степень, а аргумент умножают на показатель степени).

*Извлечение корня:*

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right);$$

при этом коэффициенту $k$ придают последовательно $n$ значений: $k=0$, 1, 2, ... , $n-1$ и получают $n$ значений корня, т. е. ровно столько, каков показатель корня.

**Пример 1.**

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16(\cos 0 + i\sin 0)} = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right),$$

$$k=0, 1, 2, 3.$$

Получаем четыре значения корня:

$$2(\cos 0 + i\sin 0) = 2(1+i0) = 2;$$

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i) = 2i;$$

$$2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2;$$

$$2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Они располагаются на действительной и мнимой осях на расстоянии в две единицы масштаба от начала координат (рис. 13, *а*).

**Пример 2.**

$$\sqrt[6]{-1} = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),$$

$$k=0, 1, \ldots, 5.$$

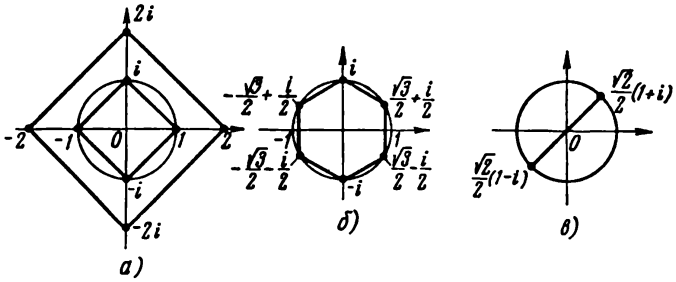



Рис. 13

Получаем шесть значений корня (рис. 13, *б*):

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),\ i,\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i),$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i),\ -i,\ \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

**Пример 3.**

$$\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),$$

$$k=0,\ 1.$$

Получаем два значения корня (рис. 13, *в*):

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

## 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

### Степени и корни

**4.1. Определения.** *Степень* действительного числа $a$ с натуральным показателем $n$ есть произведение $n$ сомножителей, каждый из которых равен $a$:

$$a^1=a,\ a^2=a\cdot a,\ \ldots,\ a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}$$

*Действительным корнем* $n$-й степени ($n$ — натуральное, $n\geqslant 2$) из действительного числа $b$ называется такое действительное число $x$, что $x^n=b$.

Обозначение: $x=\sqrt[n]{b}$.

Математически определение корня можно записать так:

$$(\sqrt[n]{b})^n=b.$$

Неотрицательный корень $n$-й степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*. Можно доказать, что арифметический корень любой натуральной степени из любого положительного числа существует.

*Замечание.* В элементарной математике выражение $\sqrt[n]{a}$ понимают как арифметический корень, т. е. сама запись $\sqrt[n]{a}$ предполагает, что $a\geqslant 0$. (Иногда допускают употребление знака корня, если $a$ отрицательно, а $n$ нечетно. Например, $\sqrt[3]{-8}=-2$.)

Таким образом,

$$\sqrt{4}=2,\ \text{но}\ \sqrt{4}\neq -2,\ \text{хотя}\ (-2)^2=4;$$

$$\sqrt[n]{0}=0.$$

Вообще,

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Например, $\sqrt{(-2)^2}=2$, а не $-2$.

Принимаются следующие определения:

1. Если $a\neq 0$, то $a^0=1$.
2. Выражение $0^0$ смысла не имеет.
3. Если $a>0$, а числа $m$ и $n$ — натуральные, то

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}}.$$

*Замечание.* Дробные показатели определены только для положительных оснований. Поэтому $(-27)^{1/3}$ не имеет смысла.

**Примеры.**

1. $a^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}=\frac{1}{a\sqrt{a}}$ $(a>0)$.

2. $(-5)^{\frac{7}{2}}$, $(-8)^{-\frac{1}{2}}$ — не имеют смысла в области действительных чисел.

3. $\left(a^{\frac{3}{7}}\right)^{-\frac{21}{2}}=a^{-\frac{3\cdot 21}{7\cdot 2}}=a^{-\frac{9}{2}}$ $(a>0)$.

Если $a>0$, то $a^\varrho$, где $\varrho$ — иррациональное число, можно определить как предел $a^{p_k}$ ($p_k$ — рациональные числа) при $p_k\to\varrho$.

**4.2. Действия над степенями.** Для степеней с положительными основаниями справедливы следующие соотношения:

| | |
|---|---|
| $a^{\varrho_1}a^{\varrho_2}=a^{\varrho_1+\varrho_2}$<br>$a^{\varrho_1}:a^{\varrho_2}=a^{\varrho_1-\varrho_2}$ | — при умножении (делении) степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются (вычитаются), а основание сохраняется; |
| $(a^{\varrho_1})^{\varrho_2}=a^{\varrho_1\varrho_2}$ | — при возведении степени в степень показатели степени перемножаются, а основание сохраняется; |
| $(ab\ldots l)^\varrho=a^\varrho b^\varrho\ldots l^\varrho$ | — степень произведения сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей; |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^\varrho=\frac{a^\varrho}{b^\varrho}$ | — степень частного равна частному степеней делимого и делителя |

Из приведенных формул следуют подобные соотношения для *арифметических корней:*

| | |
|---|---|
| $\sqrt[\varrho]{ab\ldots l}=$<br>$=\sqrt[\varrho]{a}\sqrt[\varrho]{b}\ldots\sqrt[\varrho]{l}$ | — корень из произведения сомножителей равен произведению корней из этих же сомножителей; |

$\sqrt[q]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}$ — корень из частного равен частному корней из делимого и делителя;

$\sqrt[q]{a}=\sqrt[qk]{a^k}$ — подкоренное число можно возвести в любую степень $k$, умножив на это же число $k$ показатель корня (величина корня от этого не изменится).

*Замечание.* Если рассматривать не только арифметические корни, то приведенные выше формулы приводят к абсурдным соотношениям. Например:

$$2=\sqrt{4}=\sqrt{(-2)(-2)}=\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}=(\sqrt{-2})^2=-2;$$

$$\frac{2}{3}=\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\sqrt[4]{\frac{(-2)^4}{3^4}}=-\frac{2}{3};$$

$$-2=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[6]{64}=2.$$

**4.3. Вынесение множителя из-под радикала.** Если $a$ и $b$ — положительные числа, то

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.$$

Эта формула применяется как слева направо, так и справа налево. При использовании ее нужно помнить, что для любых $n$ она верна лишь при положительных $a$ и $b$, а при нечетных $n$ формула верна для любых действительных $a$ и $b$. Поэтому нельзя писать, например,

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b},$$

а следует писать

$$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b},$$

т. е.

$$\sqrt{a^2b}=\begin{cases} a\sqrt{b}, & \text{при } a\geqslant 0,\\ -a\sqrt{b}, & \text{при } a<0.\end{cases}$$

**4.4. Исключение иррациональности в дроби.**

*Первый случай.* В знаменателе стоит радикал $\frac{A}{\sqrt[n]{a}}$. Умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[n]{a^{n-1}}=\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$, получим $\frac{A\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$.

*Второй случай.* В знаменателе стоит алгебраическая сумма, причем, по крайней мере, одно из слагаемых — радикал:

а) $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

в) $\frac{A}{a+\sqrt{b}}$; г) $\frac{A}{a-\sqrt{b}}$.

В этих случаях умножаем числитель и знаменатель на соответствующие сопряженные выражения:

а) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; б) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; в) $a-\sqrt{b}$; г) $a+\sqrt{b}$.

Если число слагаемых больше двух, то исключение иррациональности производится последовательно:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{A}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}}=$$
$$=\frac{A[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}=$$
$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

**Пример 1.** Преобразовать выражение $\dfrac{x^3}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

Умножая числитель и знаменатель на $2-\sqrt{4-x^2}$, получим

$$\frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{(2+\sqrt{4-x^2})(2-\sqrt{4-x^2})}=\frac{x^3(2-\sqrt{4-x^2})}{x^2}=x(2-\sqrt{4-x^2}).$$

**Пример 2.** Преобразовать выражение $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{2}-1$, получим

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}=3-2\sqrt{2}.$$

При вычислении пределов приходится умножать на сопряженное выражение и числитель дроби, а иногда числитель и знаменатель одновременно.

**Пример 3.** Для вычисления предела

$$\lim_{x\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}$$

нужно числитель и знаменатель умножить на $(3+\sqrt{x^2-7})(2+\sqrt{8+x})$:

$$\lim_{x\to -4}\frac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}=$$
$$=\lim_{x\to -4}\left(\frac{3^2-(x^2-7)}{2^2-(8+x)}\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to -4}\left(-\frac{16-x^2}{4+x}\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to -4}(x-4)\frac{2+\sqrt{8+x}}{3+\sqrt{x^2-7}}=-\frac{32}{6}=-\frac{16}{3}.$$

**4.5. Формула сложного радикала.**

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+m}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-m}{2}},$$

где $m = \sqrt{A^2 - B}$, $(A > 0,\ B > 0,\ A^2 > B)$.

Знаки в правой и левой частях выбирают соответственно.

**Пример.** Преобразовать выражение $\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}$.

По формуле сложного радикала

$$\sqrt{9-\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{81-17}}{2}} - \sqrt{\frac{9-\sqrt{81-17}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{9+8} - \sqrt{9-8}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{17} - 1);$$

$$\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1).$$

## Многочлены

**4.6. Определения. Действия над многочленами.** *Одночленом* относительно данных букв называется произведение, составленное из числового множителя (*коэффициента*) и одной или нескольких из этих букв, взятых в натуральной степени.

**Примеры.**

$$7ab^2c^5;\ \frac{7}{5}x^3z;\ -5cz^2n;\ -b;\ 6{,}8;\ \sqrt{2}\,ax^5.$$

*Замечание.* Числа также причисляются к одночленам. В элементарной алгебре обычно рассматриваются любые действительные коэффициенты.

*Многочленом* (или *целым* алгебраическим выражением) относительно данных букв называется алгебраическая сумма нескольких одночленов относительно этих букв. Каждый из входящих в многочлен одночленов называется *членом многочлена.*

Одночлен можно рассматривать как частный случай многочлена, состоящего из одного члена. Многочлен, составленный из двух или трех членов, называется соответственно *двучленом* или *трехчленом.*

Члены многочлена, либо равные, либо отличающиеся только коэффициентами, называются *подобными.*

*Приведением подобных* членов называется замена нескольких подобных членов одним, коэффициент которого равен алгебраической сумме их коэффициентов.

**Пример.**

$$\underline{x^2} - \underline{\underline{4xy}} + \underline{\underline{3a^2}} + \underline{\underline{8xy}} - \underline{\underline{5a^2}} - \underline{x^2} - 2yz =$$

$$= 4xy - 2a^2 - 2yz.$$

Мы будем рассматривать лишь многочлены вида

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0),$$

где $n$ — натуральное число, называемое *степенью многочлена.*

*Сложение многочленов* — образование нового многочлена, включающего все одночлены складываемых многочленов.

Чтобы *вычесть* многочлен из многочлена, надо к членам уменьшаемого прибавить члены вычитаемого, взятые с противоположными знаками.

При *умножении (делении)* многочлена на одночлен следует каждый член многочлена умножить (разделить) на этот одночлен и результаты сложить:

$$(x^2+2x-3)ax=ax^3+2ax^2-3ax.$$

*Произведение многочленов* определяется как сумма произведений одного многочлена на каждый одночлен другого:

$$(x^2+x+a)(bx+c)=(x^2+x+a)bx+(x^2+x+a)c=$$
$$=bx^3+bx^2+abx+cx^2+cx+ac=bx^3+(b+c)x^2+$$
$$+(ab+c)x+ac.$$

**4.7. Формулы сокращенного умножения и деления.**

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ — квадрат суммы;

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ — квадрат разности;

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc;$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ — куб суммы;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ — куб разности;

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ — разность квадратов;

$(a+b)(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$ — произведение двучленов;

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$ — преобразование произведения;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ — сумма кубов;

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ — разность кубов;

$a^4+b^4=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)$ — сумма четвертых степеней;

$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ — разность четвертых степеней;

$a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1);$

$a^6-1=(a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1).$

**4.8. Деление многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.** Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ — значит найти многочлены $M(x)$ (частное) и $N(x)$ (остаток) такие, что при всех $x$

$$P(x)=M(x)Q(x)+N(x),$$

причем степень многочлена $N(x)$ ниже степени $Q(x)$.

**Пример.**

$$
\begin{array}{r|l}
8x^4 - 3x^2 + 6x + 4 & 2x^2 + 3x + 1 \\
\hline
8x^4 + 12x^3 + 4x^2 & 4x^2 - 6x + \frac{11}{2} \\
\hline
-12x^3 - 7x^2 + 6x & \\
-12x^3 - 18x^2 - 6x & \\
\hline
11x^2 + 12x + 4 & \\
11x^2 + \frac{33}{2}x + \frac{11}{2} & \\
\hline
-\frac{9}{2}x - \frac{3}{2} &
\end{array}
$$

Здесь

$$P(x) = 8x^4 - 3x^2 + 6x + 4,\ Q(x) = 2x^2 + 3x + 1;$$

$$M(x) = 4x^2 - 6x + \frac{11}{2};$$

$$N(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(3x + 1).$$

Часто приходится делить многочлен на двучлен $x - a$. В этом случае удобно пользоваться схемой сокращенного деления *(схемой Горнера)*.

Пусть требуется разделить многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ на $x - a$. Составляем таблицу коэффициентов при $x$, располагая их в порядке убывания степеней (если некоторые степени отсутствуют, то за соответствующий коэффициент принимаем нуль);

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | $\cdots$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b_{n-1} = a_n$ | $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$ | $b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}$ | $\cdots$ | $N = a_0 + ab_0$ |

Перед таблицей записываем значение $a$ из заданного двучлена. Нижнюю строку таблицы заполняем по следующему правилу: значение первого коэффициента переписываем; в каждой следующей клетке записываем число, равное сумме коэффициента, стоящего над ним, и произведения коэффициента, расположенного перед таблицей, на число, находящееся в соседней слева клетке. В $n$ первых клетках мы получаем коэффициенты частного, расположенные в порядке убывания степеней буквы $x$; в $(n + 1)$-й клетке получаем остаток от деления.

**Пример.** Найти $(2x^4 + 3x^2 + x - 5) : (x + 2)$.

Здесь $a = -2$. Составляем таблицу:

| | 2 | 0 | 3 | 1 | −5 |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | 2 | −4 | 11 | −21 | 37 |

Таким образом, мы получили частное $2x^3 - 4x^2 + 11x - 21$ и остаток 37:

$$2x^4 + 3x^2 + x - 5 = (2x^3 - 4x^2 + 11x - 21)(x + 2) + 37.$$

Остаток от деления многочлена на двучлен можно найти, не производя деления, пользуясь теоремой Безу.

Теорема Безу. *Многочлен* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ *при делении на* $x - a$ *дает остаток, равный значению многочлена при* $x = a$.

**Пример.** Не производя деления, найти остаток

$$(2x^4 + 3x^2 + x - 5):(x + 2).$$

Подставляя в делимое $x = -2$, найдем: $2\cdot(-2)^4 + 3\cdot(-2)^2 + (-2) - 5 = 37$. Кстати, мы убедились в том, что в вычислениях предыдущего примера не допущена ошибка.

**4.9. Разложение многочлена на множители.** Если многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ удается представить в виде произведения других многочленов, то говорят, что данный многочлен разложен на множители.

Если при $x = \alpha$ многочлен обращается в нуль, то число $\alpha$ называют *корнем* этого многочлена. Каждый многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ может быть представлен в виде

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\ldots(x - \alpha_r)^{k_r},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — комплексные корни многочлена; $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — кратности корней, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Число $\alpha_i$ является корнем кратности $k_i$ многочлена $P(x)$.

Если комплексное число $a + bi$ является корнем многочлена с *действительными* коэффициентами, то корнем этого многочлена обязательно будет и число $a - bi$, комплексно-сопряженное с первым.

Отсюда следует, что каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = \\ = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k) \times \\ \times(x^2 + p_1x + q_1)\ldots(x^2 + p_lx + q_l), \end{aligned}$$

где $\alpha_i$, $p_i$, $q_i$ — действительные числа. (Среди множителей могут встретиться одинаковые.)

**Примеры.**

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

2. $6x^3 + 17x^2 - 5x - 6 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3) = (2x + 1)(3x - 2)(x + 3)$.

3. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 1)^2(x^2 + 2)$.

В первом и втором примерах все корни кратности единица. В третьем примере $x = -1$ — корень кратности два.

Приемы разложения многочлена на множители.

1. *Вынесение за скобки.* Если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки.

**Пример.** $7a(x+2) + 4ab(x+2) = a(x+2)(7+4b)$.

2. *Способ группировки.* Члены многочлена соединяют в группы, имеющие одинаковые множители.

**Пример.**

$$12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$$
$$= 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) =$$
$$= (3 - x)(2 - x)(2 + x).$$

3. Иногда полезно ввести *вспомогательные члены* или *разложить* какой-либо член на подобные слагаемые.

**Пример.**

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$$
$$= x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3).$$

**4.10. Условие равенства многочленов. Восстановление многочлена по его корням.** Два многочлена равны тогда и только тогда, если их коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Это свойство положено в основу *метода неопределенных коэффициентов* (см. также п. 4.14).

Если дан многочлен с неизвестными коэффициентами, то каждый корень этого многочлена позволяет получить линейное уравнение, связывающее коэффициенты.

**Пример.** У многочлена $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$ есть двукратный корень $-1$ и корень 2. Найти $a$, $b$, $c$.

*Первый способ.* Обозначим неизвестный корень многочлена через $\alpha$. Тогда

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = (x-2)(x-1)^2(x-\alpha),$$

т. е.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3 = x^4 - \alpha x^3 - 3x^2 + (3\alpha - 2)x + 2\alpha.$$

Воспользовавшись условием равенства двух многочленов, получим

$$a = -\alpha,\ b = -3,\ c = 3\alpha - 2,\ 3 = 2\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \frac{3}{2},\ a = -\frac{3}{2},\ b = -3,\ c = \frac{5}{2}.$$

*Второй способ.* Подставляя $x = 2$ и $x = -1$, получим два уравнения:

$$8a + 4b + 2c + 19 = 0,$$
$$-a + b - c + 4 = 0.$$

Так как $-1$ — двукратный корень, то данный многочлен можно дважды последовательно разделить на $x+1$. После первого деления, которое можно выполнить углом или по схеме Горнера, получим частное

$$x^3+(a-1)x^2+(b-a+1)x+(c-b+a-1).$$

Корнем полученного в частном многочлена снова является $x=-1$. Таким образом, получаем третье уравнение

$$3a-2b+c-4=0.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 8a+4b+2c+19=0, \\ -a+b-c+4=0, \\ 3a-2b+c-4=0, \end{cases}$$

находим:

$$a=-\frac{3}{2},\ b=-3,\ c=\frac{5}{2}.$$

**4.11. Симметрические многочлены.** Многочлен от $x$ и $y$ называется *симметрическим,* если он не изменяется при замене $x$ на $y$, а $y$ на $x$.

Многочлены $x^2+y^2$, $x^2y+xy^2$, $x^2+xy+y^2$ — симметрические. Многочлены $x-y$, $x^2-y$ не являются симметрическими.

Простейшие симметрические многочлены: $x+y$ и $xy$. Для них вводят специальные обозначения:

$$x+y=u,\ xy=v.$$

Имеет место следующая теорема: *любой симметрический многочлен от $x$ и $y$ можно представить в виде многочлена от $u$ и $v$.*

Чтобы научиться находить такое представление для любого симметрического многочлена от $x$ и $y$, достаточно уметь выражать через простейшие многочлены $u$ и $v$ выражения вида $s_n=x^n+y^n$:

$$\begin{aligned} s_1&=x+y=u, \\ s_2&=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v, \\ s_3&=x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)= \\ &=(x+y)[(x+y)^2-3xy]=u(u^2-3v). \end{aligned}$$

Составим выражение

$$us_{k-1}=(x+y)(x^{k-1}+y^{k-1}).$$

Раскрыв скобки, найдем

$$us_{k-1}=x^k+y^k+xy(x^{k-2}+y^{k-2})=s_k+vs_{k-2}.$$

В результате получено простое соотношение

$$s_k=us_{k-1}-vs_{k-2},$$

которое позволяет последовательно вычислять $s_n$:

$$s_4 = us_3 - vs_2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$
$$s_5 = us_4 - vs_3 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$$

и т. д.

## Алгебраические дроби

**4.12. Определение. Свойства.** Выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где в числителе и знаменателе стоят многочлены, называется *алгебраической дробью.*

Алгебраическая дробь удовлетворяет всем свойствам обыкновенной дроби (см. п. 2.1), ее можно сокращать и расширять (умножать числитель и знаменатель на одно и то же выражение); две алгебраические дроби можно сравнивать и т. д.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют общие корни $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_k$, то алгебраическую дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сократить на произведение $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_k)$. Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка, мы получим целое алгебраическое выражение.

Если рассматривать только дроби, в которых уже произведено сокращение, то о дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно сказать, что она принимает числовые значения при всех $x$, для которых $Q(x) \neq 0$.

Когда знаменатель дроби обращается в нуль, дробь не имеет смысла.

*Замечание.* Вообще говоря, сокращение дроби на $x - \alpha$ возможно лишь при $x \neq \alpha$, так как делить на нуль нельзя. Мы не оговариваем это специально и рассматриваем в качестве значения дроби лишь $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{P(x)}{Q(x)}$, который равен числу, если кратность корня $\alpha$ для $P(x)$ не меньше кратности корня $\alpha$ для $Q(x)$, и бесконечности в противном случае.

**4.13. Действия с алгебраическими дробями.** *Сложение и вычитание.*

1. Если знаменатели складываемых или вычитаемых дробей не имеют общих множителей, то поступают так:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)},$$

т. е. за общий знаменатель принимают произведение данных знаменателей.

2. Если знаменатели имеют общий множитель $r(x)$, т. е. могут быть представлены в виде $Q_1(x) = r(x)q_1(x)$, $Q_2(x) = r(x)q_2(x)$, то

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{1}{r(x)}\left(\frac{P_1(x)}{q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{q_2(x)}\right) =$$
$$= \frac{1}{r(x)}\left(\frac{P_1(x)q_2(x) \pm P_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}\right).$$

3. Когда разложение знаменателей на множители слишком трудоемко, то поступают так же, как и в первом случае.

*Замечание 1.* Во всех случаях после выполнения действий нужно попытаться сократить дробь, полученную в результате.

*Замечание 2.* Вместо разложения знаменателей на множители можно попытаться найти их наибольший общий делитель по схеме Евклида (см. п. 1.8). При этом в качестве первого делимого берется знаменатель с большей степенью (при равных степенях выбирается любой). Если на некотором этапе деления в остатке появится постоянная, то $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ не имеют общих целых делителей, отличных от константы.

*Умножение и деление.*

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)};$$
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x)}{Q_1(x)P_2(x)}.$$

Перед тем как почленно перемножить многочлены в числителе и знаменателе, нужно, если это возможно, сократить полученные дроби.

**4.14. Разложение на простейшие дроби.** Часто бывает удобно представить алгебраическую дробь в виде суммы дробей с простейшими действительными знаменателями. Так как знаменатель может быть разложен в произведение множителей первой и второй степени, уже не разложимых дальше, то рассмотрим на конкретных примерах четыре возможных случая.

Разложение осуществляется с помощью *метода неопределенных коэффициентов.*

*Первый случай.* В разложение знаменателя алгебраической дроби входят только множители первой степени и ни один из них не повторяется.

**Пример.** Алгебраическую дробь $\dfrac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4}$ разложить на простейшие.

Так как $x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$,

то попытаемся разложить данную дробь на простейшие вида

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} =$$
$$= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2}, \qquad (1)$$

где постоянные $A$, $B$, $C$ и $D$ найдем с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Приведем правую часть равенства (1) к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2). \quad (2)$$

Равенство (2) справедливо при любых значениях $x$, т. е. должно выполняться тождественно. Поэтому мы выбираем столько значений $x$, сколько у нас имеется неизвестных коэффициентов, и из (2) получим уравнения (в данном случае их четыре) для определения $A$, $B$, $C$, $D$:

$x = -1$ | $4 = A(-2)(+1)(-3) + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 0$, откуда $A = \frac{2}{3}$;

$x = 1$ | $2 = A\cdot 0 + B\cdot 2\cdot 3\cdot(-1) + C\cdot 0 + D\cdot 0$, откуда $B = -\frac{1}{3}$;

$x = -2$ | $8 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C(-1)(-3)(-4) + D\cdot 0$, откуда $C = -\frac{2}{3}$,

$x = 2$ | $4 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D\cdot 3\cdot 1\cdot 4$, откуда $D = \frac{1}{3}$.

Значения $x = -1, 1, -2, 2$ выбраны потому, что они обращают в нуль максимальное число членов в правой части (2) и дают поэтому наиболее простые уравнения.

Мы получили следующее разложение:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

*Второй случай.* В разложение знаменателя входят только множители первой степени и некоторые из них повторяются. В этом случае в правой части берутся слагаемые, содержащие последовательные степени линейных множителей знаменателя от первой до показателя кратности включительно.

**Пример.** Алгебраическую дробь $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}$ разложить на простейшие.

Так как знаменатель дроби содержит двукратный множитель $x+2$, то этому множителю будет соответствовать столько членов в правой части, какова его кратность (в данном случае два члена):

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \quad (3)$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^2 = A(x+2)^2 + B_1(x+1)(x+2) + B_2(x+1).$$

Давая $x$ значения $-1$, $-2$, $0$, получим уравнения:

$x = -1$ $\quad 1 = A$,

$x = -2$ $\quad 4 = -B_2$, $\quad$ откуда $B_2 = -4$,

$x = 0$ $\quad 0 = 4A + 2B_1 + B_2$, $\quad$ откуда $B_1 = 0$.

Итак,

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

*Третий случай.* В разложение знаменателя алгебраической дроби входят множители второй степени (не разложимые на вещественные множители первой степени) и ни один из них не повторяется. В правой части берется сумма дробей, знаменатель каждой из которых является натуральной степенью неразложимого далее в области вещественных чисел выражения. При этом степеням линейных выражений соответствуют постоянные числители ($A$, $B$, $C$), а степеням неразложимых квадратных трехчленов — линейные числители $Lx + M$.

**Пример.** Алгебраическую дробь $\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}$ разложить на простейшие.

Найдем разложение в виде

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество

$$x^3+4x^2+6 = A_1(x+1)(x^2+2) + A_2(x^2+2) + \\ + (Bx+C)(x+1)^2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ слева и справа:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = A_1 + B, \\ x^2 & 4 = A_1 + A_2 + 2B + C, \\ x^1 & 0 = 2A_1 + B_1 + 2C, \\ x^0 & 6 = 2A_1 + 2A_2 + C. \end{array}$$

Решая эту систему четырех уравнений, найдем:

$$A_1 = \frac{1}{3},\ A_2 = 3,\ B = \frac{2}{3},\ C = -\frac{2}{3},$$

т. е.

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Заметим, что приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях здесь удобнее, чем выбор определенных значений $x$, так как лишь $x = 1$ позволяет получить удобное уравнение; при остальных значениях $x$ ни один член в правой части не обратится в нуль.

*Четвертый случай.* Те же условия, что и в случае 3, только множители второй степени могут повторяться. Речь идет о том, что в разложение знаменателя входят множители вида $(ax^2 + bx + c)^n$. В этом случае

каждому множителю будут соответствовать $n$ слагаемых в правой части:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

**Пример.** Алгебраическую дробь $\dfrac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$ разложить на простейшие.

Правая часть разложения должна иметь вид

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1x+C_1}{1+x^2}+\frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$3x+1=A(1+x^2)^2+(B_1x+C_1)x(1+x^2)+(B_2x+C_2)x.$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ слева и справа, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+B_1=0, \\ x^3 & C_1=0, \\ x^2 & 2A+B_1+B_2=0, \\ x^1 & C_1+C_2=3, \\ x^0 & A=1, \end{array}$$

решая которую найдем:

$$A=1,\ B_1=-1,\ C_1=0,\ B_2=-1,\ C_2=3.$$

Итак, мы получили разложение

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{(1+x^2)^2}.$$

## 5. УРАВНЕНИЯ

### Общие сведения

**5.1. Равенство. Тождество. Уравнение.** Два математических выражения (числовые или буквенные), соединенные знаком «=», образуют *равенство.*

Равенство может быть *либо верным* (истинным), либо *неверным* (ложным): $5=5$, $10:5=2$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $\sin(\pi/6)=1/2$ — верные равенства; $3=1$, $a^2+b^2=-7$ — неверные равенства. Если написано любое числовое равенство, то о нем *всегда* можно сказать, верно оно или нет. Верное числовое равенство называется *числовым тождеством.* Про буквенное (символическое) равенство не всегда можно определенно сказать, верно оно или нет. При одних значениях входящих в него букв оно может быть верным, при других — неверным.

Может случиться, что при некоторых значениях букв одно из вы-

ражений, соединенных знаком равенства, или оба эти выражения бессмысленны. Тогда само равенство считается неверным.

Например, равенство $\frac{a}{b+1}=3b$ верно при $b=1$ и $a=6$, неверно при $b=1$ и $a=5$, а также при $b=-1$ и любом $a$.

Множество значений букв, при которых обе части равенства существуют, называется *областью существования* равенств или *областью допустимых значений* входящих в него букв.

*Тождеством* называется равенство, справедливое при всех значениях входящих в него букв, при которых обе его части существуют.

Таким образом, тождество при подстановке вместо входящих в него букв их значений может обратиться либо в верное числовое равенство, либо в равенство, не имеющее смысла.

**Примеры.**

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.
3. $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$.
4. $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тождества 1 и 2 верны при всех значениях входящих в них букв. Тождество 3 становится неверным при $a=b$: левая часть его не существует, а правая существует. Тождества 4 и 5 теряют смысл при $\alpha=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Однако у тождества 5 при этих значениях $\alpha$ перестают существовать обе части, в то время как у тождества 4 — только правая часть.

Приведенному определению тождества удовлетворяет и равенство $\sqrt{x}=\sqrt{-x}$, область допустимых значений которого — единственная точка $x=0$.

Разобранные примеры показывают, что понятие тождества не содержит в себе утверждения об эквивалентности его правой и левой частей.

*Применить тождество* — значит заменить в некотором равенстве выражение, стоящее в левой части тождества, выражением, стоящим в правой его части. В результате применения тождества к равенству область допустимых значений, входящих в равенство букв, может сузиться, расшириться или остаться без изменения. Например, тождества 1, 2 и 5 оставляют область допустимых значений входящих в равенство букв без изменения, тождество 3 расширяет область значений, а тождество 4 сужает. В более сложных случаях область допустимых значений входящих в равенство букв может измениться более существенно: некоторые значения будут приобретены, а некоторые потеряны.

Целесообразно выделить тождества, применение которых не изменяет области допустимых значений входящих в равенство букв. Это будут тождества, в которых левая и правая части либо всегда существуют, либо перестают существовать одновременно. Такие тождества будем называть *абсолютными*. В приведенных выше примерах абсолютными являются тождества 1, 2 и 5.

Если в равенстве некоторые буквы объявлены *неизвестными* и поставлена задача найти упорядоченную совокупность значений неизвестных, при которых это равенство обращается в числовое тождество, то такое равенство называется *уравнением*. О найденной упорядоченной совокупности значений неизвестных говорят, что она удовлетворяет уравнению и называют *решением* этого уравнения.

*Решить уравнение* — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

**5.2. Системы и совокупности уравнений.** Несколько уравнений образуют *систему*, если все они должны удовлетворяться одновременно. Множество решений системы уравнений получается как пересечение (см. п. 10.1) множеств решений каждого из уравнений системы: из решений, например, первого уравнения оставляют все те, которые удовлетворяют второму, из них оставляют все те, которые удовлетворяют третьему, и т. д.

Чтобы показать, что уравнения образуют систему, их объединяют слева фигурной скобкой. Пусть, например, задана система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ а решение второго уравнения $\begin{cases} x=k, \\ y=-k, \end{cases}$ где $k$ — любое вещественное число. Решением системы будет $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ Несколько уравнений образуют *совокупность*, если должно удовлетворяться хотя бы одно из этих уравнений. Множество решений совокупности уравнений получается как объединение (см. п. 10.1) множеств решений всех уравнений, входящих в совокупность: к решениям первого уравнения добавляют решение второго, третьего и т. д. Совокупность уравнений удобно записывать в строку. Например,

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Корни первого уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Корни второго уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Решение совокупности уравнений: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

### 5.3. Классификация уравнений.

1. Уравнение называется *алгебраическим*, если над неизвестными не совершается иных действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

В противном случае уравнение называется *трансцендентным*. К трансцендентным уравнениям относятся логарифмические, показательные, тригонометрические и т. д.

Алгебраические уравнения подразделяются на три типа:

1) *целое алгебраическое уравнение* (обе его части — целые алгебраические выражения (см. п. 4.6) относительно неизвестных). Например:

$$(x-\sqrt{5})(x-\pi)=(x+1)(x+4),$$

$$x^4+\frac{2}{5}x^2-1=0;$$

2) *дробное (рациональное) алгебраическое уравнение* (содержит в знаменателе выражение, зависящее от неизвестных). Например:

$$\frac{x-\sqrt{2}}{x}=\frac{x^2-1}{x+3}-x;$$

3) *иррациональное уравнение* (содержит под знаком корня выражение, зависящее от неизвестных). Например:

$$\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2.$$

Решение дробных и иррациональных уравнений может быть сведено к решению целых уравнений (см. п. 5.12 и 5.13).

2. По числу неизвестных уравнения подразделяются на уравнения с *одним* неизвестным, с *двумя*, с *тремя* и т. д.

3. Целое алгебраическое уравнение с одним неизвестным всегда можно преобразовать в равносильное уравнение (см. ниже) вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0.$$

*Степенью* исходного уравнения при этом называется степень полученного в левой части многочлена.

Уравнения первой степени называются иначе *линейными*, уравнения второй степени — *квадратными*, уравнения третьей степени — *кубическими*.

**5.4. Равносильность уравнений.** Два уравнения называются *равносильными* (в данной области чисел), если каждое решение первого уравнения является решением второго, и обратно: каждое решение второго уравнения является решением первого*.

Другими словами, равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений, принадлежащих данной области чисел.

Если всякое решение первого уравнения является решением вто-

---

* Все в границах данной области чисел.

рого, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. Следствие, однако, может иметь такие решения, которые не являются решениями первого уравнения.

Например, уравнения $x-1=0$ и $(x-1)(x^2+1)=0$ равносильны в области вещественных чисел. В области же комплексных чисел второе имеет корни $x_1=1$, $x_2=i$, $x_3=-i$ и является следствием первого уравнения, у которого один корень $x=1$.

Чтобы доказать, что два уравнения равносильны, достаточно доказать, что каждое из них является следствием другого.

В процессе решения применяются тождества и алгебраические преобразования, позволяющие на каждом шаге заменить данное уравнение либо равносильным уравнением (это может быть система или же совокупность, куда входят неравенства), либо следствием. Решение уравнения состоит в последовательности таких шагов, приводящей уравнение к простейшему виду, когда слева стоит неизвестное, а справа — выражение, не содержащее неизвестных. Если все преобразования исходного уравнения были равносильными, то найденные значения неизвестного образуют в совокупности решения данного уравнения. Если же при преобразованиях имел место переход к следствию, то решение уравнения еще не закончено.

При замене уравнения его следствием ни один корень не пропадает, но могут появиться посторонние корни. Поэтому после того как найдены корни следствия, каждый из них следует проверить, подставив в исходное уравнение, и взять лишь те из них, которые ему удовлетворяют.

Преобразования, приводящие к равносильным уравнениям.

1. Прибавление к обеим частям уравнения или вычитание из обеих частей его одного и того же выражения, всегда имеющего смысл.

*Замечание.* Если к обеим частям уравнения $x-1=0$ прибавить выражение $\frac{1}{x-1}$, то получим уравнение

$$x-1+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1},$$

не равносильное исходному. У первого уравнения корень $x=1$, а у второго уравнения корней нет.

2. Перенесение выражения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

У всех членов уравнения можно одновременно поменять знаки на противоположные.

3. Если уравнение приводится к виду $F(x)\,G(x)=0$, то оно равносильно совокупности двух систем.

$$\begin{cases} F(x)=0, \\ G(x) \text{ существует}; \end{cases} \qquad \begin{cases} G(x)=0, \\ F(x) \text{ существует}, \end{cases}$$

где каждая система состоит из уравнения и условия.

**Пример.** Уравнение $\operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} x=0$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x=0, \\ \operatorname{ctg} x \quad \text{существует, т. е.} \quad \sin x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x=0, \\ \operatorname{tg} 2x \text{ существует, т. е. } \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Решая уравнение $\operatorname{tg} 2x=0$, найдем $2x=k\pi$, $x=k\pi/2$, $\operatorname{ctg}(k\pi/2)$ существует для нечетных $k=2n+1$ и не существует для четных $k=2n$. Таким образом, решение первой системы:

$$x=(2n+1)\pi/2.$$

Решая уравнение $\operatorname{ctg} x=0$, найдем $x=(2n+1)\pi/2$; $\operatorname{tg}(2(2n+1)\pi/2)=\operatorname{tg}((2n+1)\pi)=0$, т. е. существует.

Обе системы имеют одинаковые решения. Поэтому решением совокупности систем будет $x=(2n+1)\pi/2$.

4. Уравнение $F^2(x)=G^2(x)$ равносильно совокупности двух уравнений $F(x)=G(x)$; $F(x)=-G(x)$.

**Примеры.**

1. $x^2=(x^2-2)^2$;
   а) $x=x^2-2$, $x^2-x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-1$;
   б) $-x=x^2-2$, $x^2+x-2=0$, $x_3=1$, $x_4=-2$.
2. $[\lg(x-3)]^2=1$;
   а) $\lg(x-3)=1$, $x-3=10$, $x_1=13$;
   б) $\lg(x-3)=-1$, $x-3=0{,}1$, $x_2=3{,}1$.

Преобразования, приводящие к следствию данного уравнения.

1. Переход от уравнения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ к уравнению $P(x)=0$.

2. Возведение обеих частей уравнения в четную положительную степень с одним и тем же показателем.

3. Переход от уравнения $F(x)G(x)=0$ к совокупности уравнений $F(x)=0$, $G(x)=0$.

4. Переход от уравнений типа $\log f(x)+\log g(x)=\log\varphi(x)$, $\log f(x)-\log g(x)=\log\varphi(x)$, $k\log f(x)=\log\varphi(x)$ соответственно к уравнениям

$$\log[f(x)g(x)]=\log\varphi(x),\ \log\frac{f(x)}{g(x)}=\log\varphi(x),\ \log[f(x)]^k=\log\varphi(x).$$

5. Переход от уравнения $\log f(x)=\log\varphi(x)$ к уравнению $f(x)=\varphi(x)$.

**Примеры.**

1. Заменим уравнение $\frac{x^3+3x+2}{x+1}=0$ его следствием: $x^2+3x+2=0$, корни которого $x_1=-2$, $x_2=-1$. Проверкой убеждаемся, что $x_2=-1$ — посторонний корень. Ответ. $x=-2$.

2. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x-3}=0$. Перенеся один радикал вправо и возведя обе части в квадрат, найдем

$$x+1=x^2+x-3, \text{ т. е. } x^2-4=0,$$
$$x_1=-2, \quad x_2=2.$$

Проверкой убеждаемся, что первый корень посторонний. Ответ. $x=2$.

3. Уравнение $(x+3)\lg x=0$ заменяем совокупностью:

$$x+3=0, \quad \lg x=0,$$

т. е.

$$x_1=-3, \quad x_2=1.$$

Сделав проверку, убеждаемся, что первый корень посторонний. Ответ. $x=1$.

4. Уравнение $\lg(x+2)+\lg(3-x)=\lg(2x-14)$ после потенцирования примет вид:

$$(x+2)(3-x)=2x-14, \text{ или } x^2+x-20=0,$$

откуда

$$x_1=-4, \quad x^2=5.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня посторонние. Ответ. Данное уравнение не имеет корней.

Преобразование систем уравнений. Каждое уравненне системы можно преобразовать так, чтобы в результате получилось либо равносильное ему уравнение, либо следствие. В ряде случаев переход к следствию вызывает много дополнительных вычислений, поэтому при решении систем следует по возможности сохранять равносильность.

Кроме того, каждую систему можно преобразовать следующим образом:

1. Решить одно уравнение системы относительно одного из неизвестных и заменить это неизвестное в остальных уравнениях найденным выражением. Этот прием называется *методом исключения*.

2. К любому из уравнений системы можно прибавить любое другое, умноженное на любое действительное число $\alpha$. Благодаря этому часто можно также исключить некоторые неизвестные или привести систему к более удобному виду.

Если осуществляется переход к системам, являющимся следствием исходной системы, а равносильность не доказана, то проверка логически необходнма.

Систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,\ y)G_1(x,\ y)=0, \\ F_2(x,\ y)G_2(x,\ y)=0 \end{cases}$$

можно заменить совокупностью четырех систем:

$$\begin{cases} F_1=0, \\ F_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} F_1=0, \\ G_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} G_1=0, \\ F_2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} G_1=0, \\ G_2=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, мы в общем случае получим следствие исходной системы, поскольку не вошедшие в каждую систему математические выражения могут не существовать для тех значений неизвестных, которые удовлетворяют двум уравнениям, образующим систему.

**Пример.** Система

$$\begin{cases} (x+y-2)\,(y+2)=0, \\ (x-y)(x+1)=0 \end{cases}$$

равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ x-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-2=0, \\ x+1=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+2=0, \\ x-y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y+2=0, \\ x+1=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, найдем:

$$(1,1);\ (-1,3);\ (-2,\ -2);\ (-1,\ -2).$$

Использование тождеств. Решая уравнение

$$2\sin 2x-3\cos 2x=3$$

с помощью тождеств

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x},\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}, \tag{1}$$

получим

$$\frac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}-\frac{3-3\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=3.$$

Знаменатель нигде не обращается в нуль. Поэтому последнее уравнение можно заменить таким:

$$4\operatorname{tg}x-3+3\operatorname{tg}^2x=3+3\operatorname{tg}^2x,$$

откуда

$$\operatorname{tg}x=\frac{3}{2},\quad x=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+k\pi.$$

Хотя на первый взгляд кажется, что уравнение решено правильно, легко проверить, что $x=\pi(2k+1)/2$ — корни первоначального уравнения, которые мы потеряли в процессе решения.

Потеря корней произошла потому, что тождества (1) сужают область возможных значений неизвестного. Действительно, левые части этих тождеств существуют при всех $x$, в то время как правые части перестают существовать при $x = \pi(2k+1)/2$. Именно эти значения $x$ и были потеряны при замене, а они оказались корнями исходного уравнения.

При решении уравнений можно пользоваться только теми тождествами, которые либо сохраняют область возможных значений неизвестного, либо расширяют ее.

Если все-таки пришлось применить тождество, сужающее область возможных значений неизвестного, то все значения $x$, которые принадлежали области возможных значений левой части тождества и не попали в область возможных значений его правой части, нуждаются в специальной проверке.

В разобранном примере сразу же после использования тождеств (1) значения $x = \pi(2k+1)/2$ нужно было проверить, подставив их в исходное уравнение.

**Пример.** Тождества

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

не равноценны. Первая замена может привести к потере корней, так как левая часть перестает существовать при $\cos(x/2)=0$, а правая при $\sin x=0$, т. е. и при $\sin(x/2)=0$ и при $\cos(x/2)=0$. Поэтому значения $x$, при которых $\sin(x/2)=0$, нуждаются в отдельной проверке.

Вторая замена не приводит к потере корней, так как и правая и левая части перестают существовать одновременно при $\cos(x/2)=0$.

Если использование тождества

$$\log x + \log y = \log xy$$

приводит к расширению области возможных значений неизвестного, то замена

$$\log x + \log y = \log xy$$

может привести к потере корней. Действительно, левая часть тождества существует, когда $x$ и $y$ оба положительны или оба отрицательны, в то время как правая часть существует только при положительных $x$ и $y$. Поэтому при логарифмировании можно воспользоваться заменой

$$\log xy = \log|x| + \log|y|,$$

которая расширяет область возможных значений неизвестного, а не сужает ее. После такой замены проверка обязательна, так как могут появиться решения, при которых $x$ и $y$ разных знаков, т. е. левая часть перестает существовать (см. п. 8.2).

То же самое следует сказать и о преобразовании корня из произведения $\sqrt{xy}$ и аналогичных ему выражений. Здесь возможна замена:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|},$$

которая расширяет область возможных значений неизвестного. Решение следует закончить проверкой.

## Алгебраические уравнения с одним неизвестным

Прежде чем приступить к решению алгебраического уравнения, его следует сначала преобразовать по следующей схеме:

1) освободить обе части уравнения от дробей*;

2) раскрыть скобки, в которых содержится неизвестное**;

3) все члены перенести в левую часть уравнения;

4) сделать приведение подобных членов. В случае, если неизвестное в одной и той же степени входит в несколько членов с буквенными коэффициентами, вынести это неизвестное за скобки.

**5.5. Уравнение первой степени (линейное).** Общий вид:

$$ax+b=0.$$

1) Если $a\neq 0$, $a$ и $b$ — вещественные числа, то уравнение имеет и притом единственный корень

$$x=-b/a.$$

2) Если $a=0$, $b\neq 0$, то уравнение корней не имеет.

3) Если $a=b=0$, то уравнение имеет бесконечно много корней. (Ему удовлетворяет любое вещественное число.)

**5.6. Уравнение второй степени (квадратное).** Общий вид

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (1)$$

$a\neq 0$, $a$, $b$ и $c$ — вещественные числа.

Решение.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Исследование решения:

при $b^2-4ac>0$ уравнение имеет 2 различных действительных корня;

» $b^2-4ac=0$ » » 2 одинаковых действительных корня;

» $b^2-4ac<0$ » » 2 комплексно-сопряженных корня.

Частные случаи квадратного уравнения.

1. *Неполные* квадратные уравнения:

а) $ax^2+c=0$.

Решение. $x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

б) $ax^2+bx=0$.

---

* При этом получается следствие данного уравнения и решение необходимо закончить проверкой.

** Если буквенное выражение в скобках не содержит неизвестного, то такие скобки раскрывать не рекомендуется.

Решение. $x_1=0$, $x_2=-b/a$.

2. *Приведенное* квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0.$$

Решение.

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

3. *Квадратное* уравнение вида

$$ax^2+2kx+c=0.$$

Решение.

$$x_1=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a},\quad x_2=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Теорема Виета для квадратного уравнения. Корни квадратиого уравнения связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

а) для уравнения общего вида

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1x_2=\frac{c}{a};$$

б) для приведенного уравнения:

$$x_1+x_2=-p;\quad x_1x_2=q.$$

Разложение квадратного трехчлена. Если $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения (1), то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Если $x_1$ и $x_2$ — корни приведенного квадратного уравнения (2), то

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$ с помощью подстановки

$$x=\frac{z-b}{2a}$$

можио привести к *каноническому* виду

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}[z^2-(b^2-4ac)].$$

**5.7. Биквадратное уравнение.** Общий вид

$$ax^4+bx^2+c=0,\quad a\neq 0$$

(частный случай уравнения четвертой степени).

Заменой неизвестного $x^2=y$ уравнение приводится к квадратному.

Биквадратное уравнение $x^4+px^2+q=0$ в случае, когда $q>0$, можно привести к квадратному, поделив обе части его на $x^2$ и вводя новое неизвестное

$$x+\frac{\sqrt{q}}{x}=y.$$

Последний прием особенно удобен, если $q$ является квадратом рационального числа.

Корни биквадратного уравнения

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Знаки перед корнями выбираются независимо друг от друга, т. е. имеют место четыре возможности.

Свойства корней биквадратного уравнения.

1. Если биквадратное уравнение имеет корень $\alpha$, то оно имеет и корень $-\alpha$.

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

*Замечание.* Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться *формулой сложного радикала:*

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)}\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)}.$$

Последняя полезна лишь в том случае, если $\sqrt{A^2-B}$ есть рациональное число. Для биквадратного уравнения это бывает при условии, что выражение $\sqrt{c/a}$ рационально.

**5.8. Возвратное уравнение четвертой степени.** Общий вид

$$ax^4+bx^3+cx^2+bmx+am^2=0,$$

где $a\neq 0$, а $m$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Указанное уравнение, если предварительно разделить его на $x^2$, приводится к виду

$$a\left(x^2+\frac{m^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{m}{x}\right)+c=0. \qquad (1)$$

Введем теперь новое неизвестное

$$y=x+\frac{m}{x},$$

тогда $y^2=x^2+2m+\frac{m^2}{x^2}$, следовательно, $x^2+\frac{m^2}{x^2}=y^2-2m$. Подставив в уравнение (1), получим квадратное уравнение относительно неизвестного $y$:

$$a(y^2-2m)+by+c=0,$$

или

$$ay^2+by+(c-2am)=0.$$

Представляют интерес следующие два частных случая возвратного уравнения четвертой степени:

1) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ $(m=1)$;

2) $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$ $(m=-1)$.

Они называются *симметрическими уравнениями четвертой степени* соответственно *первого и второго* рода и решаются точно так же, как и квадратные. Для первого из них вводят новое неизвестное по формуле $y=x+\frac{1}{x}$, а для второго — по формуле $y=x-\frac{1}{x}$.

Свойства корней симметрического уравнения.

1. Если $\gamma$ — корень симметрического уравнения первого рода, то это уравнение имеет своим корнем $1/\gamma$. Если $\gamma$ — корень симметрического уравнения второго рода, то оно имеет своим корнем и $-1/\gamma$.

2. Произведение всех корней симметрического уравнения равно единице (по теореме Виета).

**5.9. Двучленное уравнение.** Общий вид

$$ax^n+b=0,\ a\neq 0.$$

Разделив на $a$ и обозначив $\left|\frac{b}{a}\right|=A$, получим одно из уравнений

$$x^n+A=0,\ x^n-A=0,\ A>0.$$

Для решения двучленного уравнения достаточно найти все корни уравнения $y^n=1$ и $y^n=-1$ соответственно и умножить каждый из них на $\sqrt[n]{A}$.

Итак, задача сводится к решению уравнения

$$y^n-1=0 \tag{1}$$

или

$$y^n+1=0. \tag{2}$$

В области действительных чисел:

1. При четных $n$ уравнение (1) имеет два действительных корня: $y_1=1$, $y_2=-1$, а уравнение (2) ни одного.

2. При нечетных $n$ уравнения (1) и (2) имеют по одному действительному корню $y=1$, $y=-1$ соответственно.

В области комплексных чисел каждое из уравнений (1) и (2) имеет $n$ различных корней, которые можно найти по формуле Муавра (см. п. 3.9).

**5.10. Трехчленное уравнение.** Общий вид

$$ax^{2n}+bx^n+c=0\ (a\neq 0). \tag{1}$$

При $n=2$ это уравнение является биквадратным. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^n = y, \\ ay^2 + by + c = 0. \end{cases}$$

**5.11. Уравнение $n$-й степени.** Общий вид

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{1}$$

Основная теорема алгебры. Уравнение $n$-й степени с комплексными коэффициентами имеет $n$ комплексных корней, среди которых могут быть и кратные.

Если $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ — корни уравнения (1), то левую часть его можно представить в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

Теорема Виета. Корни $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ уравнения (1) связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0};$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Общей алгебраической формулы для отыскания корней уравнения выше четвертой степени не существует и существовать не может. Корни уравнений высоких степеней можно найти приближенно с любой степенью точности.

**5.12. Дробное уравнение.** Дробное алгебраическое уравнение с помощью тождественных преобразований можно привести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Уравнение $P(x) = 0$ является следствием уравнения (1). Найдя корни $P(x)$, возьмем те из них, которые удовлетворяют уравнению (1), т. е. при которых $P(x) = 0$, $Q(x)$ существует и $Q(x) \neq 0$.

**5.13. Иррациональные уравнения.** *Иррациональным* называется уравнение, в котором некоторое рациональное или алгебраическое выражение от неизвестного находится под знаком радикала. При решении иррациональных уравнений в элементарной математике ставится задача отыскания только действительных корней. Любое иррациональное уравнение с помощью преобразований, включающих умножение обеих его частей на одно и то же выражение, содержащее неизвестное,

перенесение слагаемых из одной части в другую, приведение подобных и вынесение множителя за скобки, а также возведение обеих частей уравнения в целую положительную степень, может быть преобразовано в целое алгебраическое уравнение, являющееся следствием данного.

Проверка решений полученного уравнения обязательна.

**Пример 1.** Решить уравнение $\sqrt{x+2}+x=2$.

Оставляем в левой части только радикал, перенеся остальные члены в правую часть уравнения:

$$\sqrt{x+2}=2-x.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x+2=4-4x+x^2;$$
$$x^2-5x+2=0.$$

Последнему уравнению удовлетворяют два значения неизвестного:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2},\quad x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}.$$

Проверка. $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ не является корнем исходного уравнения, так как

$$\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}}+\frac{5+\sqrt{17}}{2}>2.$$

Пользуясь формулой сложного радикала (см. пример в п. 4.5), найдем, что

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}+2+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}+$$
$$+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}+\frac{5-\sqrt{17}}{2}=2.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет только один действительный корень $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}=0.$$

Можно поступить, как в примере 1, но здесь легко сразу заметить, что уравнение не имеет корней, так как

$$\sqrt{x+2}\geqslant 0 \text{ и } \sqrt{x+10}\geqslant 0$$

(мы рассматриваем только арифметические корни!). Равенство нулю в этих неравенствах не может быть достигнуто одновременно.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}=4.$$

*Первый способ.* Переносим один радикал в правую часть равенства и возводим обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x+2}=4-\sqrt{x+10},$$
$$x+2=16-8\sqrt{x+10}+x+10,$$
$$\sqrt{x+10}=3.$$

Последнее уравнение снова возводим в квадрат и находим

$$x=-1.$$

Проверка подтверждает, что единственное значение $x=-1$ является корнем:

$$\sqrt{-1+2}+\sqrt{-1+10}=1+3=4.$$

*Второй способ.* Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x+2+2\sqrt{(x+2)(x+10)}+x+10=16,$$
$$\sqrt{(x+2)(x+10)}+x=2.$$

Уединяем радикал и снова возводим в квадрат обе части уравнения:

$$(x+2)(x+10)=4-4x+x^2,$$
$$12x+20=4-4x,$$
$$x=-1.$$

Мы снова нашли тот же корень уравнения.

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8}+x=2.$$

Уединяем радикал и возводим обе части уравнения в куб:

$$\sqrt[3]{2x^2-9x+8}=2-x,$$
$$2x^2-9x+8=8-12x+6x^2-x^3,$$
$$x^3-4x^2+3x=0,$$
$$x_1=0,\ x^2-4x+3=0,\quad x_2=1,\ x_3=3.$$

Проверкой убеждаемся, что все три значения являются корнями.

*Замечание.* В примере 4 проверка была, по сути дела, лишней, так как возведение в куб (и любую нечетную степень) не влечет приобретения новых действительных корней.

Иногда иррациональное уравнение удобно заменить системой рациональных алгебраических уравнений. В частности, если под радикалами одинаковой степени стоят многочлены, отличающиеся лишь на постоянную величину, то такой прием быстро приводит к решению.

**Пример 5.** Решить уравнение

$$\sqrt[5]{x^3-5x+38}+\sqrt[5]{237+5x-x^3}=5.$$

Обозначим первый радикал через $s$, а второй через $t$. Тогда данное уравнение примет вид $s+t=5$. Выражение под первым радикалом равно $s^5$, а под вторым $t^5$. Их сумма равна 275. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} s + t = 5, \\ s^5 + t^5 = 275. \end{cases}$$

Решая эту систему (см. пример 9 в п. 5.21), найдем

$$\begin{cases} s_1 = 2, \\ t_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} s_2 = 3, \\ t_2 = 2. \end{cases}$$

Остальные решения мнимые, их при решении иррациональных уравнений не рассматривают.

Учитывая введенные обозначения, получим:

$$x^2 - 5x + 38 = 32, \text{ или } x^2 - 5x + 6 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 2, \; x_2 = 3.$$

Второе решение для $s$ дает нам уравнение

$$x^2 - 5x + 38 = 243, \text{ или } x^2 - 5x - 205 = 0,$$

откуда

$$x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{845}}{2} = \frac{5 \pm 13\sqrt{5}}{2}.$$

Проверка показывает, что все корни удовлетворяют данному уравнению.

## Трансцендентные уравнения

Уравнения, не сводящиеся к алгебраическим с помощью элементарных алгебраических преобразований (умножение, перенесение слагаемых из одной части уравнения в другую, приведение подобных и вынесение множителя за скобки, возведение в целую положительную степень), называются *трансцендентными*. Использована аналогия с введением понятия трансцендентного числа, которое также определяется как неалгебраическое.

Ниже на конкретных примерах показаны способы решения показательных и логарифмических уравнений. К числу трансцендентных относятся также тригонометрические уравнения, а также уравнения, которые одновременно содержат показательные и логарифмические, логарифмические и тригонометрические и другие комбинации соответствующих математических выражений.

**5.14. Показательные уравнения.** *Показательным* называется урав-

нение, содержащее неизвестное только в показателях степени при основаниях, которые могут быть либо числами, либо параметрами.

*Первый способ.* Приведение уравнения к равенству степеней с одинаковым основанием.

**Пример 1.** $3^x 9^x = 81$.

Преобразуем уравнение к виду

$$3^x 3^{2x} = 3^4, \text{ или } 3^{3x} = 3^4.$$

Степени числа 3 равны, следовательно, равны и их показатели:

$$3x = 4,$$

откуда

$$x = 4/3.$$

*Второй способ.* Вынесение за скобки.

**Пример 2.** $5^{2x+1} + 2 \cdot 5^{2x} + 5^{2x-1} = 900$.

Выносим за скобки $5^{2x-1}$ и получаем

$$5^{2x-1}(25 + 10 + 1) = 900.$$

Так как $900 = 36 \cdot 5^2$, то $5^{2x-1} = 5^2$. Следовательно, $2x - 1 = 2$, откуда $x = 3/2$.

*Третий способ.* Введение вспомогательного неизвестного.

**Пример 3.** $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.

Положив $3^x = y$, получим

$$y^2 - 8y - 9 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 9, \; y_2 = -1.$$

Второе значение не является корнем исходного уравнения, так как $3^x$ не может быть отрицательным.

Остается $3^x = 9$, откуда $x = 2$.

*Четвертый способ.* Логарифмирование.

**Пример 4.** $7^x = 23$.

Это уравнение имеет единственное решение (см. свойство 4 показательной функции). Логарифмируя обе части уравнения, получаем

$$x \lg 7 = \lg 23, \text{ откуда } x = \frac{\lg 23}{\lg 7}.$$

**5.15. Логарифмические уравнения.** *Логарифмическим* называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифмической функции, основание которой либо число, либо параметр.

*Первый способ.* Потенцирование.

**Пример 1.** $\lg(x^2 + 17x + 6) - \lg(2x + 1) = 1$.

В результате потенцирования получим следствие данного уравнения:

$$\lg \frac{x^2 + 17x + 6}{2x + 1} = \lg 10,$$

$$\frac{x^2+17x+6}{2x+1}=10,\ x^2-3x-4=0,$$

$$x_1=4,\ x_2=-1.$$

Второе значение не является корнем, так как $2x+1$ при $x=-1$ меньше нуля, а логарифма отрицательного числа не существует.

$x=4$ — корень исходного уравнения, в чем убеждаемся проверкой.

*Второй способ.* Введение вспомогательного неизвестного.

**Пример 2.** $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1.$

Обозначим $\lg x=y$. Тогда $\frac{1}{5-y}+\frac{2}{1+y}=1$, откуда $y_1=3$, $y_2=2$, т. е.

$$x_1=10^3,\ x_2=10^2.$$

Проверка показывает, что эти числа удовлетворяют уравнению.

*Третий способ.* Логарифмирование. Во избежание потери корней оно осуществляется по формулам:

$$\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|,$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|,$$

$$\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|.$$

**Пример 3.** $\lg[(x+9)^2x^4]=\lg x^2+2.$

Прологарифмируем:

$$2\lg|x+9|+4\lg|x|=2\lg|x|+2.$$

Приведя подобные и пропотенцировав, получим

$$\lg|x(x+9)|=1,$$

откуда $|x(x+9)|=10$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений: $x^2+9x-10=0$, $x^2+9x+10=0$. Решая квадратные уравнения, получим

$$x_1=-10,\ x_2=1,\ x_{3,4}=\frac{-9\pm\sqrt{41}}{2}.$$

Проверка показывает, что все найденные значения $x$ удовлетворяют уравнению.

## Системы алгебраических уравнений

**5.16. Метод Гаусса исключения неизвестных.** Наиболее распространенным и, пожалуй, самым простым способом решения систем линейных уравнений является *метод Гаусса исключения неизвестных.* При решении линейных уравнений этим методом используются следующие преобразования, приводящие к равносильной системе уравнений.

1) перестановка двух уравнений;

2) умножение обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответственных частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число (отличное от нуля).

«Исключение неизвестных» означает построение равносильной системы линейных уравнений, имеющей ступенчатый вид, т. е. $x_1$ может содержаться не более чем в одном уравнении, $x_2$ не более чем в двух, ..., $x_k$ не более чем в $k$ уравнениях.

Ниже на примерах подробно разобраны техника вычислений и все случаи, которые могут при этом встретиться.

**Пример 1.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Так как преобразования системы уравнений, о которых говорилось выше, не изменяют решений системы и сохраняют ее общий вид, то мы будем записывать вместо уравнений лишь их коэффициенты, расположенные в строку. Если некоторые неизвестные в уравнении отсутствуют, это означает, что коэффициент при них равен нулю, и мы записываем в строке на соответствующем месте нуль. При этом свободные члены будем отделять чертой.

Дальше все преобразования над уравнениями будем переносить на строки соответствующей таблицы.

Исключим неизвестное $x_1$ из второго, третьего и четвертого уравнений. Умножив первое уравнение на $-2$ и прибавив его ко второму, мы получим уравнение, не содержащее $x_1$. Аналогичный результат получится, если умножить первое уравнение на $-3$ и $-2$ и прибавить соответственно к третьему и четвертому уравнениям системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Теперь из четвертого и третьего уравнений исключается $x_2$. Для этого второе уравнение (вторая строка) умножается на $-4/5$ (*множитель равен отношению соответствующих коэффициентов, взятому с обратным знаком*) и прибавляется к третьему, затем на $-7/5$ и прибавляется к четвертому:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 7{,}2 & 3{,}6 & -14{,}4 \end{array}\right)$$

Наконец, исключаем $x_3$ из четвертого уравнения, прибавляя к нему третье, умноженное на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right)$$

В результате мы получили систему ступенчатого вида:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ \quad\quad -x_3 + 2x_4 = -3, \\ \quad\quad\quad x_4 = -2, \end{array}\right.$$

которую легко решить, подставляя в каждое уравнение результат решения всех уравнений, расположенных под ним:

$$\left\{\begin{array}{l} x_4 = -2, \\ x_3 = 3 + 2(-2) = -1, \\ x_2 = \dfrac{4-2-8\,(-1)}{5} = 2, \\ x_1 = 6 + 2(-2) - 3\,(-1) - 2 \cdot 2 = 1. \end{array}\right.$$

Если система несовместна (т. е. составляющие ее уравнения противоречивы и система не имеет решения), то в результате приведения к ступенчатому виду получится абсурдное равенство типа $1 = 0$. Обратно: если мы получили уравнение $1 = 0$ (вместо единицы в левой части может стоять любое другое число, не равное нулю), то система несовместна.

**Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 14. \end{array}\right.$$

Исключая последовательно $x_1$ и $x_2$, получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -8{,}8 \end{array}\right).$$

(Символ $\sim$ означает, что системы уравнений, соответствующие этим таблицам, эквивалентны).

Вычитаем из четвертого уравнения третье:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 + x_4 = -4, \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 = -10{,}8, \\ 0 = 2, \end{cases}$$

в которой последнее уравнение абсурдно. Следовательно, исходная система несовместна.

**Пример 3.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

Осуществляя последовательное исключение неизвестных, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & -10{,}8 \end{array}\right).$$

Мы видим, что третье и четвертое уравнения совершенно одинаковы. Поэтому, продолжая процесс исключения дальше, т. е. вычитая из четвертого уравнения третье, мы получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 = -4, \\ -3{,}6x_3 + 7{,}2x_4 = -10{,}8, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение является очевидным тождеством и его можно отбросить, третье уравнение можно сократить на 3,6:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -5x_2 - 8x_3 - x_4 = -4, \\ -x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$$

Считая, что значение неизвестной $x_4$ задано, выразим через $x_4$ все остальные неизвестные:

$$x_3 = 2x_4 + 3,$$
$$x_2 = \frac{4 - x_4 - 8(2x_4 + 3)}{5} = -4 - 3{,}4x_4,$$
$$x_1 = 2(4 + 3{,}4x_4) + 3(2x_4 + 3) - 2x_4 + 6 = 23 - 10{,}8x_4.$$

В этом случае система имеет бесконечное множество решений: придав $x_4$ любое значение, мы получим соответствующие значения для остальных неизвестных.

Ниже показано, как используются для исследования систем линейных уравнений определители.

**5.17. Определители.** Любые четыре числа, которые мы для удобства обозначим $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, можно расположить в виде квадратной таблицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называемой *матрицей размерности* $(2 \times 2)$ или *квадратной матрицей второго порядка*. Можно считать, что матрица $\mathbf{A}$ образована двумя строками $(a_{11}\ a_{12})$ и $(a_{21}\ a_{22})$, каждую из которых можно рассматривать как вектор (говорят *вектор-строка*), или двумя столбцами

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

(говорят *вектор-столбец*).

Каждой квадратной матрице второго порядка можно поставить в соответствие число, называемое ее *определителем* (определителем второго порядка) и обозначаемое $D = |\mathbf{A}|$:

$$D = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Первый индекс $i$ каждого из чисел $a_{ij}$ указывает номер строки, в которой находится число, а второй индекс $j$ — номер столбца.

Определители второго порядка вычисляются по правилу

$$D = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Девять элементов $a_{ij}$, где $i$ — номер строки, а $j$ — номер столбца $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3)$, располагаются в квадратную таблицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая является *квадратной матрицей третьего порядка*. Матрица третьего порядка состоит из трех векторов-столбцов или же из трех

векторов-строк. Ей можно поставить в соответствие число, которое называется *определителем третьего порядка* и обозначается

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определить второго порядка, полученный из определителя третьего порядка вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент $a_{ij}$, называется *минором* этого элемента:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Каждый определитель третьего порядка можно разложить по элементам строки или столбца:

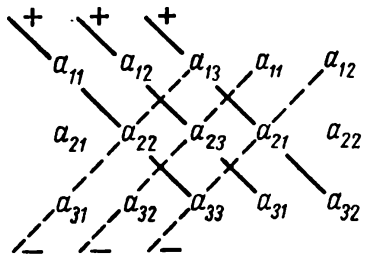
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Используя это свойство, можно вычислить определитель четвертого порядка, сведя его к четырем определителям третьего порядка, и т. д.

Определитель третьего порядка можно непосредственно вычислить по следующей схеме:



т. е. к элементам определителя приписываются справа два первых столбца и находится алгебраическая сумма произведений «диагональных» элементов:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

**5.18. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными.** Общий вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

(Хотя бы один из коэффициентов при неизвестных предполагается отличным от нуля.)

Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

*Первый случай.* Если $D \neq 0$, то система имеет и притом единственное решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

*Второй случай.* Если

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то система неопределенна, так как тогда

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

т. е. второе уравнение системы получается из первого умножением на $k$. Система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными, имеющему бесконечно много решений: достаточно задать произвольно $y$, как мы найдем соответствующее $x$, или обратно: по заданному $x$ найдем соответствующее $y$.

*Третий случай.* Определитель $D = 0$, а один из определителей

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. В этом случае система противоречива и не имеет решения.

**Пример 1.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

Находим

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}=0, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}=1.$$

**Пример 2.** Найти решение системы

$$\begin{cases}2x+y=1,\\ 4x+2y=2.\end{cases}$$

Находим

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0.$$

Второе уравнение получено из первого умножением на 2.

Система сводится к одному уравнению $2x+y=1$, или $y=1-2x$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases}x=k,\\ y=1-2k.\end{cases}$$

По заданному значению $x$ всегда можно найти соответствующее ему значение $y$.

**Пример 3.** Найти решение системы

$$\begin{cases}2x+y=1,\\ 2x+y=2.\end{cases}$$

Находим

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

Уравнения противоречивы. Система не имеет решений.

**5.19. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными.** Общий вид

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3.\end{cases}$$

Определитель системы

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}- \\ -a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}.$$

*Первый случай.* Если $D\neq 0$, то система имеет решение

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}.$$

*Второй случай.* Если $D=0$ и все три определителя, стоящие в числителях, тоже равны нулю, то система неопределенна. Она сводится к двум или к одному уравнению с тремя неизвестными.

Задавая одно или два неизвестных, решаем затем либо систему двух уравнений с двумя неизвестными, либо одно уравнение с одним неизвестным.

*Третий случай.* $D=0$, один из определителей, стоящих в числителе, не равен нулю. Уравнение противоречиво.

**Пример 1.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1, \\ x+3y+2z=2, \\ 2x+y+3z=3. \end{cases}$$

Находим

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=18\neq 0.$$

Система имеет единственное решение:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18}=0,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{18}=0,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18}=1.$$

**Пример 2.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1, \\ x+3y+2z=2, \\ 4x+5y+3z=3. \end{cases}$$

Находим

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Система неопределенна и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений. Нетрудно заметить, что последнее уравнение есть сумма первых двух.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, то систему можно решать относительно $x$ и $y$, считая $z$ известным:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 - z, \\ x + 3y = 2(1 - z). \end{cases}$$

Находим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 2(1-z) & 3 \end{vmatrix}}{7} = \frac{z-1}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-z \\ 1 & 2(1-z) \end{vmatrix}}{7} = \frac{5(1-z)}{7}.$$

Общее решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{k-1}{7}, \\ y = \dfrac{5(1-k)}{7}, \\ z = k. \end{cases}$$

**Пример 3.** Найти решение системы

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 2, \\ 2x + y + z = 4. \end{cases}$$

Находим

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Система противоречива и, следовательно, не имеет решений.

**5.20. Простейшие системы, содержащие уравнения второй степени.** Способы решения показаны на конкретных примерах систем, встречающихся на практике.

**Пример 1.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{1}$$

Р е ш е н и е. *Первый способ.* На основе теоремы, обратной теореме Виета, легко устанавливаем, что данная система равносильна квадратному уравнению

$$z^2 - pz + q = 0,$$

имеющему два корня:

$$z_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},\ z_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

При $p^2 > 4q$ система (1) имеет два решения:

$$1)\ \begin{cases} x = z_1, \\ y = z_2, \end{cases}\quad 2)\ \begin{cases} x = z_2, \\ y = z_1. \end{cases}$$

*Второй способ.* Из возведенного в квадрат первого уравнения системы (1) вычтем учетверенное второе. Получим

$$(x - y)^2 = p^2 - 4q, \text{ откуда } x - y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}.$$

Далее решаем систему $\begin{cases} x + y = p, \\ x - y = \pm\sqrt{p^2 - 4q}, \end{cases}$ являющуюся следствием исходной. Находим два решения: $x_1$, $y_1$ и $x_2$, $y_2$, где

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},\quad y_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

и оставляем лишь те, которые удовлетворяют исходной системе.

**Пример 2.** Решить систему

$$\begin{cases} x - y = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) с помощью замены неизвестного $u = -y$ сводится к системе

$$\begin{cases} x + u = p, \\ xu = -q, \end{cases}$$

отличающейся от системы (1) лишь обозначениями неизвестного.

*Замечание.* Система $\begin{cases} ax + by = p, \\ xy = c \end{cases}$ приводится к виду (1) заменой $ax = u$, $by = v$, $q = abc$.

**Пример 3.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x^2 + y^2 = q. \end{cases} \tag{3}$$

Из возведенного в квадрат первого уравнения вычитаем второе. Получим

$$xy = \frac{p^2 - q}{2}.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = \dfrac{p^2 - q}{2}, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы (3). Таким образом, система (3) легко сводится к системе (1).

**Пример 4.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x^2 - y^2 = q. \end{cases}$$

Если $p \neq 0$, то, подставив первое уравнение во второе, получим

$$x - y = q/p.$$

Затем решаем систему

$$\begin{cases} x + y = p, \\ x - y = q/p, \end{cases}$$

равносильную исходной. Получим

$$x = \frac{1}{2}\left(p + \frac{q}{p}\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(p - \frac{q}{p}\right).$$

**Пример 5.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{4}$$

К первому уравнению прибавим удвоенное второе; затем из первого уравнения вычтем удвоенное второе. Получим систему

$$\begin{cases} (x + y)^2 = p + 2q, \\ (x - y)^2 = p - 2q. \end{cases} \tag{5}$$

Если $p + 2q > 0$ и $p - 2q > 0$, то из системы (5) получаем четыре системы:

1) $\begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{p + 2q}, \\ x - y = \sqrt{p - 2q}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = \sqrt{p + 2q}, \\ x - y = -\sqrt{p - 2q}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{p + 2q}, \\ x - y = -\sqrt{p - 2q}, \end{cases}$

каждая из которых может дать одно решение системы (4).

**Пример 6.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = p, \\ xy = q. \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) легко сводится к системе (2). Для этого достаточно возвести второе уравнение в квадрат и произвести затем замену неизвестных:

$$x^2 = u, \quad y^2 = v.$$

В результате получим систему

$$\begin{cases} u - v = p, \\ uv = q^2, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной системы (6).

*Замечание.* Системы

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = p, \\ xy = c \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ax^2 - by^2 = p, \\ xy = c, \end{cases}$$

где $a>0$, $b>0$, можно привести к виду (4) или (6) соответственно с помощью замены $u = x\sqrt{a}$, $v = y\sqrt{b}$, $q = c\sqrt{ab}$.

**Пример 7.** Решить систему

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = a, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = b, \end{cases} \quad \text{где } b \neq 0. \tag{7}$$

Введем новое неизвестное $t = y/x$ и сделаем замену $y = tx$:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1tx^2 + c_1t^2x^2 = a, \\ a_2x^2 + b_2tx^2 + c_2t^2x^2 = b. \end{cases} \tag{8}$$

Разделив первое уравнение на второе (можно доказать, что при $b \neq 0$ это не приводит к потере корней):

$$\frac{a_1 + b_1t + c_1t^2}{a_2 + b_2t + c_2t^2} = \frac{a}{b}.$$

Последнее уравнение заменяем равносильным ему уравнением

$$(bc_1 - ac_2)t^2 + (bb_1 - ab_2)t + ba_1 - aa_2 = 0.$$

Решая его, найдем $t_1$ и $t_2$. Подставляя найденные значения $t_1$ и $t_2$ в любое из уравнений (8), получим квадратные уравнения относительно $x$.

В общем случае у системы (7) будет четыре решения.

*Замечание* 1. Систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = a, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = b \end{cases}$$

всегда можно решить подстановкой. Иногда удобнее возвести первое уравнение в квадрат (например, если это позволяет в дальнейшем исключить квадраты).

*Замечание* 2. Если система состоит из уравнений, степени которых соответственно $n_1$ и $n_2$, то у нее не более чем $n_1n_2$ решений.

*Замечание* 3. Решение системы

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0 \end{cases} \quad (a_i,\ b_i,\ c_i \neq 0) \tag{9}$$

с помощью замены $y = tx$ сводится к решению системы

$$\begin{cases} x^2(a_1 + b_1t + c_1t^2) = 0, \\ x^2(a_2 + b_2t + c_2t^2) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Если $x=0$, то из (9) видно, что $y=0$.

Если $x\neq 0$, то система (10) принимает вид

$$\begin{cases} a_1+b_1t+c_1t^2=0, \\ a_2+b_2t+c_2t^2=0, \end{cases}$$

т. е. система имеет решение не всегда.

**5.21. Симметричные системы уравнений.** Система уравнений, которая не изменится, если вместо $x$ во всех уравнениях подставить $y$, а вместо $y$ подставить $x$, называется *симметричной* относительно $x$ и $y$.

Симметричную систему целых уравнений часто удается решить, введя новые переменные (см. п. 4.11):

$$\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases} \tag{11}$$

Если система симметрична относительно $x$ и $y$, то у нее наряду с решением

$$\begin{cases} x_1=\alpha, \\ y_1=\beta \end{cases} \quad \text{есть решение} \quad \begin{cases} x_2=\beta, \\ y_2=\alpha. \end{cases}$$

Если у системы уравнений есть решение

$$\begin{cases} x_1=\alpha, \\ y_1=\alpha, \end{cases}$$

то можно считать, что два решения совпали.

**Пример 8.** Найти действительные решения системы

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x\ +xy+y\ =2. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему с помощью замены (11):

$$\begin{cases} u^2-v=4, \\ u\ +v=2. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$u^2+u-6=0,$$

откуда $u_1=2$, $u_2=-3$. Соответственно $v_1=0$, $v_2=5$.

Данная система свелась к совокупности следующих двух:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-3, \\ xy=\ \ 5. \end{cases}$$

Решая их (см. пример 1), находим действительные решения:

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=2. \end{cases}$$

**Пример 9.** Решить систему

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x^5+y^5=275. \end{cases}$$

Сделав замену (11), преобразуем данную систему к виду (см. п. 4.11)

$$\begin{cases} u=5, \\ u^5-5u^3v+5uv^2=275. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение $u=5$, после сокращения получим $v^2-25v+114=0$, откуда $v_1=6$, $v_2=19$.

Задача свелась к решению совокупности систем

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=5, \\ xy=19 \end{cases}$$

(см. пример 1).

## 6. НЕРАВЕНСТВА

### Общие сведения

**6.1. Определения.** *Неравенством* называется выражение, полученное посредством соединения знаком $<$ (меньше) или $>$ (больше) двух алгебраических выражений.

Знак неравенства всегда обращен вершиной угла в сторону меньшей из сравниваемых величин. Кроме строгих неравенств рассматривают и соотношения, допускающие равенство: $\leqslant$ (меньше или равно), $\geqslant$ (больше или равно).

**6.2. Свойства и преобразования неравенств.**

1. Если $a>b$, то $a+p>b+p$, $a-p>b-p$ ($p$ — произвольное);

$$ap>bp \text{ при } p>0;\ ap<bp \text{ при } p<0;$$

$$\frac{a}{p}>\frac{b}{p} \text{ при } p>0;\ \frac{a}{p}<\frac{b}{p} \text{ при } p<0.$$

2. Если $0<a<b$; то $a^p<b^p$ при $p>0$, $a^p>b^p$ при $p<0$;

$$\log_a p>\log_b p \text{ при } b>a>1;\ p>0;$$

$$\log_a p<\log_b p \text{ при } a<b<1;\ p>0;$$

$$\log_p a<\log_p b \text{ при } p>1;$$

$$\log_p a>\log_p b \text{ при } 0<p<1.$$

3. Если $a>b$, $c>d$, то $a+c>b+d$; $a-d>b-c$.

4. Если $a>b>0$, $c>d>0$, то $ac>bd$; $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

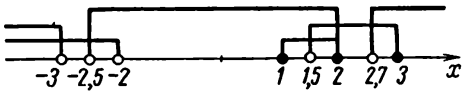



Рис. 14

5. Если $a < x < b$, то $(x-a)(x-b) < 0$, и обратно.

Следствие из свойства 1. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

**6.3. Система и совокупность неравенств.** *Решить* неравенство — значит найти *все* значения неизвестных, при которых это неравенство выполняется. Два неравенства называются *равносильными* или *эквивалентными*, если их решения совпадают.

Перечисленные в п. 6.2 элементарные преобразования неравенств приводят к эквивалентным неравенствам.

Неравенства образуют *совокупность*, если их решения *объединяются*, т. е. к решениям первого присоединяются решения второго, третьего и т. д.

Мы говорим о *системе* неравенств, если требуется найти все решения, удовлетворяющие одновременно всем данным неравенствам.

Неравенства, образующие систему, записывают одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой. Совокупность неравенств, как правило, записывают в строку, что позволяет не путать совокупность с системой.

Решить систему, состоящую из нескольких совокупностей неравенств, значит найти все значения неизвестного, удовлетворяющие всем входящим в систему совокупностям.

**Пример.** Решить систему совокупностей неравенств

$$\begin{cases} x < -2, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x < -3, & 1{,}5 < x \leqslant 3, \\ -2{,}5 < x \leqslant 2, & x > 2{,}7. \end{cases}$$

Начнем с первой совокупности: $x < -2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$. Над точками числовой прямой, удовлетворяющими каждому из этих неравенств, построим соответственно открытый и закрытый прямоугольники (рис. 14). При этом точку $-2$, которую нужно исключить, отметим светлым кружочком, а точки $+1$ и $+2$ — черными. Так же строим решения для двух других совокупностей. Чтобы избежать путаницы, для каждой совокупности строим прямоугольники разной высоты. Точки числовой оси, над которыми расположатся три прямоугольника (по количеству совокупностей в системе!) разной высоты, дадут решение системы: $1{,}5 < x \leqslant 2$.

## Решение неравенств

**6.4. Неравенство первой степени (линейное).** Неравенство

$$ax+b>0 \tag{1}$$

имеет решение:

1) если $a>0$, то $x>-b/a$;

2) если $a<0$, то $x<-b/a$;

3) если $a=0$, то при $b>0$ $x$ — любое действительное число, а при $b\leqslant 0$ неравенство решений не имеет.

Геометрически решение линейного неравенства (1) представляет собой луч, исходящий из точки $-b/a$ и направленный вправо при $a>0$ и влево при $a<0$.

**6.5. Метод интервалов.** Неравенства вида

$$P(x)>0,\ P(x)\geqslant 0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$$

решаются с помощью *метода интервалов*. Идея метода интервалов заключается в том, что многочлен $P(x)$ при переходе через свой корень нечетной кратности меняет знак, а при переходе через корень четной кратности сохраняет знак. Поэтому достаточно знать корни многочлена $P(x)$, их кратности и знак $P(x)$ в любой точке, где $P(x)\neq 0$, чтобы решить неравенство $P(x)>0$ или $P(x)\geqslant 0$.

Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ эквивалентно неравенству $P(x)Q(x)>0$ и его решение ничего нового не требует.

Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant 0$ эквивалентно системе $\begin{cases} P(x)Q(x)\geqslant 0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$

Применение метода интервалов показано на примерах.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)(x^2+1)>0.$$

Так как $x^2+1$ всегда положительно, то данное неравенство равносильно следующему:

$$(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)>0.$$

Здесь корни $-2$, 1, 3, 5 многочлена в левой части неравенства расположены в порядке возрастания на числовой оси (рис. 15). При $x>5$ многочлен положителен, так как каждое выражение в скобках положительно. Далее знаки чередуются. Итак, решение определяется совокупностью неравенств:

$$x<-2,\ 1<x<3,\ x>5.$$

**Пример 2.** Решить неравенство

$$(x+3)(x+1)(x-4)^2(x-5)<0.$$

Множитель $(x-4)^2$ всегда положителен и только в точке $x=4$ обращается в нуль. Поэтому его влияние на решение неравенства огра-

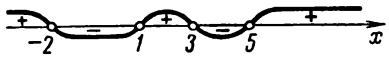



Рис. 15

Рис. 16

ничивается тем, что он исключает точку $x=4$ (на рис. 16 эта точка отмечена светлым кружочком). Остается решить неравенство

$$(x+3)(x+1)(x-5)<0,$$

что мы уже умеем делать. Итак,

$$x<-3,\ -1<x<4,\ 4<x<5.$$

**Пример 3.** Решить неравенство

$$(2x-5)(3-x)^3(x-4)^2\geqslant 0.$$

Прежде всего нужно преобразовать неравенство так, чтобы в каждой скобке было выделено число, обращающее ее в нуль:

$$(x-2{,}5)(x-3)^3(x-4)^2\leqslant 0.$$

Отметим черными кружочками точки 2,5, 3 и 4, в которых неравенство выполняется, и заменим его таким:

$$(x-2{,}5)(x-3)<0.$$

Правее точки $x=3$ произведение будет неотрицательным, между точками $x=2{,}5$ и $x=3$ — отрицательным, а левее точки $x=2{,}5$ — положительным. Таким образом (рис. 17),

$$2{,}5\leqslant x\leqslant 3,\ x=4.$$

**Пример 4.** Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)}\leqslant 0.$$

Данное неравенство превращается в равенство в тех точках, где множители, стоящие в числителе, обращаются в нуль. (Корни числителя $x=-3$, $x=-1$ и $x=5$ обозначены на рис. 18 черными кружочками.) Теперь исключим (обозначим на рисунке светлыми кружочками) те точки, где в нуль обращается знаменатель, так как в этих точках левая часть неравенства теряет смысл.

Множители $(x+3)^2$ и $(x-4)^2$, не меняющие знака на всей числовой оси, можно опустить, так как их влияние уже учтено. На рис. 18 отмечены также точки, где достигается равенство и где знаменатель обращается в нуль. Во всех остальных точках данное неравенство равносильно такому

$$(x+1)(x-5)(x-2)<0,$$

а неравенства подобного вида мы уже умеем решать. Итак,

$$x\leqslant -1,\ 2<x<4,\ 4<x\leqslant 5.$$

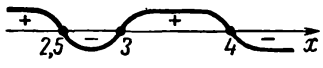



Рис. 17

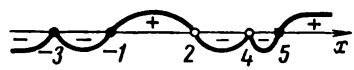



Рис. 18

**Пример 5.** Решить неравенство

$$\frac{(x+3)^2(x+1)(x-5)}{(x-4)^2(x-2)^3}<0.$$

Так как в этом примере мы имеем строгое неравенство, то нужно исключить корни числителя и корни знаменателя. После этого множители $(x+3)^2$, $(x-4)^2$ и $(x-2)^2$ не влияют на решение. Воспользовавшись методом интервалов, решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)}<0.$$

Получим (рис. 19):

$$x<-3,\ -3<x<-1,\ 2<x<4,\ 4<x<5.$$

**6.6. Неравенство второй степени (квадратное).** Неравенство

$$ax^2+bx+c\geqslant 0,\ a\neq 0$$

— частный случай рассмотренного в п. 6.5. В зависимости от знака дискриминанта $D=b^2-4ac$ и от знака коэффициента $a$ получим шесть различных вариантов (рис. 20):

**6.7. Иррациональные неравенства.** Неравенство

$$\sqrt{ax^2+bx+c}<dx+e \qquad (1)$$

эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} ax^2+bx+c<(dx+e)^2, \\ ax^2+bx+c\geqslant 0, \\ dx+e>0. \end{cases}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть два случая. Пусть $dx+e\leqslant 0$. Из этого предположения следует, что $\sqrt{ax^2+bx+c}<0$, т. е. такое неравенство не имеет решений. Пусть теперь $dx+e>0$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны и можно возвести их в квадрат, не меняя знака неравенства. В результате получим первое из неравенств системы. Оно не будет равносильно исходному, так как в результате возведения в квадрат оказались разрушенными два ограничения. Во-первых, само возведение в квадрат было возможно лишь при условии, что $dx+e>0$. Для исходного неравенства (1) это ограниче-

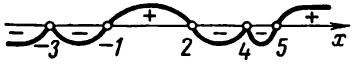



Рис. 19

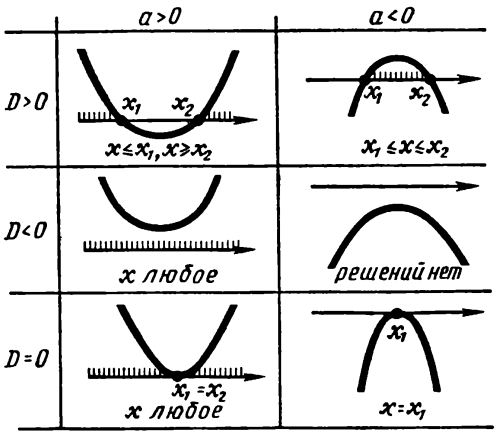



Рис. 20

ние удовлетворялось автоматически, в то время как теперь выражение $dx+e$ возведено в квадрат и потому может быть отрицательным. Во-вторых, выражение, стоявшее под корнем, может теперь стать отрицательным, в то время как для исходного неравенства это было невозможно.

После возведения в квадрат мы должны восстановить все ограничения, которые присутствуют в неравенстве (1) и пропадают после преобразования. Поэтому в систему добавлены еще два неравенства.

Неравенство

$$\sqrt{ax^2+bx+c}>dx+e \tag{2}$$

эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} dx+e\geqslant 0, \\ ax^2+bx+c>(dx+e)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} dx+e<0, \\ ax^2+bx+c\geqslant 0. \end{cases}$$

Это означает, что рассматриваются два случая.

*Первый случай:* $dx+e\geqslant 0$. Тогда обе части неравенства (2) можно возвести в квадрат. При этом требование неотрицательности подкоренного выражения выполняется автоматически.

*Второй случай:* $dx+e<0$. Если арифметический корень существует, то он больше любого отрицательного числа.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-55x+250}<x-14.$$

Его нужно заменить системой неравенств

$$\begin{cases} x^2-55x+250<(x-14)^2, \\ x^2-55x+250\geqslant 0, \\ x-14>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>2, \\ x\leqslant 5,\ x\geqslant 50, \\ x>14, \end{cases}$$

т. е. $x\geqslant 50$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+2}>2-x.$$

Если $x>2$, то неравенство выполняется при всех $x$, при которых $x^2-3x+2\geqslant 0$, т. е. при $x\leqslant 1$ и $x\geqslant 2$. Решением системы

$$\begin{cases} x>2, \\ x\leqslant 1,\ x\geqslant 2 \end{cases}$$

будет $x>2$.

Если $x\leqslant 2$, то получим систему

$$\begin{cases} x^2-3x+2>(2-x)^2, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$$

которая несовместна.

Итак, $x>2$.

**6.8. Логарифмические неравенства.** При потенцировании в неравенствах нужно следить за тем, чтобы:

1) выражение под знаком логарифма оставалось положительным;

2) выражение в основании логарифма оставалось положительным;

3) выражение в основании логарифма не обращалось в единицу.

В соответствии с этими требованиями при преобразовании логарифмических неравенств приходится записывать дополнительные условия.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$\lg\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<0.$$

Обычно, решая это неравенство, полагают, что знак абсолютной величины гарантирует существование логарифма, забывая, что логарифм нуля не существует. После потенцирования к неравенству

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|<1$$

нужно присоединить еще условие $x\neq 1$ (логарифм нуля не существует). Итак, данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}-1<\dfrac{x-1}{2x+1}<1,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Первое неравенство можно записать так:

$$\left(\frac{x-1}{2x+1}+1\right)\left(\frac{x-1}{2x+1}-1\right)<0,$$

откуда $x<-2$, $x>0$.

Итак, $x<-2$, $0<x<1$, $x>1$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}(3x-1)<\log_{x^2-1}x^2.$$

Необходимо разобрать два случая в зависимости от того, больше или меньше единицы основание логарифмов.

Если $x^2-1>1$, то логарифмическая функция с таким основанием будет возрастающей, т. е. $3x-1<x^2$. Число под знаком логарифма должно быть положительным. Основание $x^2-1$ больше нуля и не равно единице, так как мы рассматриваем случай $x^2-1>1$. Получаем систему

$$\begin{cases}x^2-1>1,\\ 3x-1<x^2,\\ 3x-1>0,\end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}, \\ x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Если основание меньше единицы (но больше нуля!), то логарифмическая функция будет убывающей. В этом случае получаем такую систему

$$\begin{cases} 0<x^2-1<1, \\ 3x-1>x^2, \\ 3x-1>0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем еще одно множество решений:

$$1<x<\sqrt{2}.$$

Итак, $1<x<\sqrt{2}$, $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

**6.9. Средние величины.** Даны $n$ чисел: $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ (в примерах числа 3, 4, 9, 12).

*Среднее арифметическое*

$$A=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

**Пример.** $\dfrac{3+4+9+12}{4}=7.$

*Среднее геометрическое*

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\quad (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0).$$

**Пример.** $\sqrt[4]{3\cdot 4\cdot 9\cdot 12}=\sqrt[4]{1296}=6.$

*Среднее гармоническое*

$$H=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}=$$

$$=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$$

$$(x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

**Пример.** $\dfrac{4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}}=4 : \dfrac{28}{36}=\dfrac{4\cdot 36}{28}=\dfrac{36}{7}=5\dfrac{1}{7}.$

Теорема Коши. Среднее геометрическое нескольких неотрицательных величин всегда не меньше их среднего гармонического и не больше их среднего арифметического:

$$H \leqslant G \leqslant A \quad (x_i > 0);$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

**Пример.** $5\frac{1}{7} < 6 < 7.$

*Среднее квадратичное*

$$K=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \quad (x_i \geqslant 0).$$

**Пример.** $\sqrt{\dfrac{2^2+3^2+1^2+6^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{4+9+1+36}{4}}=\sqrt{\dfrac{50}{4}}.$

*Среднее взвешенное*

$$V=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \quad (a_i \geqslant 0).$$

**6.10. Некоторые важные неравенства.** Все числа, входящие в следующие неравенства, неотрицательны, если не оговорено другое.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Равенство достигается при* $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Неравенство Коши

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

справедливо при любых вещественных $a_i$ и $b_i$. Равенство достигается при $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$.

Обобщенное неравенство Коши

$$(a_1^r+a_2^r+\ldots+a_n^r)^{1/r} \leqslant (a_1^s+a_2^s+\ldots+a_n^s)^{1/s},$$

если $r < s$.

Равенство возможно, если $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

---

* Везде имеются в виду необходимые и достаточные условия.

Неравенство Гельдера. Если $\alpha$ и $\beta$ положительны и $\alpha+\beta=1$, то

$$a_1^{\alpha}b_1^{\beta}+a_2^{\alpha}b_2^{\beta}+\ldots+a_n^{\alpha}b_n^{\beta}\leqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^{\alpha}(b_1+b_2+\ldots+b_n)^{\beta}.$$

Равенство возможно, если либо $a_1:b_1=a_2:b_2=\ldots=a_n:b_n$, либо один из сомножителей в правой части обращается в нуль.

Неравенство Минковского

$$(a_1^r+\ldots+a_n^r)^{1/r}+\ldots+(l_1^r+\ldots+l_n^r)^{1/r}\geqslant[(a_1+\ldots+l_1)^r+\ldots \\ \ldots+(a_n+\ldots+l_n)^r]^{1/r},$$

если $r>1$; знак неравенства меняется на противоположный, если $0<r<1$.

Равенство достигается, если либо $a_1:\ldots:l_1=a_2:\ldots:l_2=\ldots=a_n:\ldots:l_n$, либо $r=1$.

Неравенство треугольника (частный случай неравенства Минковского)

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^{1/2}\geqslant[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots \\ \ldots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$$

Если $\alpha$, $\beta$, ..., $\lambda$ больше $-1$ и все одного знака, то

$$(1+\alpha)(1+\beta)\ldots(1+\lambda)>1+\alpha+\beta+\ldots+\lambda.$$

Если $a_1a_2\ldots a_n=l^n$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqslant(1+l)^n,$$

равенство достигается только при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Если $a_i\neq 0$, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2,$$

равенство достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Если $\mu\geqslant 0$, то

$$x^{\mu}(x-y)(x-z)+y^{\mu}(y-z)(y-x)+z^{\mu}(z-x)(z-y)\geqslant 0,$$

равенство достигается при $x=y=z$.

## 7. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**7.1. Понятие последовательности. Примеры.** Простейшим примером последовательности служит последовательность всех натуральных чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots \qquad (1)$$

Любую другую последовательность мы будем рассматривать как функцию натурального аргумента:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots; \qquad (2)$$

$a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ... называются *членами* последовательности; $a_1$ — ее первый член, $a_n$ — общий член, т. е. члены любой последовательности

окажутся занумерованными в том порядке, в котором они расположены.

Иногда последовательность (2) кратко обозначают $(a_n)$ или $\{a_n\}$.

Из двух стоящих рядом членов последовательности первый (имеющий меньший номер) называется *предыдущим* по отношению ко второму, а второй *последующим* по отношению к первому.

**Пример 1.** Последовательность всех чисел, обратных натуральным:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

**Пример 2.** Последовательность всех четных чисел:

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

**Пример 3.** Последовательность всех простых чисел:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, F(n), \ldots$$

Обычно последовательность задается указанием зависимости ее $n$-го члена от числа $n$, которому этот член соответствует (*формула общего члена*). Так сделано в примерах 1 и 2. Однако не всегда такое задание последовательности возможно. Например, общей формулы для всех простых чисел (пример 3) не найдено.

Некоторые члены последовательности могут быть равны между собой.

**Пример 4.** Последовательность имеет равные члены на четных и нечетных местах:

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

**Пример 5.** В последовательности равны между собой члены, номера которых кратны четырем:

$$1, 2, 3, 0, 4, 5, 6, 0, 7, 8, 9, 0, \ldots.$$

Последовательность $(a_n)$ называется *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Последовательность $(a_n)$ называется *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. $a_{n+1} < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Если каждый член последовательности, начиная со второго, не меньше предыдущего $(a_{n+1} \geqslant a_n,\ n = 1, 2, \ldots)$, то последовательность $(a_n)$ называется *неубывающей*, а если не больше предыдущего $(a_{n+1} \leqslant a_n,\ n = 1, 2, \ldots)$, то *невозрастающей*.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Иногда рассматривают в качестве монотонных последовательности, становящиеся монотонными, начиная с некоторого номера $N$.

Последовательность в примере 1 убывающая, а последовательности в примерах 2 и 3 возрастающие. Последовательности в примерах 4 и 5 немонотонные.

Если существует такое положительное число $M$, что все члены последовательности $(a_n)$ по абсолютной величине не превышают числа $M$: $|a_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность называется *ограниченной*. Если для любого члена последовательности $(a_n)$ имеет место неравенство $a_n \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $(a_n)$ называется *ограниченной сверху;* если же существует такое число $m$, что $a_n \geqslant m$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $(a_n)$ называется *ограниченной снизу.*

Последовательность из примера 1 является ограниченной, а последовательности из примеров 2 и 3 — ограниченными снизу (например, числом 1).

**Пример 6.** Последовательность, которая не является ограниченной ни снизу, ни сверху:

$$-2, 4, -6, 8, \ldots, 2n(-1)^n, \ldots$$

Последовательность называется *постоянной*, если все члены ее равны между собой. Постоянная последовательность монотонна.

**7.2. Арифметическая прогрессия.** Последовательность, общий член которой выражается через первый член формулой

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

называется *арифметической прогрессией.*

Число $d$ есть постоянная величина для данной прогрессии и называется *разностью* арифметической прогрессии.

Свойства.

1. Разность между любыми двумя соседними членами прогрессии (из последующего вычитается предыдущий) равна $d$:

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

2. $a_n + a_{n+3} = a_{n+1} + a_{n+2}$.

3. $a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

$S_n$ — *сумма* $n$ подряд стоящих членов прогрессии, начиная с $a_1$:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[2a_1 + d(n-1)]n}{2}.$$

**7.3. Геометрическая прогрессия.** Последовательность, общий член которой выражается формулой

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \quad a_1 \neq 0, \quad q \neq 0,$$

называется *геометрической прогрессией.*

Число $q$ называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Свойства.

1. Частное от деления двух соседних членов (последующий делится на предыдущий) равно $q$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

2. $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$.

3. $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$.

$S_n$ — *сумма* $n$ подряд стоящих членов прогрессии, начиная с $a_1$:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Геометрическую прогрессию со знаменателем, меньшим по абсолютной величине единицы ($|q|<1$), называют *бесконечно убывающей* геометрической прогрессией, имея при этом в виду, что ее общий член стремится к нулю. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия может быть убывающей (см. ниже пример 1), возрастающей (пример 3) и колеблющейся (пример 2).

Если знаменатель геометрической прогрессии по абсолютной величине меньше единицы ($|q|<1$), то в выражении для суммы $n$ первых членов прогрессии можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и найти сумму $S$ образованного из членов геометрической прогрессии бесконечного числового ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ :

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

**Примеры.**

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, S = 2.$

2. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{(-2)^{n-1}}, \ldots, S = \frac{2}{3}.$

3. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \ldots, -\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, S = -2.$

## 8. ЛОГАРИФМЫ

**8.1. Определение.** *Логарифмом числа $N$ по основанию $a$* называется показатель степени $x$, в которую нужно возвести $a$, чтобы получить число $N$.

Обозначение:

$$x = \log_a N.$$

Из определения логарифма следует:

$$a^x = N, \text{ т. е. } a^{\log_a N} = N.$$

При определении логарифма предполагают, что

$$a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0.$$

**8.2. Свойства логарифмов.**

1. Логарифм единицы при любом основании* равен нулю:

$$\log_a 1 = 0,\ 0 < a \neq 1.$$

2. Логарифмы чисел, меньших единицы по основанию, большему единицы, а также чисел, больших единицы по основанию, меньшему единицы, — *отрицательны.* Формально это свойство можно записать так:

$$\text{если } \begin{cases} 0 < N < 1, \\ a > 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} N > 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases} \text{ то } \log_a N < 0.$$

3. Логарифмы чисел, меньших единицы, по основанию, меньшему единицы, а также чисел, больших единицы, по основанию, большему единицы, — *положительны:*

$$\text{если } \begin{cases} 0 < N < 1, \\ 0 < a < 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} N > 1, \\ a > 1, \end{cases} \text{ то } \log_a N > 0.$$

4. При основании, большем единицы, большему числу соответствует больший логарифм:

если $a > 1$ и $0 < N_1 < N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$.

5. При основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм:

если $0 < a < 1$ и $0 < N_1 < N_2$, то $\log_a N_1 > \log_a N_2$.

6. *Логарифм произведения* равен сумме логарифмов сомножителей:

если $N_1 > 0,\ N_2 > 0$, то $\log_a(N_1 N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$;

если $N_1 < 0,\ N_2 < 0$, то $\log_a(N_1 N_2) = \log_a(-N_1) + \log_a(-N_2)$;

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

7. *Логарифм частного* равен разности логарифмов делимого и делителя:

если $N_1 > 0,\ N_2 > 0$, то $\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$;

если $N_1 < 0,\ N_2 < 0$, то $\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \log_a(-N_1) - \log_a(-N_2)$;

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

8. *Логарифм степени* равен логарифму основания, умноженному на показатель степени:

если $N > 0$, то $\log_a N^m = m \log_a N$;

если $m = 2n$, то $\log_a N^{2n} = 2n \log_a |N|$;

в обоих случаях $0 < a \neq 1$.

---

* Говоря «при любом основании», здесь и дальше мы имеем в виду ограничения: $a > 0,\ a \neq 1$.

9. *Логарифм корня* равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{\log_a N}{n}, \quad N>0, \ 0<a\neq 1. \quad n\neq 0.$$

10. Зависимость между логарифмами с различными основаниями:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b}\cdot \log_a N, \ 0<a\neq 1. \ 0<b\neq 1, \ N>0.$$

Множитель $M=\frac{1}{\log_a b}$ называется *модулем* перехода от логарифмов при основании $a$ к логарифмам при основании $b$.

11. Из свойства (10) вытекает:

$$\log_a b\cdot \log_b a = 1, \ 0<a\neq 1, \ 0<b\neq 1.$$

12. Значение логарифма не изменится, если число, от которого берется логарифм, и основание логарифма возвести в одну и ту же вещественную степень:

$$\log_a N = \log_a^k N^k, \ k\neq 0, \ N>0, \ 0<a\neq 1, \ 0<b\neq 1,$$

где $k$ — любое вещественное число.

13. Отношение логарифмов двух чисел, вычисленных при одинаковых основаниях, есть величина постоянная для данных чисел и не зависящая от выбора основания:

$$\frac{\log_a N_1}{\log_a N_2} = \frac{\log_b N_1}{\log_b N_2}, \ N_1, \ N_2>0, \ 0<a\neq 1.$$

14. $\log_a N_1\cdot \log_b N_2 = \log_a N_2\cdot \log_b N_1$, $N_1, N_2>0$, $0<a\neq 1$, $0<b\neq 1$. Это непосредственно следует из предыдущего.

**Пример 1.** Вычислить $\log_3 125\cdot \log_5 9$.

Пользуясь свойством 14, запишем

$$\log_3 125\cdot \log_5 9 = \log_5 125\cdot \log_3 9 = 3\cdot 2 = 6.$$

**Пример 2.** Вычислить

$$\log_3 4\cdot \log_4 5\cdot \log_5 6\cdot \log_6 7\cdot \log_7 8\cdot \log_8 9.$$

Пользуясь свойством 14, последовательно находим

$$\begin{aligned}
&\log_3 4\cdot \log_4 5\cdot \log_5 6\cdot \log_6 7\cdot \log_7 8\cdot \log_8 9 = \\
&= \log_4 4\cdot \log_3 5\cdot \log_5 6\cdot \log_6 7\cdot \log_7 8\cdot \log_8 9 = \\
&= \log_4 4\cdot \log_5 5\cdot \log_3 6\cdot \log_6 7\cdot \log_7 8\cdot \log_8 9 = \\
&= \ldots = \log_4 4\cdot \log_5 5\cdot \log_6 6\cdot \log_7 7\cdot \log_8 8\cdot \log_3 9 = 2.
\end{aligned}$$

С помощью свойств 6—9 часто удается свести логарифм сложного выражения к результату простых действий над логарифмами входящих в него простых выражений.

Такое преобразование логарифма называется *логарифмированием.*

**Пример 3.** Найти логарифм выражения

$$A = \frac{a^5 \sqrt[7]{c^3}}{d^4 \sqrt[5]{fb^3}}, \text{ если } a, b, c, d, f > 0.$$

Применяя последовательно свойства 7, 6, 8, 9, получим

$$\log A = 5 \log a + \frac{3}{7} \log c - 4 \log d - \frac{1}{5} \log f - \frac{3}{5} \log b.$$

Преобразование, обратное логарифмированию, называется *потенцированием.*

При потенцировании свойства 6—9 следует читать слева направо.

**8.3. Десятичные логарифмы.** За основание логарифмов в вычислениях обычно принимается число 10, так как мы пользуемся десятичной системой счисления. Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными.*

Обозначение. Вместо $\log_{10} N$ пишут $\lg N$.

Десятичные логарифмы обладают всеми свойствами логарифмов с основанием, большим единицы, и, кроме того, следующими специальными свойствами:

1. Если число является степенью 10 с натуральным показателем $n$, то десятичный логарифм его равен показателю степени:

$$\lg 10^n = n.$$

2. Если число является степенью 0,1 с натуральным показателем $n$, то десятичный логарифм его отрицателен и равен $-n$:

$$\lg (0,1)^n = \lg 0,\overbrace{0 \ldots 0}^{n-1}1 = n \lg 0,1 = -n.$$

3. Если число умножить на $10^n$, то его логарифм увеличится на $n$:

$$\lg 10^n N = n + \lg N.$$

4. Если число разделить на $10^n$, то его логарифм уменьшится на $n$:

$$\lg \frac{N}{10^n} = \lg N - n.$$

Из свойств 3 и 4 следует: если в десятичной дроби перенести запятую на $n$ знаков вправо, то логарифм увеличится на $n$, если перенести запятую на $n$ знаков влево, то логарифм уменьшится на $n$.

6. Логарифмы рациональных чисел, не являющихся степенями 10 с целыми показателями, иррациональны.

Если действительное число не является целым, то его можно представить в виде суммы целого числа и положительного числа, меньшего единицы:

$$3,7 = 0,7 + 3; \quad -0,5 = -1 + 0,5; \quad -3,7 = -4 + 0,3.$$

Такое представление допускает и логарифм любого положительного числа $N$:

$$\lg N = A + d, \text{ где } A \text{ — целое, } 0 \leqslant d < 1.$$

Целая часть логарифма, записанного в такой форме, называется его *характеристикой*, а положительное число $d$ — его *мантиссой*. При этом если характеристика отрицательна, то минус пишется над ней:

$$-0{,}5 = -1 + 0{,}5 = \bar{1}{,}5; \quad -3{,}7 = -4 + 0{,}3 = \bar{4}{,}3.$$

7. Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа:

$$\lg N = (n-1) + d, \text{ где } n \text{ — число цифр в } N, \ 0 \leqslant d < 1.$$

8. Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей пишется в десятичном изображении этого числа до первой цифры, отличной от нуля, считая и нуль целых.

Мантиссы логарифмов сведены в таблицы логарифмов (см. табл. 14 в конце книги).

О натуральных логарифмах см. п. 28.2.

## 9. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

**9.1. Перестановки. Размещения. Сочетания.** Комбинаторика рассматривает вопросы, связанные с подсчетом числа всевозможных комбинаций из элементов данного конечного множества.

*Перестановки* — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Обозначения: $P_n$, $P(n)$ — число всех возможных перестановок из $n$ элементов.

Если все $n$ элементов различны, то число всех *перестановок без повторений* определяется формулой

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

($n!$ — символ для обозначения произведения $n$ первых чисел натурального ряда. Читается «эн факториал». По определению полагают $0! = 1$).

Если среди $n$ элементов имеется $p$ элементов одного вида, $q$ — другого, $r$ — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n(p, q, r, \ldots) = \frac{n!}{p!\,q!\,r! \ldots}.$$

**Пример 1.** Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждая из них входит в изображение числа только один раз?

Таких четырехзначных чисел будет ровно столько, сколько будет перестановок без повторений из четырех элементов:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

**Пример 2.** Сколько четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1 и 2, если каждая из них входит в изображение числа дважды.

Таких чисел будет

$$P_4(2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

*Размещения* из $n$ элементов по $k$-комбинации, составленные из $n$ данных элементов по $k$ элементов в каждой; при этом два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

Обозначение: $A_n^k$ — число всех размещений из $n$ элементов по $k$. Если среди $n$ элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число *размещений без повторений* определяется формулой

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Если все $n$ элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число *размещений с повторениями* определяется формулой

$$A_n^{k\ (\text{повт})} = n^k.$$

**Пример 3.** Число двузначных чисел, составленных из трех цифр 1, 2, 3 по две, без повторений равно

$$A_3^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6,$$

а с повторениями равно

$$A_3^{2\,(\text{повт})} = 3^2 = 9.$$

Сочетания из $n$ элементов по $k$ — комбинации по $k$ элементов из данных $n$, отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

Обозначения: $C_n^k$ или $\binom{n}{k}$ — число всех сочетаний из $n$ элементов по $k$.

Для $k$ различных элементов из $n$ различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Для $k$ с повторениями из $n$ различных

$$C_n^{k\,(\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Для положительных целых $n$ справедливы соотношения:

$$C_n^r = \begin{cases} C_n^{n-r} & \text{при } r \leqslant n, \\ 0 & \text{при } r > n; \end{cases}$$

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1};$$

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_{n-1}^r + C_{n-2}^r + \ldots + C_r^r.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

**9.2. Формула Ньютона (натуральная степень бинома).** Используя свойства сочетаний, можно для целых положительных $n$ получить формулу

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n a^n,$$

или

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 \pm C_n^3 x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 \pm$$

$$\pm \binom{n}{3} x^{n-3}a^3 + \ldots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Во второй и третьей формулах для симметрии мы определили

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Частные случаи:

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax \pm a^2;$$

$$(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3;$$

$$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4;$$

. . . . . .

Биноминальные коэффициенты $C_n^k = \binom{n}{k}$ легко можно определить с помощью *треугольника Паскаля:*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
. . . . . .

Каждый элемент нижней строки получается в результате сложения двух элементов верхней строки, стоящих левее и правее его. В качестве основы берется треугольник из единиц.

**9.3. Свойства разложения по формуле Ньютона.**

1. Члены разложения расположены по убывающим степеням буквы $x$ и по возрастающим степеням буквы $a$. Сумма показателей при $x$ и $a$ в каждом члене одинакова и равна $n$ — показателю степени бинома.

2. Число членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

3. *Формула общего члена разложения* $(x+a)^n$:

$$T_{k+1}=C_n^k x^{n-k}a^k.$$

4. Коэффициенты членов разложения, равноудаленных от концов, равны между собой.

5. Сумма коэффициентов разложения $(x+a)^n$:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

6. Сумма коэффициентов разложения $(x-a)^n$:

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n=0.$$

7. Сумма коэффициентов членов разложения бинома $(x+a)^n$, находящихся на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, находящихся на нечетных местах.

## 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Понятие множества — одно из основных понятий математики. Оно не может быть формально определено, и мы лишь поясняем это понятие, указывая на его свойства.

**10.1. Определения. Действия над множествами.**

1. Множество состоит из *элементов множества* или не содержит элементов.

Тот факт, что элемент $a$ принадлежит множеству $A$, обозначается так: $a \in A$.

2. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* или *нуль-множеством;* обозначение $\varnothing$.

3. Если каждый элемент из множества $A$ является одновременно элементом множества $B$, то множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$. По аналогии со знаками неравенства пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.

4. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е.: а) каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$; б) каждый элемент из $B$ является элементом из $A$, то множества $A$ и $B$ называют *равными:* $A = B$. Пустые множества также называют равными.

5. Все элементы, которые подлежат рассмотрению, собираются в так называемое универсальное множество $I$, так что для каждого множества $A$ будет: $A \subset I$.

6. Для множеств определяются две операции: объединение $\cup$ и пересечение $\cap$.

$A \cup B$ — *объединение (сложение) множеств* $A$ и $B$ состоит в образовании множества, в которое входит каждый элемент из $A$ и каждый из $B$. Если элемент одновременно принадлежит и множеству $A$ и множеству $B$, то в $A \cup B$ он встречается только один раз.

$A \cap B$ — *пересечение (умножение) множеств* $A$ и $B$ есть множество, состоящее из элементов, общих $A$ и $B$.

7. $\bar{A}$ — *дополнение* множества $A$ (относительно $I$) состоит из элементов $I$, не принадлежащих множеству $A$.

**10.2. Некоторые свойства множеств.** Приведем свойства множеств, вытекающие из предыдущих определений. Пусть $A$, $B$ и $C$ — любые множества, составленные из элементов множества $I$.

1. *Коммутативность:*

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

2. *Ассоциативность:*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. *Дистрибутивность:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4.

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A.$$

5. *Свойства* $I$ и $\varnothing$:

$$A \cap I = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing;$$
$$A \cup I = I; \quad A \cup \varnothing = A.$$

6. *Свойства* $\subset$, $\supset$:

$$A \subset (A \cup B); \quad A \subset I;$$
$$(A \cap B) \subset A; \quad \varnothing \subset A.$$

Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$. Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

7. *Свойства* $\bar{A}$:

$$\bar{A} \cup A = I; \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap B;$$
$$\bar{A} \cap A = \varnothing; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

8. *Двойственность:*

$\cup$ и $\cap$
$\varnothing$ и $I$
$\subset$ и $\supset$

Если в верном соотношении каждый из символов $\cup$, $\cap$, $\varnothing$, $I$, $\subset$ и $\supset$ заменить соответственно на $\cap$, $\cup$, $I, \varnothing$, $\supset$ и $\subset$, то снова получим верное соотношение.

**10.3. Алгебра символической логики.** К алгебре множеств примыкают *алгебра символической логики (булева алгебра)* и *алгебра переключательных (коммутационных) схем,* которые интересны и сами по себе, и своими многочисленными применениями.

В математической логике под *высказыванием* понимают любое утверждение, которое может быть *истинным* либо *ложным.* Предложения, которые могут быть одновременно истинными и ложными, а также лишь частично истинными, не рассматриваются. Высказывания в математической логике характеризуются только тем, истинны они или ложны без учета их конкретного содержания.

| Алгебра множеств | Математическая логика | Переключательные схемы |
|---|---|---|
| $\cup$ | $\vee$ | $+$ |
| *объединение множеств* | *дизъюнкция (сложение) высказываний* | *параллельное включение* |
| $\cap$ | $\wedge$ | $\times$ |
| *пересечение множеств* | *конъюнкция (умножение) высказываний* | *последовательное включение* |
| $\bar{\ }$ | $\bar{\ }$ | / |
| *дополнение множества* | отрицание высказывания | переключение (если было включено, то выключить, и наоборот). |

Если высказывание $A$ истинно, то пишут $A = 1$; если $A$ ложно, то $A = 0$. Например, «Кама — приток Волги» $= 1$, «Миссисипи протекает в Австралии» $= 0$.

Основные логические операции. 1. *Дизъюнкция* (логическое сложение) двух высказываний $A$ и $B$ есть сложное высказывание, обозначаемое $A \vee B$, которое ложно, если $A$ и $B$ оба ложны, и истинно во всех остальных случаях:

$$0 \vee 0 = 0; \quad 1 \vee 0 = 1;$$
$$0 \vee 1 = 1; \quad 1 \vee 1 = 1$$

(сравни с таблицей сложения в двоичной системе счисления в п. 1.4).

2. *Конъюнкция* (логическое умножение) двух высказываний $A$ и $B$ есть сложное высказывание, обозначаемое $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания $A$ и $B$ истинны, и ложно во всех остальных случаях:

$$0 \wedge 0 = 0; \quad 1 \wedge 0 = 0;$$
$$0 \wedge 1 = 0; \quad 1 \wedge 1 = 1$$

(сравни с таблицей умножения в двоичной системе счисления в п. 1.4).

3. *Отрицание* высказывания $A$ есть сложное высказывание, обозначаемое $\bar{A}$, которое ложно, когда $\bar{A}$ истиино, и истинно, когда $\bar{A}$ ложно:

$$\bar{1} = 0$$
$$\bar{0} = 1.$$

4. *Равнозначность* двух высказываний $A$ и $B$ есть сложное высказывание, обозначаемое $A \sim B$, которое истинно, если оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны, и ложно в остальных случаях:

$$0 \sim 0 = 1; \quad 1 \sim 0 = 0;$$
$$0 \sim 1 = 0; \quad 1 \sim 1 = 1.$$

Логическое сложение можно отождествить с союзом *или*, а умножение — с союзом *и*, так как в первом случае для истинности сложного высказывания требуется истинность одного из составляющих $A$ или $B$ (или $A$ и $B$ одновременно), а во втором случае — обоих $A$ и $B$. Отрицание отождествляется со словом *не*.

Между перечисленными логическими операциями существуют такие связи:

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B};$$
$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B};$$
$$A \sim B = (A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B) = (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}).$$

Операции логического сложения и умножения и операция равнозначности являются коммутативными и ассоциативными. Кроме того, справедлив распределительный закон для логического умножения по отношению к логическому сложению:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

и логического сложения по отношению к логическому умножению:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Последний закон в обычной алгебре не имеет места; так,

$$3 + (2 \cdot 5) \neq (3 + 2)(3 + 5).$$

**10.4. Принцип математической индукции.** Для перехода от частных результатов, справедливых для отдельных значений $n$, к общим, верным при всех $n$, пользуются *принципом математической индукции.*

Имеется некоторое утверждение $A$, зависящее определенным образом от натурального аргумента $n$, который принимает все целые положительные значения, начиная от $p$. Чтобы доказать справедливость утверждения $A$, поступают следующим образом:

1) убеждаются в справедливости $A$ при $n = p$;

2) предполагают, что $A$ верно при всех $n$, для которых $p < n \leqslant k$;

3) используя п. 1 и 2, доказывают, что утверждение $A$ справедливо при $n = k + 1$.

Выполнение требований 1) — 3) позволяет от значения $n = p$, которое берется минимальным из всех возможных, шаг за шагом переходить к значениям $p + 1$, $p + 2$ и т. д. Поэтому мы считаем, что выполнение требований 1) — 3) влечет за собой справедливость утверждения $A$ для всех $n > p$. Это одна из аксиом натуральных чисел. Она называется *аксиомой индукции.*

**Пример 1.** Доказать, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

1) При $n = 1$ имеем

$$1 \cdot 1! = 2! - 1, \text{ т. е. } 1 = 1;$$

формула справедлива.

2) Предположим, что данная формула справедлива при всех $n$ таких, что $1 \leqslant n \leqslant k$.

3) Докажем эту формулу для $n = k + 1$, т. е. установим, что верна формула

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k + 1)(k + 1)! = (k + 2)! - 1,$$

которая получается из данной заменой $n$ на $k + 1$.

Действительно,

$$(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k!) + (k + 1)(k + 1)! =$$
$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1.$$

В этой цепочке равенств при переходе от первого выражения ко второму использовано условие 2). Так как условия 1) и 3) выполнены, то в силу аксиомы индукции следует, что рассматриваемая формула верна при всех натуральных $n$.

**Пример 2.** Доказать тождество (*формулу Муавра*)

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

1) Для $n=1$ тождество очевидно.

2) Пусть оно верно при $1 \leqslant n \leqslant k$, в том числе

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi).$$

3) Тогда

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k+1} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ = (r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)]\ [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)].$$

По правилу перемножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, имеем

$$[r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)]\ [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \\ = r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi],$$

откуда следует доказываемая формула.

**Пример 3.** Доказать неравенство

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{n \text{ радикалов}} < \sqrt{a} + 1.,$$

где $a>0$, $n \geqslant 2$.

1) Здесь нужно начинать с $n=2$:

$$\sqrt{a+\sqrt{a}} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2} = \sqrt{a}+1.$$

2) Предположим, что неравенство верно для $2 < n \leqslant k$; в том числе и для $n=k$:

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{k \text{ радикалов}} < \sqrt{a}+1.$$

3) Докажем тогда, что

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{k+1 \text{ радикалов}} < \sqrt{a}+1.$$

Используя 1 и 2, получим

$$\sqrt{a+\underbrace{\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}_{k}} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1.$$

Тем самым условия для применения индукции обеспечены.

**Пример 4.** Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого $n$-угольника равна $\pi(n-2)$.

1) Минимальное число углов — три. Поэтому индукция начинается с $n=3$. Для треугольника формула дает $\pi(3-2)=\pi$, т. е. она справедлива.

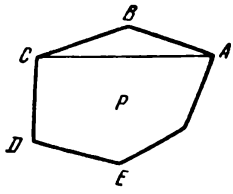


Рис. 21

2) Допустим, что для любого выпуклого $n$-угольника с числом углов $3<n\leqslant k$ формула имеет место.

3) Докажем ее для любого выпуклого $(k+1)$-угольника.

Возьмем три последовательные вершины $A$, $B$, $C$ $(k+1)$-угольника и проведем диагональ $AC$ (рис. 21). Она разобьет $(k+1)$-угольник на $k$-угольник $P$ и треугольник $ABC$, сумма внутренних углов которых равна сумме внутренних углов данного $(k+1)$-угольника.

Так как условия 1) и 2) выполнены, то

$$\pi(k-2)+\pi=\pi(k-1).$$

То же самое мы должны были бы получить из доказываемой формулы при

$$n=k+1.$$

*Замечания.* 1. Никакое количество проверок не в состоянии заменить математическую индукцию.

Действительно, можно написать подряд любое (но конечное!) число множителей:

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n);$$

перемножить их и предложить убедиться в том, что полученный многочлен имеет своими корнями все натуральные числа. Ясно, что простые подстановки не приведут к результату, если $n$ выбрать достаточно большим.

2. Все требования 1), 2) и 3) одинаково существенны. Особенно часто забывают про требование 1). Приведем пример такого ошибочного рассуждения. Докажем, например, что все натуральные числа равны. Предположим, что все числа до $k$ равны, т. е. в том числе $k-1=k$. Прибавив по единице к правой и левой частям равенства, получим

$$k=k+1.$$

Индукцию, однако, применять здесь было нельзя, так как не выполнено требование 1).

**10.5. Аксиомы, теоремы, следствия.** Построение каждой математической теории начинается с перечисления основных (начальных) элементов, понятий и операций, с указания их свойств и соотношений, которые заранее предполагаются выполненными. Эти свойства и соотношения называются *аксиомами.*

Точка, прямая, плоскость, пространство — основные элементы в геометрии; натуральное число, множество — в алгебре и математическом анализе.

**Примеры** аксиом: «Через две точки можно провести одну и

только одну прямую», «Если $A$ равно $B$, то $B$ равно $A$», «Через точку вне прямой можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной». Последняя аксиома носит название «пятого постулата Евклида». Около двух тысяч лет математики безуспешно пытались вывести ее из остальных аксиом геометрии. Лишь в середине прошлого века Н. И. Лобачевский нашел правильный путь к решению загадки «пятого постулата». Он принял противоположную аксиому: «Через точку вне прямой проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной». Исходя из этого утверждения, Лобачевский построил новую геометрию, которая оказалась более общей.

Используя начальные элементы, понятия и операции, с помощью определений мы конструируем новые. Этот процесс продолжается далее, причем на каждом этапе используется все, что к этому моменту уже построено.

**Примеры** определений.

1. Действие, обратное умножению, называется *делением (отношением)*.

2. Отношение двух (целых) чисел $p$ и $q$ $(q \neq 0)$ называется *дробью*.

Законы логики позволяют из аксиом получать новые и новые утверждения — *теоремы (следствия)*.

Вспомогательные теоремы иногда называют *леммами*.

Некоторые теоремы называют признаками, следствиями, критериями, предложениями.

**10.6. Прямая и обратиая теоремы. Необходимость и достаточиость.**

Любая теорема может быть записана в стандартной форме: «Если..., то...».

Утверждение, обозначенное многоточием после слова «если», мы назовем $A$, а обозначенное вторым многоточием назовем $B$. Итак, «Если $A$, то $B$».

$A$ — *условие теоремы,*
$B$ — *заключение.*

Сама теорема может быть записана и так:

«Из $A$ следует $B$»;

«$A$ влечет $B$»;

$A \Rightarrow B$.

**Примеры.**

1. Если число делится на четыре, то оно четно.

2. Из делимости числа на четыре следует его четность.

3. Делимость числа на четыре влечет его четность.

4. Если прямые параллельны, то накрестлежащие углы равны.

5. Из параллельности прямых следует равенство накрестлежащих углов.

6. Параллельность прямых влечет равенство накрестлежащих углов.

Убедившись в выполнении $A$, мы можем утверждать, что имеет место и $B$. Условие (признак) $A$ называется *достаточным* для выполнения $B$.

Делимость числа на четыре достаточна для его четности. Параллельность прямых достаточна для равенства накрестлежащих углов.

Если условие $A$ не выполнено, то относительно $B$ мы ничего сказать не можем.

Если число не делится на четыре, то оно может быть как четным, так и нечетным (10, 14, 21, 33). Если прямые непараллельны, то накрестлежащие углы не равны.

Если условие $B$ не выполнено, то условие $A$ не имеет места. В самом деле, если бы условие $A$ соблюдалось, то из $A$ следовало бы $B$, что иевозможно. Условие $B$ называется *необходимым* для выполнения $A$.

Предположим теперь, что условие $B$ выполнено. Что можно сказать об условии $A$?

Оказывается, что тогда условие $A$ может как выполняться, так и не выполняться. Когда нам удается также доказать теорему: «Если $B$, то $A$» (эта теорема называется *обратной* по отношению к рассмотренной вначале), то говорят, что $A$ эквивалентно $B$, что $A$ необходимое и достаточное условие для выполнения $B$ и, обратно: $B$ необходимое и достаточное условие для выполнения $A$.

**Примеры.**

**1.** Если число четное, то оно может быть или кратным четырем, или нет.

**2.** Если накрестлежащие углы равны, то соответствующие прямые параллельны. (Это самостоятельная теорема, обратная приведенной ранее. Принимая во внимание обе эти теоремы (прямую и обратную), заключаем, что условие параллельности прямых и условие равенства накрестлежащих углов эквивалентны.)

**3.** Если число нечетное, то оно не делится на четыре.

**4.** Если накрестлежащие углы не равны, то прямые непараллельны.

**5.** Для того чтобы число делилось на четыре, необходима его четность.

**6.** Для параллельности прямых необходимо равенство накрестлежащих углов.

Рассматривают четыре типа теорем:

*Прямая теорема:* «Если $A$, то $B$».

*Обратная теорема:* «Если $B$, то $A$».

*Противоположная прямой:* «Если нет $A$, то нет $B$».

*Противоположная обратной:* «Если нет $B$, то нет $A$».

Прямая теорема и противоположная обратной являются следствиями друг друга; обратная теорема и противоположная прямой — тоже следствия друг друга. Остальные пары теорем независимы.

# III. ГЕОМЕТРИЯ

## 11. ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ

### Луч, отрезок, угол, ломаная

**11.1. Определения.** Основными неопределяемыми объектами геометрии являются:

*точки,* обозначаемые обычно $A$, $B$, $C$, ... ,

*прямые,* обозначаемые обычно $a$, $b$, $c$, ..., $(AB)$,

*плоскости,* обозначаемые обычно $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... или А, В, Г, ..., $(ABC)$.

В ряде случаев применяются и другие обозначения.

*Луч (полупрямая)* возникает при разбиении множества точек прямой $a$ точкой $O$, принадлежащей этой прямой. Если точку $O$ исключить, то прямая разобьется на два множества, называемых *открытыми лучами.* Если теперь добавить точку $O$ к любому из образованных ею открытых лучей, то получим луч.

Обозначение: $Oa$ указывает прямую $a$, которой принадлежит луч, и точку $O$ — начало луча; $OA$ указывает начало луча $O$ и произвольную точку $A$ луча.

Лучи могут быть *сонаправленными* и *противоположно направленными.* Если лучи принадлежат одиой прямой и их пересечение — луч, то они сонаправленные, иначе — противоположно направленные. Если лучи принадлежат параллельным прямым, то они лежат в одной плоскости, которую прямая, проведенная через начала $O_1$ и $O_2$ этих лучей, делит на две полуплоскости. Лучи, оказавшиеся в одной полуплоскости от прямой $(O_1O_2)$, называются соиаправленными, а лучи, попавшие в разные полуплоскости, — противоположно направленными.

*Отрезок* — множество всех точек прямой, лежащих между двумя точками этой прямой, включающее и сами эти точки.

Обозначение: $AB$. Точки $A$ и $B$ называются *концами отрезка,* остальные его точки — *внутренние точки отрезка.* Длина отрезка $AB$ обозначается $|AB|$. Отрезки равны, если равны их длины. Поэтому запись $AB=CD$ и запись $|AB|=|CD|$ имеют одинаковый смысл.

*Ломаная* — последовательность отрезков (*звеньев* ломаной), расположенных так, что начало последующего совпадает с концом предыдущего, причем отрезки, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой. Отрезки, имеющие общий конец, иазываются *смежными звеньями ломаной.* Если конец последнего отрезка совпадает с началом первого, то ломаная называется *замкнутой.*

Ломаная называется *простой,* если любые ее точки, принадлежащие одновременно двум звеньям, являются концами соответствующих отрезков.

*Угол* — пара лучей $Oa$ и $Ob$, вообще говоря, различных, имею-

щих общее начало — точку $O$. Точка $O$ называется *вершиной угла,* лучи $Oa$ и $Ob$ — его сторонами.

Обозначение: $\angle(a, b)$ — угол между прямыми $a$ и $b$; $\angle AOC$ — точка $A$ лежит на луче $Oa$, точка $B$ лежит на луче $Ob$, точка $O$ является вершиной угла.

Простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю по отношению к данной ломаной; во внешней области можно провести прямую, не имеющую с данной ломаной общих точек — таков отличительный формальный признак внешней области.

Простая замкнутая ломаная вместе со своей внутренней областью образует *многоугольник.* Ломаная служит его *границей,* а внутренняя область ломаной — *внутренней областью многоугольника.* Звенья ломаной — *стороны* многоугольника, общие точки соседних звеньев — *вершины* многоугольника. Число вершин многоугольника совпадает с числом его сторон и с числом углов. По числу углов многоугольники называют треугольниками, четырехугольниками, пятиугольниками и т. д.

Многоугольник называется *выпуклым,* если он целиком лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей одну из его сторон.

**11.2. Измерение углов.** Предположим, что в начальный момент лучи $Oa$ и $Ob$ совпадают, а затем луч $Oa$ остается неподвижным, а луч $Ob$ поворачивается вокруг точки $O$ против часовой стрелки, зачерчивая пройденную часть плоскости. Чем большая часть плоскости зачерчена, тем больше угол. Когда лучи $Oa$ и $Ob$ окажутся противоположно направленными и будет зачерчена только часть плоскости по одну сторону от прямой, то говорят, что лучи $Oa$ и $Ob$ образуют *развернутый* угол. Когда лучи $Oa$ и $Ob$ вновь окажутся сонаправленными, т. е. луч $Ob$ совершит один полный оборот вокруг точки $O$, то угол между ними называют *полным.* Можно рассматривать углы, содержащие один или несколько полных углов.

Градусная мера.

*Градус* (°) — $^1/_{360}$ полного угла.

*Минута* (′) — $^1/_{60}$ градуса.

*Секунда* (″) — $^1/_{3600}$ градуса, $^1/_{60}$ минуты.

Полный оборот составляет 360°.

Запись: 57°17′45″ означает 57 градусов 17 минут 45 секунд.

**11.3. Радианная мера.** *Радиан* (рад) — угол, длина дуги которого равна радиусу. В полном обороте $2\pi$ радианов.

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}01745 \text{ рад}.$$

$$1' = \frac{\pi}{10\,800} \text{ рад} = 0{,}0002909 \text{ рад}.$$

$$1'' = \frac{\pi}{648\,000} \text{ рад} = 0{,}000004848 \text{ рад}.$$

Переход от градусного измерения к радианному осуществляется по формуле

$$\varphi \text{ рад} = \frac{\varphi^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

(см. табл. 26).

Градусную, радианную или какую-либо иную меру угла называют *величиной угла.* Иногда для обозначения величины угла $\angle AOB$ пишут $\widehat{AOB}$. Обычно сохраняют для обозначения величины угла то же обозначение, что и для самого угла, если это не может вызвать путаницы. Часто для обозначения угла и его величины пользуются одной буквой.

**11.4. Классификация углов.**

*Прямой* — угол в $^1/_4$ полного оборота $= \pi/2 = d = 90^\circ$. Прямые, образующие прямой угол, называются *перпендикулярными;*

*Развернутый* — угол в $^1/_2$ полного оборота $= \pi = 2d = 180^\circ$, его стороны образуют одну прямую;

*Полный* — угол в $360^\circ = 2\pi = 4d$;

*Острый* — угол, меньший прямого;

*Тупой* — угол, больший прямого, но меньший развернутого;

*Смежные* — углы, имеющие общую сторону и образующие в сумме развернутый угол;

*Вертикальные* — углы, образованные двумя пересекающимися прямыми и не имеющие общих сторон. Вертикальные углы равны;

*Дополнительные* — углы, в сумме равные прямому.

*Биссектрисой* угла называется луч с началом в вершине этого угла, делящий угол пополам. Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение одна другой. Биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.

**11.5. Углы при параллельных прямых.** Две прямые называются *параллельными,* если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой образуется восемь углов. Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными* (рис. 22). Каждые два соответственных угла равны. Углы 3 и 5, 4 и 6 — *внутренние накрестлежащие;* 1 и 7, 2 и 8 — *внешние накрестлежащие.* Каждые два накрестлежащих угла равны.

Углы 3 и 6, 4 и 5 — *внутренние односторонние;* 1 и 8, 2 и 7 — *внешние односторонние.* Каждая пара односторонних углов равна в сумме 180°.

Углы с соответственно параллельными или соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180°.

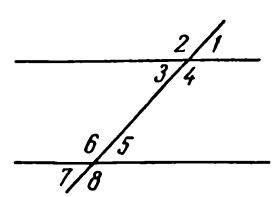



Рис. 22

## Треугольник

**11.6. Обозначения. Основные свойства** (рис. 23).

Обозначения: $A$, $B$, $C$ — вершины треугольника; $a$, $b$, $c$ — стороны; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — внутренние углы; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ — внешние углы; $a+b+c=2p$ периметр ($p$ — полупериметр); $S$ — площадь треугольника.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=2d=\pi;$$
$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360^\circ=4d=2\pi;$$
$$\alpha_1=\beta+\gamma;\ \beta_1=\alpha+\gamma;\ \gamma_1=\alpha+\beta.$$

Неравенства треугольника:

$$a+b>c,\ |a-b|<c,$$
$$b+c>a,\ |b-c|<a,$$
$$a+c>b,\ |a-c|<b.$$

Треугольник называется *остроугольным,* если все углы его острые, т. е. меньше 90°; *прямоугольным,* если один угол прямой; *тупоугольным,* если один угол тупой. В треугольнике может быть только один прямой или тупой угол.

**11.7. Высота, медиана, биссектриса.** *Высота* $h_a$ (или $h_b$, или $h_c$) — отрезок $AA_1$ (или $BB_1$, или $CC_1$) перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ (или $B$, или $C$) на противоположную сторону $BC$ (или $AC$, или $AB$) или на ее продолжение (рис. 24):

$$h_a=\frac{2S}{a};\ h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ac:ab.$$

*Медиана* $m_a$ (или $m_b$, или $m_c$) — отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны (рис. 25):

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2};\ m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2};$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2};\ m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

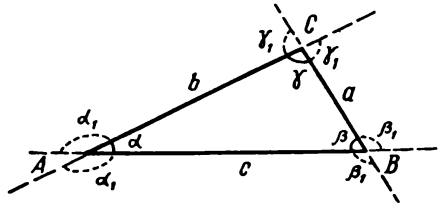



Рис. 23

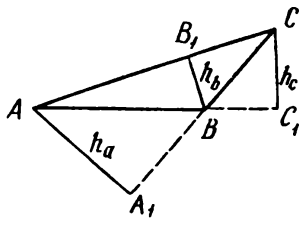



Рис. 24

*Биссектриса* $w_\alpha$ (или $w_\beta$, или $w_\gamma$) — отрезок биссектрисы соответствующего угла, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной (см. рис. 25). Биссектриса угла $\gamma$ делит сторону $c$ на отрезки $c_1$ и $c_2$, пропорциональные двум другим сторонам:

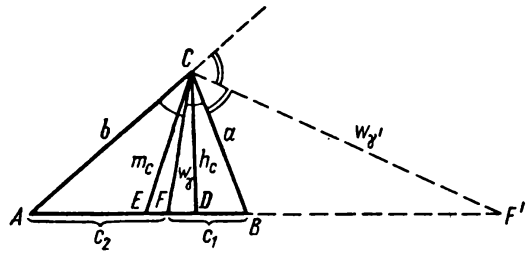



Рис. 25

$$\frac{c_2}{c_1}=\frac{b}{a};$$

$$w_\alpha=\frac{2}{b+c}\sqrt{b\,c\,p(p-a)}.$$

Формулы для $w_\beta$ и $w_\gamma$ получаются циклической перестановкой $a$, $b$ и $c$, т. е. $a$ заменяют на $b$, $b$ заменяют на $c$, а $c$ на $a$.

*Биссектриса внешнего угла* $w_{\alpha_1}$ (или $w_{\beta_1}$, или $w_{\gamma_1}$) — отрезок биссектрисы соответствующего угла, соединяющий вершину с продолжением противоположной стороны треугольника:

$$w_{\alpha_1}=\frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}.$$

Формулы для $w_{\beta_1}$ и $w_{\gamma_1}$ получаются циклической перестановкой $a$, $b$ и $c$.

В каждом треугольнике биссектриса любого внутреннего угла лежит между медианой и высотой. Угол между высотой $h_c$ и биссектрисой $w_\gamma$ равен $\frac{\beta-\alpha}{2}$. Угол между $h_c$ и $w_{\gamma_1}$ равен $90°-\frac{\beta-\alpha}{2}$.

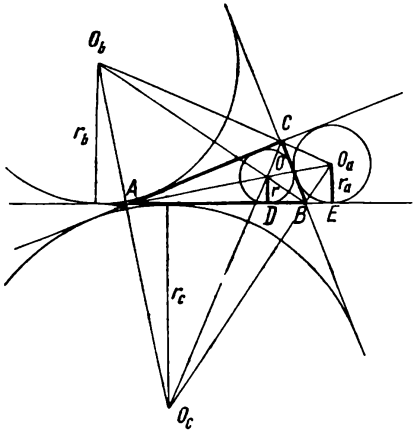



Рис. 26

Все биссектрисы и все медианы всегда проходят внутри треугольника. Две высоты тупоугольного треугольника проходят вне его (см. рис. 24).

**11.8. Вписанная и вневписанная окружности** (рис. 26). Биссектрисы углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ пересекаются в одной точке $O$ — центре *вписанной* (т. е. касающейся всех сторон треугольника) окружности; $r$ — ее радиус.

Биссектрисы внешних углов треугольника пересекаются в точках $O_a$, $O_b$, $O_c$ — центрах вневписан-

ных окружностей. Через эти же точки проходят продолжения соответствующих биссектрис внутренних углов, $r_a$, $r_b$, $r_c$ — радиусы вневписанных окружностей:

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{2S}{b+c-a};\quad r_b=\frac{S}{p-b}=\frac{2S}{a+c-b};$$

$$r_c=\frac{S}{p-c}=\frac{2S}{a+b-c};$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c};$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c};$$

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a};$$

$$\frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b};$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c};$$

$$AD=p-a,\quad AE=p.$$

**11.9. Описанная окружность** (рис. 27). Перпендикуляры, восставленные из середин сторон треугольника, пересекаются в одной точке $O$ — центре *описанной* окружности (т. е. окружности, проходящей через все вершины треугольника); $R$ — ее радиус.

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r_a+r_b+r_c-r=4R.$$

**11.10. Центр тяжести, ортоцентр.** Три медианы пересекаются в одной точке $P$ (рис. 28), являющейся *центром тяжести* треугольника. Точка $P$ делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (больший отрезок прилегает к вершине).

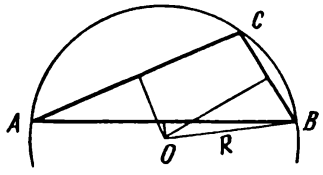



Рис. 27

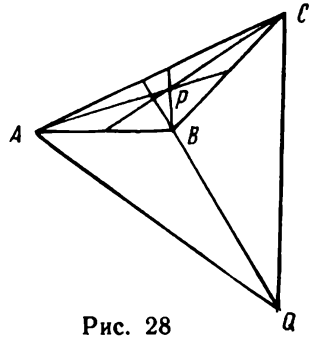



Рис. 28

Три высоты пересекаются в точке $Q$, называемой *ортоцентром*.

**11.11. Площадь треугольника.**

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(*формула Герона*);

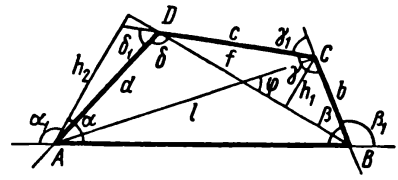



Рис. 29

$$S=\frac{abc}{4R};\quad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;\quad S=rp=\frac{1}{2}r(a+b+c);$$

$$S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c);$$

$$S^2=rr_ar_br_c;$$

$$S=\frac{1}{2}(a+b)w_\gamma\sin\frac{\gamma}{2}.$$

**11.12. Частные случаи треугольников** см. в табл. на с. 118, 119.

## Четырехугольник

**11.13. Обозначения. Основные свойства** (рис. 29). Обозначения: $a$, $b$, $c$, $d$ — стороны; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — внутренние углы; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$ — внешние углы; $a+b+c+d=2p$ — периметр ($p$ — полупериметр); $\varphi$ — угол между диагоналями; $S$ — площадь; $\psi$ — полусумма противоположных углов;

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°;\quad \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360°.$$

*Диагональ* $(l, f)$ — отрезок, соединяющий противоположные вершины.

$h_1$, $h_2$ — высоты, опущенные на одну диагональ.

$$S=\frac{1}{2}(h_1+h_2)f=\frac{1}{2}lf\sin\varphi=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\varphi};$$

$$S^2=\frac{1}{16}(2lf+a^2+c^2-b^2-d^2)(2lf-a^2-c^2+b^2+d^2).$$

**11.14. Частные случаи четырехугольников** см. в табл. на с. 120—122.

## Многоугольник

**11.15. Основные свойства.** Сумма внутренних углов равна $180°(n-2)$. Сумма внешних углов равна 360°.

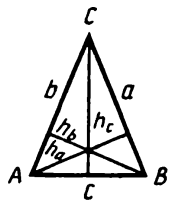
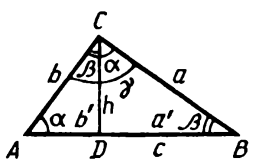
*Диагональ* выпуклого многоугольника — отрезок, соединяющий две вершины $n$-угольника, не принадлежащие общей стороне.

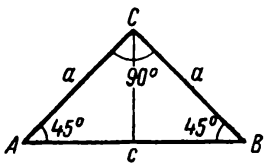
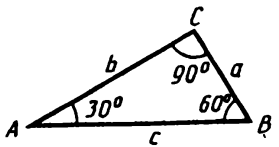
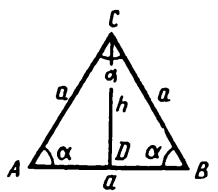
Число диагоналей выпуклого $n$-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

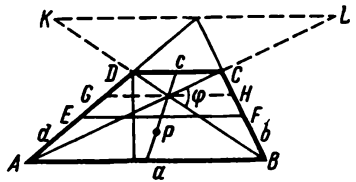
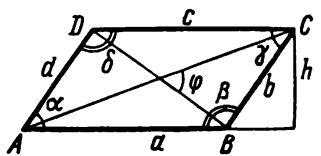
Площадь $S$ $n$-угольника вычисляется как сумма $S_k$ площадей треугольников или трапеций, на которые он разбивается (рис. 30).

$$S=\Sigma S_k.$$

## Частные случаи треугольников

| Треугольник | Определения, обозначения | Свойства и соотношения |
|---|---|---|
| Равнобедренный<br>  <br> | $a = b$<br>$a$, $b$ — боковые стороны;<br>$c$ — основание | $\alpha = \beta$ (углы при основании равны); $h_c = m_c = w_\gamma$ (высота, медиана и биссектриса, пересекающие основание, совпадают)<br>$h_a = h_b = \frac{2S}{a}$; $h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$,<br>$S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$; $R = \frac{a^2}{2h_c}$;<br>$r = \frac{c(2a - c)}{4h_c}$; $r_c = \frac{c(2a + c)}{4h_c}$ |
| Прямоугольный<br>  <br> | $\gamma = 90°$<br>$a$, $b$ — катеты<br>$c$ — гипотенуза<br>$h$ — высота<br>$a'$ — проекция на $a$<br>$b'$ — проекция $b$ на $c$ | $a^2 + b^2 = c^2$ (*теорема Пифагора*); $\alpha + \beta = 90°$.<br>Треугольники $ADC$, $DBC$ и $ABC$ подобны (у них равны по два угла при гипотенузе).<br>$a^2 = ca'$, $b^2 = cb'$, $h^2 = a'b'$, $S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$.<br>Центр тяжести отстоит от сторон $a$, $b$ и $c$ на расстоянии $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}a$ и $\frac{1}{3}h$ соответственно.<br>$m_c = \frac{1}{2}c = R$. |

| | | |
|---|---|---|
| **Равнобедренный прямоугольный**<br>  | $a = b$<br>$\gamma = 90°$ | $a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}$; $h = \frac{c}{2}$; $S = \frac{c^2}{4} = \frac{a^2}{2}$;<br>$\alpha = \beta = 45°$ |
| **Прямоугольный с углом в 30°**<br>  | $\gamma = 90°$<br>$\alpha = 30°$ | $\beta = 60°$; $a = \frac{c}{2}$; $b = \frac{c\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$;<br>$S = \frac{\sqrt{3}}{8} c^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{b^2\sqrt{3}}{6}$ |
| **Равносторонний**<br>  | $a = b = c$ | $\alpha = \beta = \gamma = 60°$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;<br>$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, |

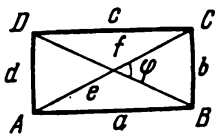
| Фигура | Определение | Свойства и соотношения |
|---|---|---|
| Трапеция  | $c \parallel a$<br>$c$, $a$ — основания,<br>$b$, $d$ — боковые стороны | *Средняя линия* $m$ (отрезок $EF$, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме:<br>$m=\frac{a+c}{2}$, $S=mh=\frac{a+b}{2}h=\frac{1}{2}lf\sin\varphi$;<br>$l=ac+\frac{d^2a-b^2c}{a-c}$; $f=ac+\frac{b^2a-d^2c}{a-c}$;<br>$S=\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(p-a)(p-c)(p-c-d)(p-c-b)}$.<br>Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем середины оснований на расстоянии $\frac{h}{3}\frac{a+2c}{a+c}$ от нижнего основания;<br>$GH=\frac{2ab}{a+b}$; $KL=\frac{2ab}{a-b}$;<br>$\alpha+\delta=\beta+\gamma=180°$. |
| Равнобочная трапеция | $c \parallel a$, $b=d$ | $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$. |
| Параллелограмм  | $a \parallel c$, $b \parallel d$ | $a=c$, $b=d$; $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$;<br>$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha=180°$.<br>Диагонали, пересекаясь, делятся пополам; точка пересечения диагоналей — центр тяжести. |

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2a^2+2b^2=l^2+f^2$$

(сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей).

$$S=ab\sin\alpha=ah=\frac{1}{2}lf\sin\varphi.$$

**Прямоугольник**

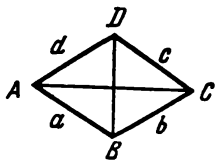



$a\parallel c,\ b\parallel d$
$\alpha=90°$

$a=c,\ b=d,\ \alpha=\beta=\gamma=\delta=90°;$
$l=f$ (диагонали равны);

$$S=ab=\frac{1}{2}l^2\sin\varphi$$

**Ромб**

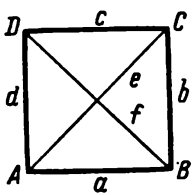



$a\parallel c,\ b\parallel d,\ a=b$

$a=b=c=d$ (все стороны равны);
$\varphi=90°$ (диагонали пересекаются под прямым углом);

$$S=\frac{1}{2}lf=a^2\sin\alpha$$

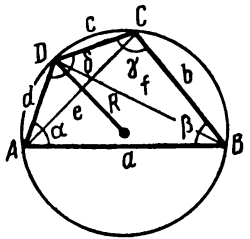
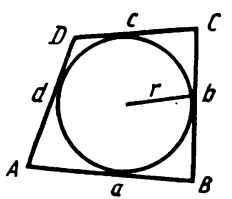
**Квадрат**




$a\parallel c,\ b\parallel d,$
$a=b,\ \alpha=90°$

Все стороны равны и все углы прямые.

$$l=f=a\sqrt{2},\ S=a^2=\frac{1}{2}l^2$$

| Фигура | Определение | Свойства и соотношения |
|---|---|---|
| Четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями | $l \perp f$ | $S = \frac{lf}{2}$ |
| Вписанный четырехугольник   | Вершины лежат на одной окружности | $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$; $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; $ac + bd = lf$ (*теорема Птолемея*); $R$ — радиус описанной окружности: $R = \frac{1}{4S}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$; $l = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$; $f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$; |
| Описанный четырехугольник   | Все стороны касаются одной окружности | $a + c = b + d$; $S = rp$ |

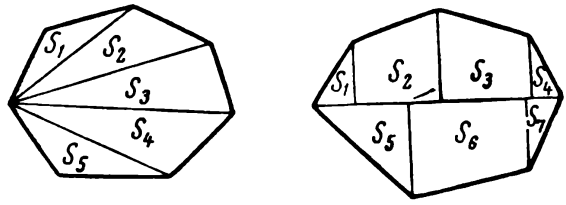



Рис. 30

**11.16. Правильные многоугольники.** *Правильным* называется выпуклый многоугольник, все стороны и углы которого равны.

Обозначения: $c_n$ — сторона правильного $n$-угольника; $c_{2n}$ — сторона правильного $2n$-угольника; $R$ — радиус описанной окружности; $r_n$ — радиус вписанной окружности (апофема); $\alpha_n$ — внутренний угол; $\alpha'_n$ — внешний угол; $S_n$ — площадь; $a$ — диагональ; $h$ — высота.

Около правильного многоугольника можно описать окружность, центр которой одновременно является центром вписанной окружности и центром тяжести $n$-угольника.

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ;\quad \alpha'_n = \frac{360^\circ}{n};\quad \alpha_n + \alpha'_n = 180^\circ;$$

$$r_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c_n^2};$$

$$c_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - c_n^2}};\quad c_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2Rr_n};$$

$$S_n = \frac{nc_n r_n}{2} = \frac{nc_n\sqrt{4R^2 - c_n^2}}{4} = \frac{nR^2}{2}\sin\alpha'_n.$$

**11.17. Соотношения в правильных многоугольниках** см. в табл. на с. 124, 125.

## Круг

**11.18. Элементы круга.**

*Окружность* — замкнутая кривая, все точки которой равноудалены от некоторой фиксированной точки $O$ на расстояние $r \neq 0$.

*Центр* — точка $O$ (см. окружность).

*Круг* — часть плоскости, ограниченная окружностью.

*Радиус* — отрезок, соединяющий центр с любой точкой окружности (обозначается $r$, $R$).

*Секущая* — прямая, проходящая через две точки $M$ и $N$ окружности ($M \neq N$).

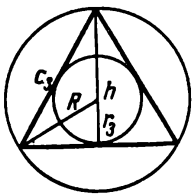
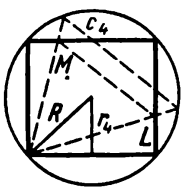
*Хорда* — отрезок $MN$, соединяющий две точки $M$ и $N$ окружности ($M \neq N$).

*Диаметр* — хорда, проходящая через центр (обозначается $d$, $D$). Диаметр равен двум радиусам ($D = 2R$).

*Касательная** — прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. (построение см. в п. 12.11).

* Определение касательной к произвольной кривой см. в п. 29.1.

## Соотношения в правильных многоугольниках

| Правильный многоугольник | Сторона, угол | Радиус описанной окружности | Радиус вписанной окружности (апофема) | Площадь |
|---|---|---|---|---|
| Треугольник  | $c_3 = R\sqrt{3}$; $h = \frac{c_3}{2}\sqrt{3} = \frac{3R}{2} = 3r_3$; $\alpha_3 = 60°$; $\alpha_3' = 120°$ | $R = \frac{c_3\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}h = 2r_3$ | $r_3 = \frac{R}{2} = \frac{c_3\sqrt{3}}{6} = \frac{h}{3}$ | $S_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} = \frac{c_3^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = 3r_3^2\sqrt{3}$ |
| Квадрат  | $c_4 = R\sqrt{2}$; $\alpha_4 = \alpha_4' = 90°$ | $R = \frac{c_4}{2}\sqrt{2} = r_4\sqrt{2}$; $ML = R(\sqrt{3} - 1)$ | $r_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{c_4}{2}$ | $S_4 = 2R^2 = c_4^2 = 4r_4^2$ |
| Пятиугольник | $c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2r_5\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$; $\alpha_5 = 108°$; $\alpha_5' = 72°$ | $R = \frac{c_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = r_5(\sqrt{5} - 1)$ | $r_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1) = \frac{c_5}{10} \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ | $S_5 = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{c_5^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 5r_5^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Шестиугольник**<br> | $c_6 = R = \frac{2}{3} r_6 \sqrt{3}$;<br>$\alpha_6 = 120°$;<br>$\alpha'_6 = 60°$ | $R = c_6$ | $r_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{c_6\sqrt{3}}{2}$ | $S_6 = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3} =$<br>$= \frac{3}{2} c_6^2 \sqrt{3} =$<br>$= 2r_6^2 \sqrt{3}$ |
| **Восьмиугольник**<br> | $c_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} =$<br>$= 2r_8(\sqrt{2}-1)$;<br>$\alpha_8 = 135°$;<br>$\alpha'_8 = 45°$ | $R = \frac{c_8}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} =$<br>$= r_8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ | $r_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} =$<br>$= \frac{c_8}{2}(\sqrt{2}+1)$ | $S_8 = 2R^2\sqrt{2} =$<br>$= 2c_8^2(\sqrt{2}+1) =$<br>$= 8r_8^2(\sqrt{2}-1)$ |
| **Десятиугольник**<br> | $c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) =$<br>$= \frac{2r_{10}}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$.<br>$\alpha_{10} = 144°$;<br>$\alpha'_{10} = 36°$ | $R = \frac{c_{10}}{2}(\sqrt{5}+1) =$<br>$= \frac{r_{10}}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$ | $r_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} =$<br>$= \frac{c_{10}}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ | $S_{10} = \frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} =$<br>$= \frac{5}{2} c_{10}^2 \sqrt{5+2\sqrt{5}} =$<br>$= 2r_{10}^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$ |

*Сегмент* — часть круга, отсекаемая хордой.

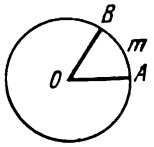
*Стрелка дуги* / *Высота сегмента* — отрезок радиуса от середины хорды до пересечения с дугой.

*Сектор* — часть круга, ограниченная двумя радиусами.

*Концентрические окружности* — окружности с общим центром.

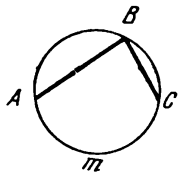
*Кольцо* — часть плоскости между двумя концентрическими окружностями.

**11.19. Углы и окружность.**



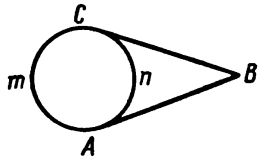

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$



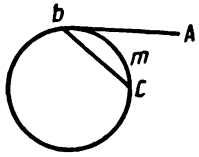

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$



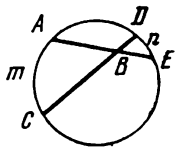

Описанный угол (угол между двумя касательными) измеряется полуразностью образованных им дуг:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$



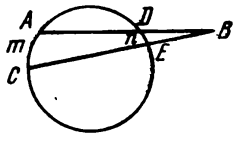

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$



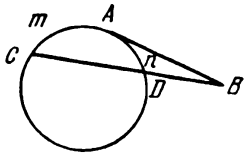

Угол между двумя хордами $AE$ и $CD$ измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup EnD).$$




Угол между секущими измеряется полуразностью заключенных между ними дуг:

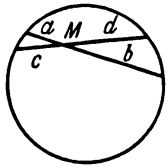
$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup DnE).$$




Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых дуг, прилежащих к касательной:

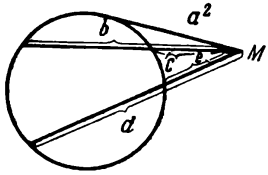
$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnD).$$

**11.20. Пропорциональные отрезки.**




$M$ — точка внутри круга, через которую проведены две хорды:

$$ab = cd.$$




$M$ — точка вне круга, из которой проведены касательная и две секущих:

$$a^2 = bc = de.$$

**11.21. Соотношения.** Отношение длины окружности $C$ к ее диаметру $D$ есть величина постоянная, равна 3,14159.... Это число иррациональное, оно обозначается греческой буквой $\pi$:

$$C = 2\pi R = \pi D.$$

Длина дуги окружности: $C = \frac{\pi R\varphi}{180^\circ}$ ($\varphi$ в градусах); $C = R\varphi$ ($\varphi$ — в радианах).

Длина хорды: $l = 2\sqrt{hR - h^2}$ ($h$ — стрелка).

Высота сегмента: $h = R - \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$.

Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{RC}{2}$ ($C$ — длина окружности),

Площадь сектора: $S = \frac{RC}{2} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360^\circ}$ ($\varphi$ — в градусах, $C$ — длина дуги).

Площадь кольца: $S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$ ($r$ и $d$ относятся к меньшей окружности).

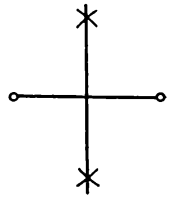
Площадь кольцевого сектора: $S = \pi \frac{\varphi(R^2 - r^2)}{360^\circ}$ ($\varphi$ — в градусах).

Площадь сегмента: $S = \frac{R(l - a) + ah}{2}$ ($l$ — дуга; $a$ — хорда; $h$ — стрелка).

## 12. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

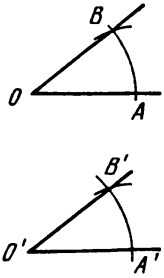
### Элементарные построения

**12.1. Перпендикуляр к отрезку в его середине.**



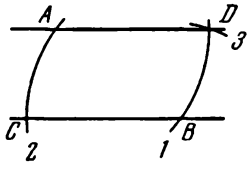
Одинаковым раствором циркуля проводим дуги с центрами в концах отрезка так, чтобы эти дуги пересекались. Прямая, проходящая через точки пересечения засечек, — искомый перпендикуляр.

**12.2. Угол, равный данному.** На луче $O'A'$ построить угол, равный данному углу $AOB$



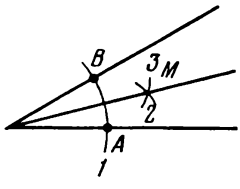

Данный угол $AOB$ «измеряем» дугой $AB$ произвольного радиуса $R$ и расстоянием $a$ между точками $A$ и $B$. Далее проводим дугу радиуса $R$ с центром в вершине $O'$ данного луча $O'A'$, а из точки $A'$ раствором циркуля радиуса $a$ делаем засечку на дуге. Угол $A'O'B'$ искомый.

**12.3. Прямая, параллельная данной.** Через точку $A$ провести прямую, параллельную данной прямой.




Описываем дугу произвольным радиусом с центром в точке $A$. Тем же радиусом описываем дугу с центром в точке $B$. На первой дуге из точки $B$ раствором циркуля радиуса $AC$ делаем засечку и получаем точку $D$. Прямые $AD$ и $BC$ параллельны. (Радиус дуги больше расстояния от точки $A$ до прямой $AC$.)

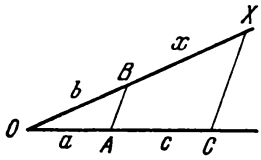
**12.4. Биссектриса угла.** Разделить данный угол пополам.




Из вершины произвольным радиусом проводим дугу $AB$. Из точек $A$ и $B$ достаточно большим радиусом (например, $AB$) делаем засечки. Точка $M$ пересечения засечек лежит на биссектрисе.

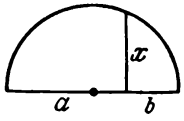
**12.5. Четвертый пропорциональный отрезок.** По данным отрезкам $a$, $b$, $c$ построить отрезок $x$ такой, что $a:b=c:x$.

На одной стороне произвольного угла откладываем отрезки $a$ и $c$, а на другой — отрезок $b$. Через точку $C$ проводим прямую, параллельную $AB$ (см. задачу из п. 12.3). Отрезок $BX=x$ — искомый.



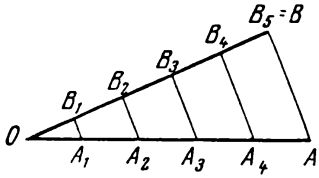

**12.6. Средний пропорциональный отрезок.** По двум отрезкам $a$ и $b$ построить отрезок $x$ такой, что $a:x=x:b$.

На отрезке, равном сумме $a$ и $b$, как на диаметре, строим окружность. (Для этого делим отрезок пополам, используя решение задачи из п. 12.1.) Перпендикуляр $x$ будет искомым отрезком.



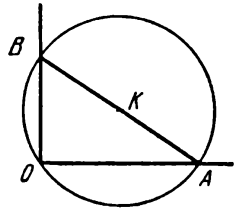

**12.7. Деление отрезка на равные части.**

Под некоторым углом к данному отрезку проводим луч и откладываем на нем столько равных отрезков $OB_1$, $B_1B_2$, $B_2B_3$, ..., на сколько частей нужно разделить $OA$. Соединяем последнюю точку $B$ с точкой $A$. Через $B_1$, $B_2$, $B_3$, ... проводим прямые, параллельные $AB$ (см. задачу из п. 12.3). $A_1$, $A_2$, $A_3$, .... — искомые точки деления.




**12.8. Перпендикуляр в конце луча.** К данному лучу $OA$, не продолжая его, восставить перпендикуляр в точке $O$.

Возьмем вне луча какую-либо точку $K$ так, чтобы окружность с центром в точке $K$ и радиусом $OK$ пересекала луч $OA$ в некоторой точке $A$. Через точку $A$ проведем диаметр $AB$. $OB$ — искомый перпендикуляр.



**12.9. Золотое сечение.** Разделить отрезок $AB=a$ в среднем и крайнем отношении: $a:x=x:(a-x)$.

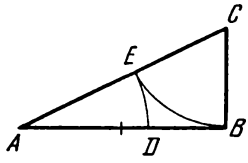
Находим

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Строим отрезок $CB$, перпендикулярный к $AB$ и равный $a/2$.

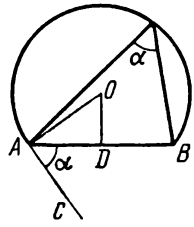
$$CE=\frac{a}{2};\ AD=AE=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

— искомая величина.



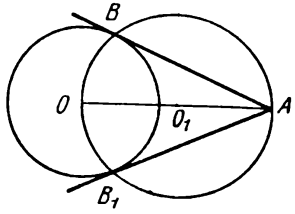

**12.10. Сегмент, вмещающий данный угол.** На данном отрезке построить сегмент, все вписанные углы которого, опирающиеся на $AB$, равны $\alpha$.

Строим угол $BAC$, равный $\alpha$, с вершиной в точке $A$ ($AB$ — сторона этого угла). Центр $O$ искомого сегмента — пересечение перпендикуляра $OD$ к середине отрезка $AB$ и перпендикуляра $OA$ к стороне $AC$ угла $BAC$ (см. п. 12.8).




**12.11. Касательная к окружности.** Через точку $A$ вне окружности провести касательную к ней.

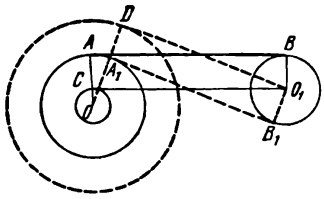
На отрезке $OA$, как на диаметре, строим окружность с центром в точке $O_1$. Точки $B$ и $B_1$ лежат на касательных.




**12.12. Общая касательная к двум окружностям.**

Можно построить две внешние касательные (обе окружности лежат по одну сторону) и две внутренние (окружности лежат по разные стороны — на рисунке показаны штриховой линией).

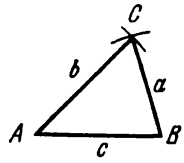
Строим окружность с центром в точке $O$ и радиусом, равным разности (для




внутренней касательной — сумме) радиусов данных окружностей. К построенной окружности проводим касательную $O_1C$ (соответственно $O_1D$). Касательные $AB$ и $A_1B_1$ параллельны соответственно $O_1C$ и $O_1D$. Две другие касательные симметричны относительно $OO_1$.

## Построение треугольника

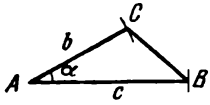
**12.13. По трем сторонам.**




Из концов отрезка $AB$, равного одной из сторон треугольника, делаем засечки радиусами, равными двум другим сторонам.

Задача имеет решение, если данные отрезки удовлетворяют неравенствам треугольника (см. п. 11.6).

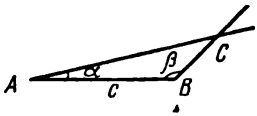
**12.14. По двум сторонам и углу между ними.**




Построив угол $BAC$, равный данному, откладываем на его сторонах два данных отрезка.

Задача имеет решение всегда.

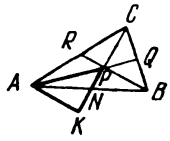
**12.15. По стороне и прилежащим к ней углам.**




При каждом из концов отрезка $AB$, равного данной стороне, строим по одному данному углу.

Задача имеет решение, если один из углов острый.

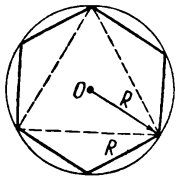
**12.16. По трем медианам.**




Если медиану $CN$ продолжить на отрезок $NK$, равный $PN$, то получим треугольник $APK$, каждая из сторон которого равна $^2/_3$ соответствующей медианы. Задача сводится к задаче п. 12.3.

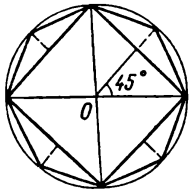
## Построение правильных многоугольников

**12.17. Треугольник и шестиугольник.**



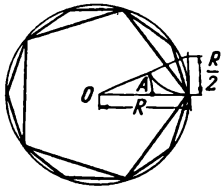

Делая на окружности последовательные засечки радиусом $R$, получим шесть вершин правильного шестиугольника. Соединяя вершины через одну, построим правильный треугольник.

**12.18. Квадрат и восьмиугольник.**




Два взаимно перпендикулярных диаметра пересекают окружность в вершинах квадрата. Повернув диаметры на 45° (или разделив углы между ними пополам), получим восемь точек, являющихся вершинами правильного восьмиугольника.

**12.19. Пятиугольник и десятиугольник.**




Разделив радиус в среднем и крайнем отношении (см. п. 12.9), получим отрезок $OA$, равный стороне правильного вписанного десятиугольника. Соединяя вершины десятиугольника через одну, построим правильный пятиугольник.

## 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

При решении геометрических задач используются геометрические преобразования: параллельный перенос, симметрия, подобие.

**13.1. Параллельный перенос.** На плоскости задано направление $NN'$. Говорят, что фигура $F'$ получается из фигуры $F$ *параллельным переносом* в направлении $NN'$ на расстояние $a$ (рис. 31), если каждая точка $A'$ фигуры $F'$ отстоит от соответствующей точки $A$ фигуры $F$ на расстояние $a$ и прямая $AA' \parallel NN'$.

Два последовательных параллельных переноса дают «в сумме» новый параллельный перенос.

Параллельный перенос переводит прямую $l$ в параллельную ей прямую $l'$, а окружность — в равную ей окружность.

**Пример 1.** Два завода $A$ и $B$ разделены рекой ширины $d$, берега которой параллельны. В каком месте следует построить мост, перпендикулярный берегам реки, чтобы путь из $A$ и $B$ был кратчайшим?

Если путь $AMNB$ — кратчайший, то, перенеся отрезок $MN$ параллельно самому себе вдоль $AM$ (рис. 32), видим, что путь $AN'NB$ имеет ту же длину. Отсюда простое построение: откладываем

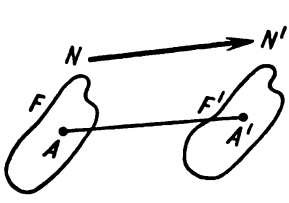



Рис. 31

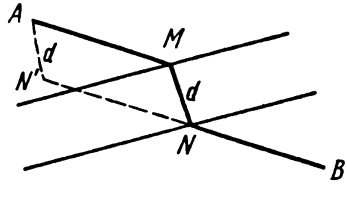



Рис. 32

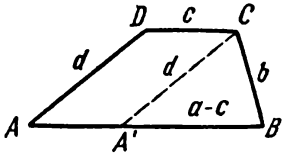



Рис. 33

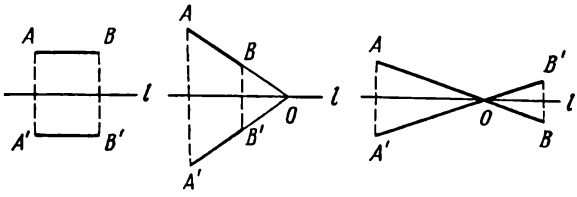



Рис. 34

Рис. 35

отрезок $AN'$, перпендикулярный берегам реки и равный $d$; точка $N$ пересечения отрезка $N'B$ с дальним от $N'$ берегом реки — конец искомого моста. Проведя $AM \| NB$, найдем точку $M$ (второй конец моста).

**Пример 2.** Построить трапецию по основаниям $a$ и $c$ $(a > c)$ и боковым сторонам $b$ и $d$.

Предположим, что трапеция $ABCD$ со сторонами $a$, $b$, $c$, $d$ построена (рис. 33). Перенесем сторону $AD$ трапеции параллельно самой себе в положение $A'C$ и получим треугольник $A'BC$ с тремя известными сторонами $b$, $d$, $a - c$.

Строим треугольник $A'BC$ по трем сторонам $a - c$, $b$, $d$ (см. п. 12.13). На продолжении стороны $A'B$ откладываем отрезок $AA'$ длиной $c$. Из точек $A$ и $C$ проводим прямые, параллельные соответственно $A'C$ и $AB$, точка пересечения которых — вершина $D$.

Задача имеет решение, если отрезки $d$, $b$ и $a - c$ удовлетворяют неравенствам треугольника (см. п. 11.6).

**13.2. Осевая симметрия.** Точка $A'$ называется *симметричной* точке $A$ относительно прямой $l$ (оси симметрии), если отрезок $AA'$ перпендикулярен прямой $l$ и делится ею пополам.

Совокупность всех точек, симметричных точкам некоторой фигуры $F$ относительно прямой $l$, образует фигуру $F'$, *симметричную фигуре $F$ относительно $l$* (рис. 34).

Свойство симметрии фигур взаимно.

Все точки фигуры $F$, лежащие на оси симметрии, при преобразовании симметрии остаются неподвижными.

Отрезки $AB$ и $A'B'$ на рис. 34 симметричны друг другу.

**Пример.** Луч света, выйдя из точки $M$, отразился от зеркала и попал в точку $N$. Построить путь луча.

Р е ш е н и е. Проделаем следующее построение. Найдем точку $N'$, симметричную точке $N$ относительно оси $l$ (рис. 35). Соединим отрезками точку $N'$ с точкой $M$, а точку $P$ с точкой $N$. Путь $MPN$ будет кратчайшим, так как $PN = PN'$, а $MPN'$ — прямая.

**13.3. Подобие. Центральная симметрия.** Точка $A'$ называется *центрально-подобной* (или *гомотетичной*) точке $A$ относительно *центра подобия $O$ с коэффициентом подобия $k$*, если $A'$ лежит на прямой $OA$ и $OA'/OA = k$ (рис. 36). Если точки $A$ и $A'$ лежат по одну сторону

Рис. 36

от центра подобия $O$, то числу $k$ приписываем знак «+», если по разные стороны, то знак «—».

Совокупность всех точек, центрально-подобных точкам некоторой фигуры $F$, образует фигуру $F'$ (см. рис. 36), *центрально-подобную* $F$ (относительно центра подобия $O$ с коэффициентом подобия $k$).

Преобразование фигуры $F$ в фигуру $F'$ называется *центрально-подобным преобразованием* или *гомотетией*.

Свойства гомотетии.

1. Если $F$ гомотетично $F'$ относительно центра $O$ с коэффициентом $k$, то $F'$ гомотетично $F$ относительно того же центра с коэффициентом $1/k$.

2. Гомотетия переводит прямую $AB$ в прямую $A'B'$, ей параллельную (см. рис. 36).

3. Гомотетия сохраняет все углы.

4. Гомотетия сохраняет отношение любых отрезков и площадей.

Преобразование подобия с коэффициентом подобия «—1» называется *центральной симметрией*. Можно дать самостоятельное определение центральной симметрии.

Точка $A'$ называется *симметричной* точке $A (A \neq A')$ относительно *центра симметрии* $O$, если отрезки $OA$ и $OA'$ равны и лежат на одной прямой.

Совокупность всех точек, симметричных точкам фигуры $F$ относительно центра симметрии $O$, образует фигуру $F'$, симметричную фигуре $F$ относительно $O$ (рис. 37).

Признаки подобия треугольников*. Два треугольника $ABC$ и $A'B'C'$ подобны, если выполняется одно из следующих условий:

1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого:

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta'.$$

2. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

3. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}; \ \gamma = \gamma'.$$

---

* Два треугольника $F$ и $F'$ называются *подобными*, если их можно расположить так, что найдутся точка $O$ — центр подобия и число $k$ — коэффициент подобия такие, при которых треугольники $F$ и $F'$ удовлетворяют определению, данному выше.

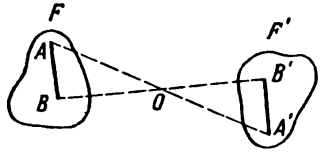



Рис. 37

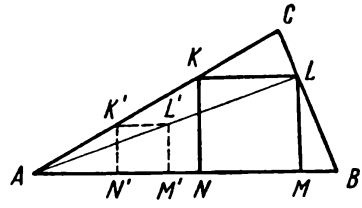



Рис. 38

**Пример.** Вписать в данный треугольник $ABC$ квадрат $KLMN$ так, чтобы сторона $MN$ лежала на основании $AB$, а вершины $K$ и $L$ — на боковых сторонах треугольника.

Р е ш е н и е. Строим некоторый квадрат $K'L'M'N'$ так, чтобы $K'$ лежала на $AC$, а $N'M'$ на $AB$ (рис. 38). Искомый квадрат получается из данного преобразованием подобия с центром в точке $A$ (доказать!). Поэтому вершина $L$ лежит на пересечении прямой $AL'$ со стороной $BC$. Найдя точку $L$, построить искомый квадрат не составляет труда.

**13.4. Инверсия.** На плоскости задана окружность с центром в точке $O$ и радиусом $R$. *Инверсия* плоскости относительно этой окружности — преобразование плоскости, при котором каждой ее точке $P$ ставится в соответствие точка $P'$, лежащая на луче $OP$, и такая, что $OP \cdot OP' = R^2$. Точка $P'$ называется *инверсной* или *обратной* точке $P$ относительно данной окружности. Данная окружность называется *базисной*, ее центр — *центром инверсии*, $R$ — *радиусом инверсии*.

С в о й с т в а и н в е р с и и. Если точка $P'$ инверсна точке $P$, то и обратно: точка $P$ инверсна точке $P'$. Никакая точка плоскости не инверсна центру $O$ инверсии. Если фигура $\Phi$ переходит при инверсии в фигуру $\Phi'$, то при той же инверсии фигура $\Phi'$ переходит в фигуру $\Phi$.

Следующие свойства справедливы на плоскости, из которой «выколот» центр инверсии. Точки, лежащие внутри базисной окружности, переходят при инверсии в точки, лежащие вне этой окружности; точки, лежащие вне базисной окружности, переходят в точки, лежащие внутри этой окружности; точки, лежащие на базисной окружности, остаются на месте. Преобразование инверсии взаимно однозначно.

При инверсии луч, проходящий через центр инверсии, преобразуется в себя: часть луча, лежащая внутри окружности, преобразуется в его внешнюю часть, и наоборот. Окружность, концентрическая базисной, переходит в окружность, концентри-

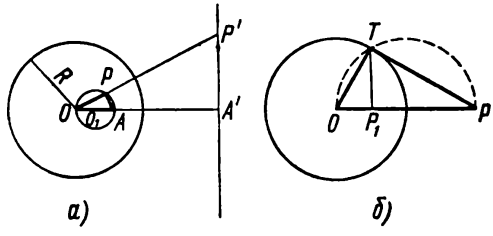



Рис. 39

ческую базисной. Окружность с центром в точке $O_1$, проходящая через $O$, переходит в прямую $P'A'$, перпендикулярную $O_1O$. Прямая $P'A'$, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. Центр $O_1$ этой окружности лежит на перпендикуляре, опущенном из $O$ на прямую $P'A'$ (рис. 39, *а*). Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность. Окружность, пересекающая базисную под прямым углом, переходит в себя.

Построение инверсной точки. 1. Данная точка $P$ лежит вне базисной окружности (рис. 39, *б*). Центр $O$ инверсии соединяем с точкой $P$. На отрезке $OP$, как на диаметре, строим окружность. Из точки $T$ ее пересечения с базисной окружностью опускаем перпендикуляр на $OP$. Основание $P_1$ этого перпендикуляра и есть точка, инверсная данной точке $P$.

2. Данная точка $P_1$ лежит внутри базисной окружности (см. рис. 39, *б*). Проведем прямую $OP_1$. В точке $P_1$ строим прямую, перпендикулярную $OP$. В точке $T$ пересечения этого перпендикуляра с базисной окружностью строим касательную к последней. Точка $P$ пересечения касательной с прямой $OP_1$ и будет инверсной точке $P_1$.

## 14. ФИГУРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

**14.1. Прямые и плоскости. Углы.** Две прямые в пространстве могут: а) пересекаться; б) не пересекаться, но лежать в одной плоскости (*параллельные* прямые); в) не пересекаться и не лежать в одной плоскости (*скрещивающиеся* прямые).

Если на каждой из скрещивающихся прямых задано направление, то *углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между сонаправленными каждой из этих прямых лучами, проходящими через общую точку.

Прямая *параллельна* плоскости, если она не имеет с ней общих точек. Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.

*Ортогональная проекция точки на плоскость* — основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость (точка не принадлежит плоскости).

*Проекция* (ортогональная) отрезка на плоскость — отрезок прямой, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных на эту плоскость из концов данного отрезка.

*Ортогональная проекция фигуры* на плоскость — множество ортогональных проекций всех точек данной фигуры на данную плоскость.

*Угол между наклонной и плоскостью* измеряется углом между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Признаки параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

1. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна самой плоскости.

2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти две плоскости параллельны друг другу.

3. Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна и любой прямой этой плоскости.

4. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции другой прямой (не принадлежащей плоскости) на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой прямой.

5. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна другой прямой (не принадлежащей плоскости), то она перпендикулярна и ее проекции на данную плоскость.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре *двугранных угла,* каждый из которых измеряется линейным углом между перпендикулярами к ребру, восставленными в обеих плоскостях из одной точки.

Несколько плоскостей, проходящих через одну точку, образуют *многогранный угол,* если никакие три из них не пересекаются по общей прямой.

**14.2. Многогранники.** *Многогранная поверхность* образована совокупностью конечного числа плоских многоугольников, называемых ее *гранями.* Каждая сторона любого многоугольника — *ребро* одновременно является стороной другого (только одного) многоугольника этой же многогранной поверхности. Любые две точки многогранной поверхности можно соединить ломаной, звенья которой принадлежат ее граням. Вершины граней называются *вершинами* многогранной поверхности. Многогранная поверхность ограничена — существует сфера конечного радиуса $R$, в которую эту поверхность можно поместить.

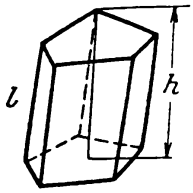
Многогранная поверхность делит пространство на две части — внутреннюю область многогранной поверхности и внешнюю по отношению к ней область. (Во внешней области есть прямые, целиком ей принадлежащие; во внутренней области таких прямых нет.)

*Многогранник* — объединение многогранной поверхности и ее внутренней области. Гранями, ребрами и вершинами многогранника являются грани, ребра и вершины соответствующей многогранной поверхности.

*Выпуклый многогранник* — многогранник, все точки которого лежат по одну сторону от плоскости, содержащей любую из его граней.

Обозначения: $V$ — объем; $S_{осн}$($S_1$ и $S_2$) — площадь основания; $S_{бок}$ — боковая поверхность; $S$ — полная поверхность; $h$ — высота; $Q$ — площадь перпендикулярного сечения; $p$ — периметр перпендикулярного сечения; $l$ — ребро; $d$ — диагональ.

*Призма*

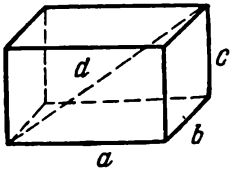



Основания — равные многоугольники, боковые грани — параллелограммы, боковые ребра параллельны;

$$V = S_{\text{осн}}h;\ S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}},\ S_{\text{бок}} = pl.$$

Центр тяжести — середина отрезка, соединяющего центры тяжести оснований.

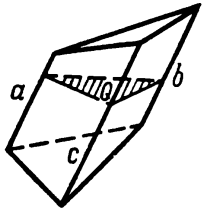
*Параллелепипед*




Все грани — параллелограммы. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники. Для него

$$d^2=a^2+b^2+c^2;$$
$$S=2(ab+ac+bc);$$
$$V=abc.$$

*Усеченная призма*

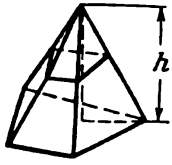



Боковые ребра параллельны;

$$V=Q\frac{a+b+c}{3}$$

($a$, $b$, $c$ — боковые ребра).

*Пирамида*




Основание — многоугольник, боковые грани — треугольники, имеющие общую вершину,

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h,\ S=S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}.$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем вершину с центром тяжести основания и отстоит от основания на расстоянии $h/4$.

Если ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности. Когда в основании такой пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то вершина пирамиды проецируется в середину гипотенузы.

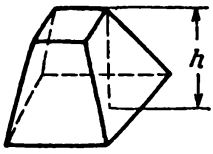
Если грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом, то вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности.

Пирамида называется *правильной,* если в основании ее лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проецируется в центр основания. В правильной пирамиде

$$S_{\text{бок}}=\frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha},$$

где $\alpha$ — угол наклона граней к основанию.

*Усеченная пирамида*




Основания $S_1$ и $S_2$ параллельны;

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2);$$

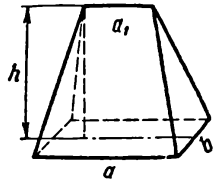
$$S=S_1+S_2+S_{\text{бок}}.$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести оснований и отстоит от большего основания на расстоянии

$$\frac{h}{4}\,\frac{S_1+2\sqrt{S_1S_2}+3S_2}{S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2};$$

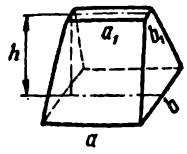
$$V=\frac{h}{6}(2a+a_1)b.$$

*Клин*




Центр тяжести отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{2}\,\frac{a+a_1}{2a+a_1}$.

*Обелиск (усеченный клин)*




Основания параллельны, боковые грани — трапеции;

$$V=\frac{h}{6}[(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1].$$

Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжести оснований, и отстоит от нижнего основания на расстоянии

$$\frac{h}{2}\cdot\frac{ab+ab_1+a_1b+3a_1b_1}{2ab+ab_1+a_1b+2a_1b}.$$

**14.3. Правильные многогранники.** *Правильными* называются выпуклые многогранники, у которых все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Всего имеется пять правильных многогранников.

Обозначения: $V$ — объем; $S$ — поверхность; $a$ — сторона; $R$ — радиус описанной сферы; $r$ — радиус вписанной сферы; $h$ — высота; $d$ — диагональ.

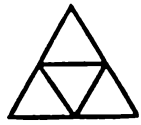
*Тетраэдр*

Все 4 грани — равносторонние треугольники; 4 вершины; 6 ребер;

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=0{,}1179a^3;$$

$$S=a^2\sqrt{3}=1{,}7321a^2;$$

Развертка

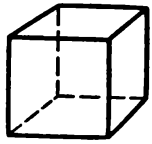


$$r=\frac{a}{12}\sqrt{6};\ R=\frac{a}{4}\sqrt{6};$$

$$h=\frac{a\sqrt{6}}{3};\ \frac{r}{R}=\frac{1}{3}.$$

Центр тяжести отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{4}=\frac{a\sqrt{6}}{12}$. Угол между гранями равен 70°32′.

*Куб (гексаэдр)*

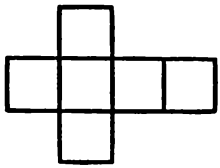


Все 6 граней — квадраты; 8 вершин; 12 ребер;

$$V=a^3;\ S=6a^2;\ d=a\sqrt{3};$$

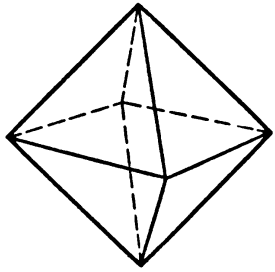
$$r=\frac{a}{2};\ R=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Развертка



Центр тяжести — точка пересечения диагоналей. Угол между гранями равен 90°.

*Октаэдр*



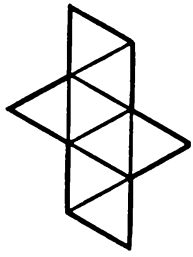
Все 8 граней — равносторонние треугольники; 6 вершин, 12 ребер;

$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}=0{,}4714a^3;$$

$$S=2a^2\sqrt{3}=3{,}4641a^2;$$

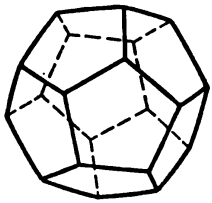
$$R=\frac{a}{2}\sqrt{2};\ r=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Развертка



Центр тяжести — точка пересечения диагоналей «основного» квадрата. Угол между гранями равен 109°28′.

*Додекаэдр*



Все 12 граней — правильные пятиугольники; 20 вершин; 30 ребер;

$$V=\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}=7{,}6631a^3;$$

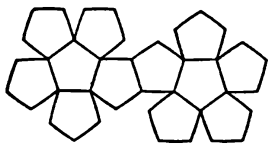
$$S=3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}=20{,}6457a^2;$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4};$$

$$r=\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20};$$

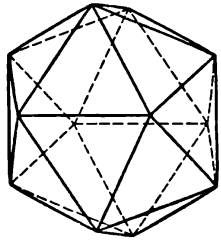
$$r/R=0{,}795.$$

Развертка



Центр тяжести — середина отрезка, соединяющего центры противоположных граней. Угол между гранями равен 116°34′ (180° — arctg 2).

*Икосаэдр*



Все 20 граней — равносторонние треугольники; 12 вершин, 30 ребер;

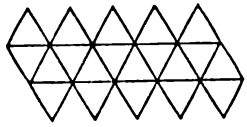
$$V=\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}=2{,}1817a^3;$$

$$S=5a^2\sqrt{3}=8{,}6603a^2;$$

$$R=\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})};$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}.$$

Развертка



Центр тяжести — точка пересечения диагоналей основного шестиугольника. Угол между гранями равен 138°11′.

**14.4. Правильные самопересекающиеся многогранники.** Если стороны правильного многоугольника с числом сторон, большим четырех, продолжить до пересечения с продолжением другой стороны, то можно получить правильный звездчатый многоугольник (рис. 40). Чтобы получить звезду в пространстве, нужно сделать то же самое с правильным многогранником. У самопересекающихся многогранников (они называются также *звездчатыми* и *многогранниками*

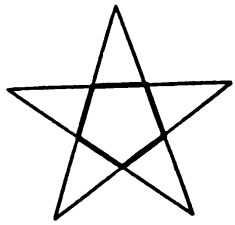
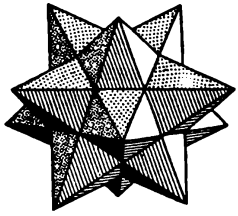


Рис. 40

*Пуансо*) имеется ядро — тот правильный многогранник, из которого получен звездчатый. Возможны всего четыре правильных звездчатых многогранника. Три из них получаются из додекаэдра, а один из икосаэдра.

Обозначения: $A$ — ребро; $a$ — ребро внутреннего правильного многогранника; $R$ — радиус описанной сферы; $r$ — радиус вписанной сферы; $\Theta$ — угол между гранями.

*Малый звездчатый додекаэдр*



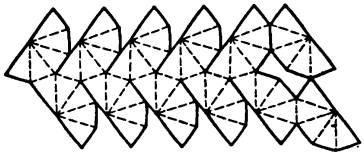
12 граней; 12 вершин; 30 ребер;

$$\frac{A}{a}=2+\sqrt{5}=4{,}236;$$

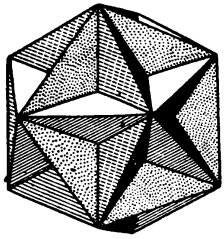
$$\frac{A}{R}=1{,}7013,\ \Theta=116°34';$$

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{5}}=0{,}447.$$

Развертка



*Большой додекаэдр*



12 граней; 12 вершин; 30 ребер;

$$\frac{A}{a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2{,}618;$$

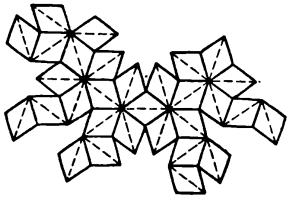
$$\frac{A}{R}=1{,}0515;$$

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{5}}=0{,}447;$$

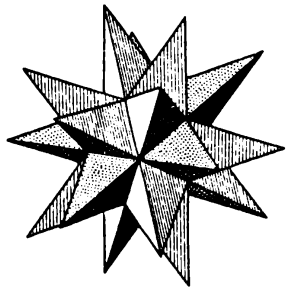
$$\Theta=63°26';$$

$$\frac{A}{r}=2{,}351.$$

Развертка



*Большой звездчатый додекаэдр*



12 граней; 12 вершин; 30 ребер;

$$\frac{A}{a}=4{,}236,\ \frac{A}{R}=1{,}868;$$

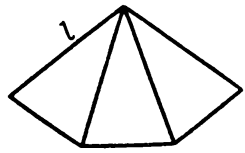
$$\frac{r}{R}=0{,}1876;\ \frac{A}{r}=9{,}957;$$

$$\frac{l}{A}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=0{,}382;$$

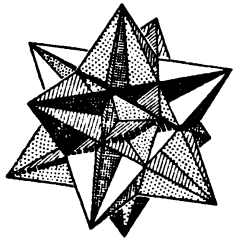
$$\frac{l}{r}=3{,}80;$$

$$\Theta=63°26'.$$

Развертка одной пирамиды




*Большой икосаэдр*



20 граней; 12 вершин; 30 ребер;

$$\frac{A}{a}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}=6{,}854;$$

$$\frac{A}{R}=\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}=1{,}701;$$

$$\frac{r}{R}=(15+6\sqrt{5})^{-1/2}=$$

$$=0{,}1876;$$

$$\Theta=41°49';$$

$$\frac{l}{r}=2\sqrt{3}=3{,}464;$$

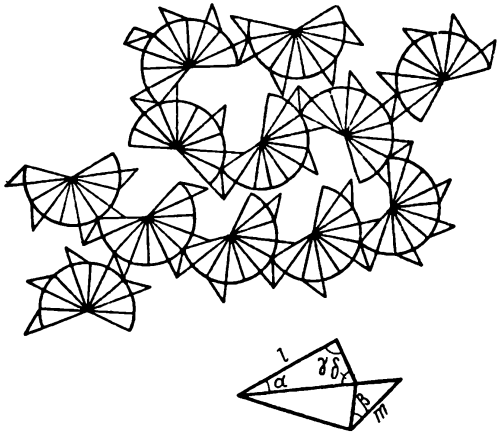
$$\frac{m}{l}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618;$$

$$\alpha=22°14';\ \beta+\gamma=120°;$$

$$\beta=37°46'=60°-\alpha,$$

$$\delta=75°32',\ \gamma=82°14'.$$

Развертка



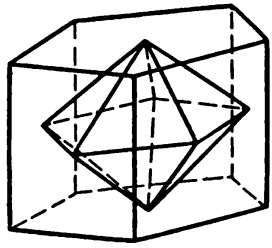


Рис. 41

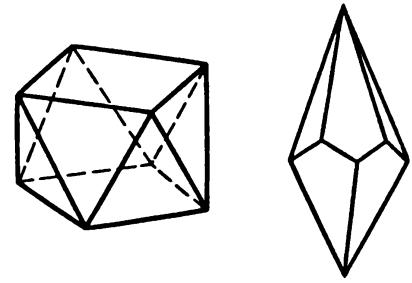


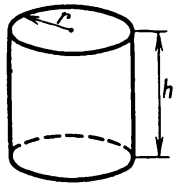
Рис. 42

**14.5. Полуправильные многогранники.** Выпуклый многогранник называется *равноугольно полуправильным* или *архимедовым,* если все его грани — правильные многоугольники, а все многогранные углы равны между собой. Многогранник называется *равногранно полуправильным,* если все его грани равны между собой, а все его многогранные углы правильные. (Многогранный угол называется *правильным,* если все его линейные углы равны между собой и все двугранные углы равны между собой.) Если центры граней архимедова многогранника принять за вершины нового многогранника, то получится равноугольно полуправильный многогранник. Верно и обратное утверждение: центры граней равноугольно полуправильного многогранника являются вершинами архимедова многогранника.

Простейшим примером архимедовых многогранников служит правильная $n$-угольная призма с квадратными боковыми гранями. Двойственной будет фигура, составленная из двух правильных $n$-угольных пирамид, приложенных друг к другу основаниями (рис. 41). Кроме правильных призм, есть только одна бесконечная серия архимедовых многогранников — антипризмы. Простейшей антипризмой является октаэдр. На рис. 42 изображены антипризма и двойственный ей равногранный полуправильный многогранник.

**14.6. Цилиндр, конус.**

*Прямой круговой цилиндр*




Основание — круг, образующая перпендикулярна основанию:

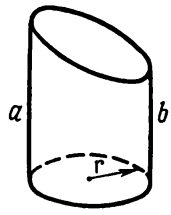
$$V=\pi r^2h=\frac{\pi d^2}{4}h;$$

$$S_{\text{бок}}=2\pi rh=\pi dh;$$

$$S=2\pi r(r+h)=\pi d\left(\frac{d}{2}+h\right)$$

Центр тяжести — середина оси.

*Усеченный прямой круговой цилиндр*




$$V=\frac{\pi r^2}{2}(a+b)=\frac{\pi d^2}{8}(a+b);$$

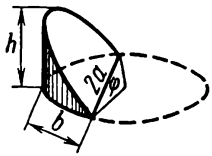
$$S_{бок}=\pi r(a+b)=\frac{\pi d}{2}(a+b);$$

$$S=\pi r\left[a+b+r+\sqrt{r^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}\right].$$

$a$ и $b$ — наибольшая и наименьшая образующие

Центр тяжести лежит на оси, соединяющей центры тяжести оснований, на расстоянии $\frac{a+b}{4}+\frac{1}{4}\frac{r^2\operatorname{tg}^2\alpha}{a+b}$, где $\alpha$ — угол наклона верхнего основания к плоскости нижнего.

*Цилиндрическая подкова*




$$V=\frac{h}{3b}\left[a(3r^2-a^2)+3r^2(b-r)\frac{\varphi\pi}{180^\circ}\right];$$

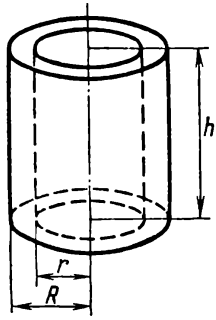
$$S_{бок}=\frac{2rh}{b}\left[(b-r)\frac{\varphi\pi}{180^\circ}+a\right].$$

$h$ — высота; $r$ — радиус основания; $2a$ — прямое ребро; $b$ — стрелка сегмента основания; $2\varphi$ — центральный угол основания (в градусах)

Если в основании полукруг, то

$$V=\frac{2}{3}r^2h,\quad S_{бок}=2rh$$

*Полый цилиндр*



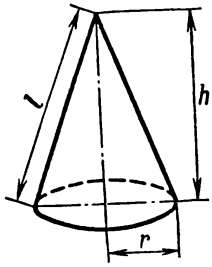

$$V=\pi h(R^2-r^2)=\pi h\delta(2R-\delta)=$$
$$=\pi h\delta(2r+\delta)=2\pi h\delta\rho;$$

$$S_{бок}=2\pi h(R+r);$$

$$S=2\pi(R+r)(h+R-r)=4\pi\rho(h+\delta).$$

$R$ — наружный радиус; $r$ — внутренний радиус; $h$ — высота; $\delta=R-r$ — толщина; $\rho=(R+r)/2$ — средний радиус

*Прямой круговой конус*




$l$ — образующая

Основание — круг, ось перпендикулярна основанию;

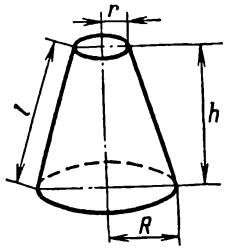
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{12}d^2h;$$

$$S_{бок}=\pi rl;\ l=\sqrt{r^2+h^2};$$

$$S=\pi r(r+l)=\pi\frac{d}{2}\left(\frac{d}{2}+l\right)$$

Центр тяжести лежит на оси на расстоянии $h/4$ от основания.

*Усеченный прямой круговой конус*




$$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rR+R^2)=\frac{1}{12}\pi h(d^2+dD+D^2);$$

$$S_{бок}=\pi l(r+R)=\frac{\pi l}{2}(d+D);$$

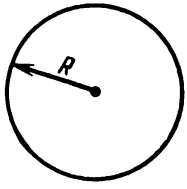
$$l=\sqrt{h^2+(R-r)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+(D-d)^2};$$

$$S=\pi[r^2+R^2+l(r+R)]=\frac{\pi}{4}[d^2+D^2+2l(d+D)].$$

Центр тяжести лежит на оси и отстоит от основания на расстоянии $\frac{h}{4}\frac{R^2+2rR+3r^2}{R^2+rR+2r^2}$.

## 14.7. Шар.

*Шар*




*Полый шар*
$R$ — наружный радиус; $r$ — внутренний радиус; $D$ — наружный диаметр; $d$ — внутренний диаметр

$$V=\frac{3}{4}\pi R^3=\frac{\pi}{6}D^3=\frac{RS}{3}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}};$$

$$S=4\pi R^2=\pi D^2=\sqrt[3]{36\pi V^2};$$

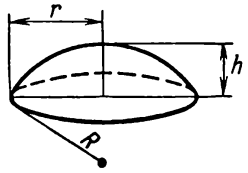
$$R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{4\pi}};$$

$$D=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=2\sqrt{\frac{3V}{4\pi}};$$

$$V=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)=\frac{\pi}{6}(D^3-d^3);$$

$$S=4\pi(R^2+r^2)=\pi(D^2+d^2).$$

*Шаровой сегмент*




$h$ — высота, $r$ — радиус основания

$$V=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)=$$

$$=\frac{1}{6}\pi h^2(3D+2h);$$

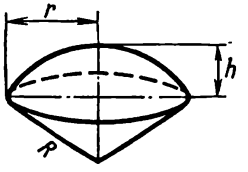
$$S_{бок}=2\pi Rh=\pi Dh=\pi(r^2+h^2);$$

$$S=\pi(2Rh+r^2)=\pi(h^2+2r^2);$$

$$r=\sqrt{h(2R-h)}.$$

Центр тяжести лежит на оси симметрии и отстоит от центра шара на расстоянии $\frac{3}{4}\frac{(2R-h)^2}{3R-h}$.

*Шаровой сектор*



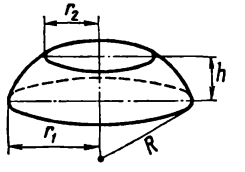

$h$ — высота сегмента, $r$ — радиус основания сегмента

$$V=\frac{2\pi R^2h}{3}=\frac{\pi}{6}D^2h;$$

$$S=\pi R(2h+r).$$

Центр тяжести лежит на оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{3}{8}(2R-h)$ от центра шара.

*Шаровой пояс*




$h$ — высота пояса; $r_1$ и $r_2$ — радиусы оснований

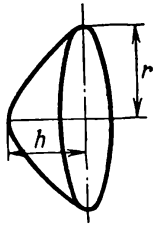
$$V=\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2+3r_2^2+h^2);$$

$$S_{бок}=2\pi Rh=\pi Dh;$$

$$S=\pi(2Rh+r_1^2+r_2^2)=\pi(Dh+r_1^2+r_2^2).$$

### 14.8. Фигуры вращения

*Параболоид вращения*



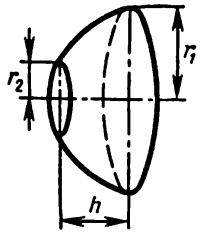

$$V=\frac{1}{2}\pi r^2h.$$

Центр тяжести лежит на оси вращения на расстоянии $\frac{2}{3}h$ от вершины.

*Усеченный параболоид вращения*

$$V=\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)h;$$

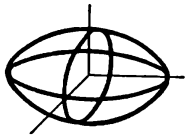
$$V=\frac{4}{3}\pi abc.$$




*Эллипсоид*

Для эллипсоида вращения

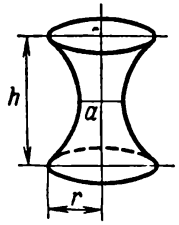
$$V_1=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$



*Гиперболоид*

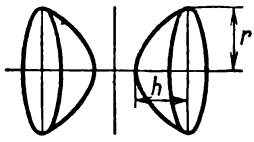
Однополостный

$$V=\frac{\pi h}{3}(2a^2+r^2).$$




Двуполостный

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(3r^2-\frac{b^2h^2}{a^2}\right)$$




$a$, $b$ — полуоси гиперболы

*Бочка*

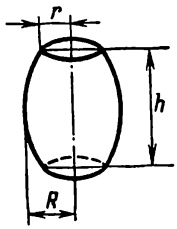
Сферическая

$$V=\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2)=\frac{1}{12}\pi h(2D^2+d^2).$$

Параболическая

$$V=\frac{1}{15}\pi h(8R^2+4Rr+3r^2)=$$

$$=\frac{1}{60}\pi h(8D^2+4dD+3d^2).$$



# IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

## 15. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**15.1. Определения.** Тригонометрические функции острых углов можно определить как отношения длин сторон прямоугольного треугольника (рис. 43):

$$\text{синус: } \sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}};$$

$$\text{косинус: } \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}};$$

$$\text{тангенс: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}};$$

$$\text{котангенс: } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}.$$

В геометрии, как правило, рассматривают углы, не превышающие полного (см. п. 11.1). При этом образующие угол лучи считают равноправными. В тригонометрии определение угла уточняется. Это уже не просто часть плоскости, ограниченная двумя лучами. При задании угла в тригонометрии дополнительно указывается, во-первых, какой из пары образующих угол лучей является первым, во-вторых, направление движения от первого луча ко второму — движение против часовой стрелки считают положительным, а движение по часовой стрелке — отрицательным, в-третьих, если угол больше полного, сколько полных углов он содержит.

Чтобы определить тригонометрические функции для произвольных рассматриваемых в тригонометрии углов, на плоскости вводят систему координат $xOy$ таким образом, чтобы начало координат $O$ совпадало с вершиной угла, а положительная полуось абсцисс — с первым из образующих угол лучей (рис. 44). Пусть $A$ — произвольная точка второго луча; $x$ — ее абсцисса; $y$ — ордината. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = (x, y)$. Длина этого вектора равна $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Независимо от того, какой угол между $Ox$ и $OA$ рассматривается (это может быть угол, для которого направление от полуоси $Ox$ к лучу $OA$ положительно, угол, для которого это направление отрицательно, угол, меньший по абсолютной величине полного, и угол, содержащий несколько полных оборотов, положительных или отрицательных), его тригонометрические функции определяются следующим образом:

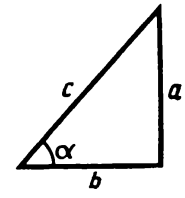


Рис. 43

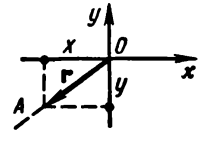


Рис. 44

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ (отношение ординаты вектора $\overrightarrow{OA}$ к его длине);

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ (отношение абсциссы вектора $\vec{OA}$ к его длине);

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x}$ (отношение ординаты вектора $\vec{OA}$ к его абсциссе), $\cos\alpha \neq 0$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$ (отношение абсциссы вектора $\vec{OA}$ к его ординате), $\sin\alpha \neq 0$.

В качестве определений тангенса и котангенса обычно берут их выражения через синус и косинус.

После того как для конкретного угла введена система координат, положительная полуось абсцисс которой совпадает с первым лучом этого угла, второй луч попадает в один из четырех квадрантов или совпадает с одной из координатных полуосей. В тригонометрии квадранты часто называют четвертями.

Синус и косинус определены для любого угла $\alpha$. Тангенс определен для всех значений угла $\alpha$, кроме $\alpha = \pi/2 + \pi n$ ($\alpha = 90° + 180°n$), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ . Котангенс определен для всех значений угла $\alpha$, кроме $\alpha = \pi n$ ($\alpha = 180°n$) $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

Иногда употребляются функции $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$:

секанс: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

косеканс: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ .

**Знаки тригонометрических функций в четырех квадрантах**

| Квадрант | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | + | + | + | + | + | + |
| II | + | − | − | − | − | + |
| III | − | − | + | + | − | − |
| IV | − | + | − | − | + | − |

### 15.2. Основные соотношения.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha$;

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

## Значения тригонометрических функций некоторых углов

| Аргумент | Функция | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | $\infty$ * |
| $15^\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| $18^\circ\left(\frac{\pi}{10}\right)$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ |
| $30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| $36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$ | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ |
| $45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | 1 |
| $54^\circ\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$ |
| $60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $72^\circ\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ | $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ |
| $75^\circ\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ | $2+\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ |
| $90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | 1 | 0 | $\infty$ * | 0 |
| $120^\circ\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $180^\circ\ (\pi)$ | 0 | $-1$ | 0 | $\infty$ * |
| $240^\circ\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| $270^\circ\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ | $-1$ | 0 | $\infty$* | 0 |

* Значок $\infty$ означает в данном случае, что при соответствующем значении аргумента функция не существует, но по мере приближения к этому значению аргумента значение функции неограниченно возрастает по абсолютной величине.

## Выражение одних тригонометрических функций через другие*

| Функции | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $\operatorname{cosec}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$ | $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$ |
| $\cos\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\sec\alpha}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ | $\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ | | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$ | $\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$ |
| $\sec\alpha$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$ | | $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$ |
| $\operatorname{cosec}\alpha$ | $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ | $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$ | $\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$ | |

* Знак перед корнем определяется из таблицы в п. 15.1 в зависимости от того, в каком квадранте расположен аргумент.

Формулы приведения.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$
$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha;$
$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha;$

} $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — функции нечетные.

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha;$

} $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — функции четные.

| Аргумент | Функции | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | tg | ctg | sec | cosec |
| $-\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ |
| $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $\mp\operatorname{ctg}\alpha$ | $\mp\operatorname{tg}\alpha$ | $\mp\operatorname{cosec}\alpha$ | $\sec\alpha$ |
| $\pi\pm\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\operatorname{tg}\alpha$ | $\pm\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\sec\alpha$ | $\pm\operatorname{cosec}\alpha$ |
| $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $\mp\operatorname{ctg}\alpha$ | $\mp\operatorname{tg}\alpha$ | $\pm\operatorname{cosec}\alpha$ | $-\sec\alpha$ |
| $2\pi-\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sec\alpha$ | $-\operatorname{cosec}\alpha$ |

Периодичность. Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ имеют период $2\pi$, а функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ — период $\pi$:

$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;$ $\quad$ $\operatorname{cosec}(\alpha + 2\pi n) = \operatorname{cosec}\alpha;$
$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha;$ $\quad$ $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha;$
$\sec(\alpha + 2\pi n) = \sec\pi;$ $\quad$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha;$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

**15.3. Теоремы сложения.** Функции суммы и разности двух углов.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha;$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\alpha + 1};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

Каждая из формул для тангенса и котангенса справедлива только при условии, что все входящие в нее функции существуют.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$
$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Функции кратных углов.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\sin 4\alpha=\cos\alpha(4\sin\alpha-8\sin^3\alpha);$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=$$
$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{4\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{tg}^3\alpha}{1-6\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1};$$

$$\operatorname{ctg}4\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^4\alpha-6\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{4\operatorname{ctg}^3\alpha-4\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Каждая из формул для тангенса и котангенса справедлива только при условии, что все входящие в нее значения функций существуют.

Функции половинного угла.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Знак перед корнем выбирается в зависимости от того, в каком квадранте оказывается угол $\alpha/2$. Например, при $\alpha=240°$ нужно выбрать знак «+» для $\sin(\alpha/2)$ и знак «—» для $\cos(\alpha/2)$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$, так как $\alpha/2=120°$ лежит во втором квадранте.

Правая и левая части каждой формулы для тангенса и котангенса половинного аргумента должны существовать одновременно.

Произведения тригонометрических функций:

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta);$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta);$$

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin (\alpha + \beta - \gamma) + \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin (\gamma + \alpha - \beta) - \sin (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin (\alpha + \beta - \gamma) - \sin (\beta + \gamma - \alpha) + \sin (\gamma + \alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta - \gamma) + \cos (\beta + \gamma - \alpha) + \cos (\gamma + \alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos (\alpha + \beta - \gamma) + \cos (\beta + \gamma - \alpha) + \cos (\gamma + \alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta + \gamma);$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha); \quad \sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(-\sin 3\alpha + 3 \sin \alpha);$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3);$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos \alpha);$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3);$$

$$\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$$

$$\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta;$$

$$\sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta;$$

$$\sec^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}.$$

Правая и левая части каждой формулы, в которую входят тангенсы и (или) котангенсы, должны существовать одновременно.

Суммы и разности тригонометрических функций.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right);$$

$$\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$p\cos\alpha+q\sin\alpha=r\sin(\alpha+\theta),$$

где $r=\sqrt{p^2+q^2}$; $\sin\theta=\frac{p}{r}$; $\cos\theta=\frac{q}{r}$;

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};\quad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Правая и левая части, в которые входят секансы и косекансы, а также тангенсы и (или) котангенсы, либо одновременно существуют, либо одновременно перестают существовать.

## 16. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

**16.1. Определения.** Для функции $y=\sin x$ на числовой оси $Ox$ выделяется промежуток $[-\pi/2, \pi/2]$, на котором эта функция является монотонно возрастающей. Когда $x$ принимает значения из этого промежутка, функция $y$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$. Функция $y=\sin x$, определенная на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$, имеет обратную функцию, которую называют *арксинусом* $y$ и обозначают $x=\arcsin y$, где уже $y$ — аргумент; $x$ — функция. Перейдя к обычным обозначениям для аргумента и функции, получим $y=\arcsin x$. Таким образом, $\arcsin x$, где $x\in[-1, 1]$ есть такое число $y$ ($y\in[-\pi/2, \pi/2]$), синус которого равен $x$, т. е. $\sin y=x$.

Аналогично определяются другие обратные тригонометрические функции.

Функция $y=\cos x$, определенная на промежутке $[0, \pi]$, где она является монотонно убывающей, имеет обратную функцию, которую называют *арккосинусом* $y$ и обозначают $x=\arccos y$. После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим: $y=\arccos x$. Таким образом, $\arccos x$, где $x\in[-1, 1]$ есть число $y$ ($y\in[0, \pi]$), косинус которого равен $x$, т. е. $\cos y=x$.

Функция $y=\operatorname{tg} x$, определенная на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, где

она является монотонно возрастающей, имеет обратную функцию, которую называют *арктангенсом* $y$ и обозначают $x=\operatorname{arctg} y$. После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим: $y=\operatorname{arctg} x$. Таким образом, $\operatorname{arctg} x$, где $x\in(-\infty, +\infty)$ есть такое число $y$ $(y\in(-\pi/2, \pi/2))$, тангенс которого равен $x$, т. е. $\operatorname{tg} y=x$.

Функция $y=\operatorname{ctg} x$, определенная на промежутке $(0, \pi)$, где она является монотонно убывающей, имеет обратную функцию, которую называют *арккотангенсом* $y$ и обозначают $x=\operatorname{arcctg} y$. После перехода к обычным обозначениям для функции и аргумента получим: $y=\operatorname{arcctg} x$. Таким образом, $\operatorname{arcctg} x$, где $x\in(-\infty, +\infty)$ есть такое число $y$ $(y\in(0, \pi))$, котангенс которого равен $x$, т. е. $\operatorname{ctg} y=x$.

Можно определить также функции $y=\operatorname{arcsec} x$ и $\operatorname{arccosec} x$, которые употребляются редко.

| Функция | Область определения | Область значений |
|---|---|---|
| $y=\arcsin x$ | $-1\leqslant x\leqslant 1$ | $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ |
| $y=\arccos x$ | $-1\leqslant x\leqslant 1$ | $0\leqslant y\leqslant\pi$ |
| $y=\operatorname{arctg} x$ | $-\infty<x<+\infty$ | $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ |
| $y=\operatorname{arcctg} x$ | $-\infty<x<+\infty$ | $0<y<\pi$ |
| $y=\operatorname{arcsec} x$ | $x\leqslant -1,\ x\geqslant 1$ | $0<y<\pi,\ y\neq\frac{\pi}{2}$ |
| $y=\operatorname{arccosec} x$ | $x\leqslant -1,\ x\geqslant 1$ | $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\ y\neq 0$ |

С помощью обратных тригонометрических функций можно записать решения тригонометрических уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$:

$\sin x=a$, $|a|\leqslant 1$, $x=(-1)^n\arcsin a+n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$\cos x=a$, $|a|\leqslant 1$, $x=\pm\arccos a+2n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$\operatorname{tg} x=a$, $x=\operatorname{arctg} a+n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$\operatorname{ctg} x=a$, $x=\operatorname{arcctg} a+n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

**16.2. Основные соотношения.** Выражение обратных тригонометрических функций через другие.

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|\leqslant 1;$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|\leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Основные тригонометрические соотношения в применении к обратным тригонометрическим функциям приводят к равенствам:

$$\sin(\arcsin x)=x;\ \operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2};\ \operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x;$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)=\frac{1}{x};$$

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\cos(\arccos x)=x;\ \operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x.$$

В этих формулах перед корнями не нужно ставить «$\pm$». В самом деле, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Поэтому $\sin(\arccos x)\geqslant 0$. Так как $-\pi/2\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2$, то знак $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ совпадает со знаком $x$ и т. д. В каждой формуле рассматриваются только значения $x$, при которых существуют все входящие в нее функции.

**Пример 1.** Вычислить $\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)\right]$

Обозначим: $\arccos\left(-\frac{40}{41}\right)=\varphi$; тогда $\cos\varphi=-\frac{40}{41}$;

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}=\frac{-\frac{40}{41}}{\frac{9}{41}}=-\frac{40}{9}.$$

Функции отрицательного аргумента:

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$;
$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;
$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x$;
$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x$.

**Пример 2.** $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$.

**Пример 3.** Доказать:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{3}\right)=\arccos\frac{9}{\sqrt{130}}.$$

Выкладки удобнее вести так:

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha,\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{3},\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<0;$$

$$\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}=\beta,\ \operatorname{ctg}\beta=\frac{2}{3},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2};$$

$$\arccos\frac{9}{\sqrt{130}}=\gamma,\ \cos\gamma=\frac{9}{\sqrt{130}};$$

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2};\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

Так как $\alpha+\beta$ и $\gamma$ находятся в интервале $(-\pi/2,\ \pi/2)$, в котором монотонны синус и тангенс, то для доказательства равенства достаточно доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\gamma$ или $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$. Мы воспользуемся формулой для тангенсов:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{7}{9};$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sqrt{1-\frac{81}{130}}}{\frac{9}{\sqrt{130}}}=\frac{7}{9}.$$

Тем самым равенство доказано.

Сумма и разность.

$\arcsin x+\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$ для $x^2+y^2\leqslant 1$;

$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$ для $x^2+y^2\leqslant 1$;

$\arccos x+\arccos y=\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ для $x+y\geqslant 0$;

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{для } x\geqslant y,\\ \arccos\left(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) & \text{для } x<y.\end{cases}$$

Предполагается, что обычные условия существования арксинуса и арккосинуса ($|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$) соблюдены.

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ \text{для}\ xy<1;$$

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}\ \text{для}\ xy>-1;$$

$$\operatorname{arcctg}x+\operatorname{arcctg}y=\operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}\ \text{для}\ x\neq -y;$$

$$\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arcctg}y=\operatorname{arcctg}\frac{xy+1}{y-x}\ \text{для}\ x\neq y.$$

## 17. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### 17.1. Простейшие уравнения.

| Уравнения | Ограничения | Решения |
|---|---|---|
| $\sin x = a$ | $\lvert a\rvert \leqslant 1$ | $x=(-1)^n \arcsin a + \pi n$ |
| $\cos x = a$ | $\lvert a\rvert \leqslant 1$ | $x = \pm\arccos a + 2\pi n$ |
| $\operatorname{tg} x = a$ | нет | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | нет | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ |

Частные случаи.

$\sin x = 0$, $x = \pi n$;

$\sin x = 1$, $x = \dfrac{4n+1}{2}\pi$;

$\sin x = -1$, $x = \dfrac{4n-1}{2}\pi$;

$\cos x = 0$, $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;

$\cos x = -1$, $x = (2n+1)\pi$;

$\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n$;

$\operatorname{ctg} x = 0$, $x = \dfrac{2n+1}{2}\pi$.

**17.2. Разложение на множители.** Если левую часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ удалось разложить на множители: $f_1(x)\ldots f_k(x)=0$, то оно равносильно совокупности $k$ систем, каждая из которых состоит из уравнения $f_i(x)=0$ и условия, что остальные $k-1$ множителей имеют смысл. Строго говоря, такого рода условие не может быть частью формальной системы. Его следовало заменить соответствующими формальными ограничениями. Однако на практике удобнее проверить возможность провести все необходимые вычисления, чем убеждаться в справедливости ограничений, тем более что при их записи легко допустить ошибку.

**Пример.** Решить уравнение

$$\operatorname{cosec}^2 4x + \operatorname{ctg} x \cos^2 4x - \operatorname{ctg} x = 1.$$

Перенесем единицу в левую часть и вынесем $\operatorname{ctg} x$ за скобки:

$$(\operatorname{ctg} x + 1)(1 - \cos^2 4x) = 0,$$

т. е.

$$(\operatorname{ctg} x + 1)\sin^2 4x = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + 1 = 0, \\ \sin 4x \quad \text{существует}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \operatorname{ctg} x \quad \text{существует}. \end{cases}$$

Так как $\sin 4x$ существует при всех $x$, то решением первой системы будет

$$x = 3\frac{\pi}{4} + n\pi = (4n+3)\frac{\pi}{4}.$$

Чтобы решить вторую систему, найдем корни уравнения: $\sin 4x = 0$; $x = k\frac{\pi}{4}$ и подставим их в $\operatorname{ctg} x$. Котангенс будет существовать, если $k$ не делится на 4, и не будет существовать, если $k$ делится на 4. Таким образом, решение второй системы можно записать так:

$$x = \frac{(4n+1)\pi}{4}, \quad x = \frac{(4n+2)\pi}{4}, \quad x = \frac{(4n+3)\pi}{4}.$$

Сюда вошло и решение первой системы. Заметим, что $4n+1$ и $4n+3$ — это все нечетные числа, а $4n+2$ можно разделить на 2; перепишем решение уравнения так:

$$x = \frac{(2n+1)\pi}{4}, \quad x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

**17.3. Необходимые и достаточные условия равенства тригонометрических функций.**

1. $\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2n\pi, \quad \alpha - \beta = 2n\pi, \quad (n \in \mathbf{Z})$.
2. $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = (2n+1)\pi, \quad \alpha - \beta = 2n\pi, \quad (n \in \mathbf{Z})$.
3. $\sin\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad (n \in \mathbf{Z})$.
4. $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = n\pi, \quad \alpha, \beta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad (n \in \mathbf{Z})$.
5. $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = n\pi, \quad \alpha, \beta \neq (2n+1)\pi, \quad (n \in \mathbf{Z})$.

**Пример 1.** Решить уравнение $\sin 5x = \sin 7x$.
Воспользовавшись соотношением 2, получим

$$12x = (2n+1)\pi, \qquad x = (2n+1)\frac{\pi}{12},$$

$$2x = 2n\pi, \qquad x = n\pi.$$

Итак, $x = n\pi$, $x = (2n+1)\frac{\pi}{12}$.

**Пример 2.** Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$.
Применим соотношение 4:

$$2x = n\pi, \quad \text{т. е.} \quad x = n\frac{\pi}{2}.$$

Нужно исключить те значения $n$, при которых $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. оставить лишь $n=2k$. Таким образом, $x=k\pi$.

**17.4. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим.** Часто удается выразить все входящие в уравнение тригонометрические функции через одну и привести уравнение к алгебраическому.

Любое тригонометрическое уравнение, целое относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, можно привести к рациональному уравнению относительно $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)};$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)};\quad \operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

В результате такого преобразования могут быть потеряны корни $x=\pi(2k+1)$, при которых $\operatorname{tg}(x/2)$ перестает существовать.

**Пример 1.** Решить уравнение $\sin^2 x+\cos x+1=0$.

Р е ш е н и е. Заменяя $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, получим

$$\cos^2 x-\cos x-2=0.$$

Обозначая $\cos x=y$, получим квадратное уравнение

$$y^2-y-2=0,$$

которое имеет два корня: $y_1=-1$, $y_2=2$. Второй корень не удовлетворяет исходному уравнению, так как $\cos x\neq 2$.

Решая уравнение $\cos x=-1$, найдем, что $x=(2n+1)\pi$.

**Пример 2.** Решить уравнение $\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{tg} x+1=0$.

Р е ш е н и е. Выражая $\operatorname{ctg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$, получим уравнение

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} x+1=0.$$

На множестве $\operatorname{tg} x\neq 0$, $\cos\neq 0$ оно равносильно уравнению

$$1-\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x=0,$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+1=0,$$

или

$$(\operatorname{tg} x+1)^2=0,$$

откуда $\operatorname{tg} x=-1$. Следовательно,

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{4n-1}{4}\pi.$$

## 18. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### 18.1. Основные теоремы и формулы.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

Теорема синусов:

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma.$$

Теорема косинусов:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha;\quad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta.$$

Формулы Мальвейде:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\sin\frac{\gamma}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]}.$$

Теоремы для половинных углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Радиус описанного круга:

$$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma};$$

$$R=\frac{p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Радиусы вписанного и вневписанных кругов:

$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$r=p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};\quad r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$r_a^*=p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Медиана:

$$m_a^* = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}.$$

Биссектриса:

$$w_a^* = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+2} = \frac{c\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Высота:

$$h_a = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

Площадь:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}.$$

18.2. **Прямоугольные треугольники** ($\gamma$ — прямой угол, $c$ — гипотенуза, $a$, $b$ — катеты, $S$ — площадь).

| Случай | Данные | Формулы |
|---|---|---|
| 1 | $c$, $\alpha$ | $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $a = c\sin\alpha$; $b = \cos\alpha$; $S = \frac{c^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{4}\sin 2\alpha$ |
| 2 | $a$, $\alpha$ | $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = a\operatorname{ctg}\alpha$; $S = \frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ |
| 3 | $a$, $c$ | $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$; $b = c\sin\beta$ <br> или <br> $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; <br> $b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$; <br> $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}a\sqrt{(c+a)(c-a)}$ |
| 4 | $a$, $b$ | $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$; $c = \frac{b}{\sin\alpha}$; $S = \frac{ab}{2}$ <br> или <br> $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |

* Остальные находятся циклической перестановкой, т. е. заменой $a$ на $b$, $b$ на $c$, $c$ на $a$.

## 18.3. Косоугольные треугольники.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha, \beta, \gamma$ | $\alpha = \pi - (\beta + \gamma);\ b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha};\ c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$<br>$S = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ |
| 2 | $b, c, \alpha$ | $\beta + \gamma = \pi - \alpha;\ \operatorname{tg} \frac{b - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2};$<br>$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta};\ S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$<br>или<br>$a = \frac{(b - c) \sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}} = \frac{(b + c) \cos \frac{\beta + \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$<br>или<br>$a^2 = (b + c)^2 \sin^2 \varphi,$<br>где $\cos^2 \varphi = \frac{4bc \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{(b + c)^2}$ |
| 3 | $a, b, \alpha$ | $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a};\ \gamma = \pi - (\alpha + \beta);$<br>$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha};\ S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$<br>Исследование: $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$ { $a \leqslant b$, решения нет.<br>$a > b$, одно решение,<br>$\beta < \frac{\pi}{2}$;<br>$\alpha < \frac{\pi}{2}$ { $a \geqslant b$, одно решение $\beta < \frac{\pi}{2}$,<br>$a < b$ { $a < b \sin \alpha$, решения нет,<br>$a = b \sin \alpha$, одно решение,<br>$\beta = \pi/2$,<br>$a > b \sin \alpha$, два решения,<br>$\beta'$ и $\beta'' = \pi - \beta'$ |
| 4 | $a, b, c$ | $r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}};$<br>$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p - a};\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p - b};$<br>$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p - c};\ S = pr$ |

## 19. РЕШЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В сферической тригонометрии рассматривается решение треугольников, расположенных на сфере и образованных дугами больших кругов, меньших 180°.

**19.1. Основные понятия и определения.** Сечение сферы (шара) плоскостью, проходящей через центр сферы, называется *большим кругом,* радиус такого круга равен радиусу сферы.

Через две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести только одну окружность большого круга.

Меньшая дуга большого круга, проведенная через две данные на сфере точки $A$ и $B$ (рис. 45), является кратчайшим расстоянием на сфере между этими точками и называется *геодезической линией.*

Часть сферической поверхности, заключенная между двумя полуокружностями больших кругов, проходящих через одни и те же точки $M$ и $N$ (рис. 46), называется *сферическим двуугольником* (двусторонником или фюзо). Каждый сферический угол, например угол $AMB = ANB$, измеряется линейным углом $A'MB'$ — между двумя касательными к соответствующим окружностям больших кругов в точке $M$. Площадь двуугольника $NAMB$ (рис. 46):

$$S = 2R^2\varphi$$

(угол $\varphi$ выражен в радианах).

Часть сферической поверхности, ограниченная тремя дугами больших кругов, пересекающимися в трех точках $A$, $B$ и $C$, называется *сферическим треугольником* $ABC$ (рис. 47). В сферическом треугольнике не может быть ни одной стороны, длина которой была бы равна или больше полуокружности. При соединении центра сферы $O$ с вершинами сферического треугольника $ABC$ образуется трехгранный угол $OCAB$, двугранные углы которого равны углам $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ сферического треугольника $ABC$.

Длины сторон сферического треугольника, обозначаемые буквами $a$, $b$, $c$, выражаются в угловых мерах и измеряются сферическими

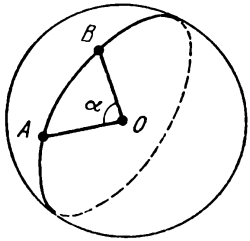



Рис. 45

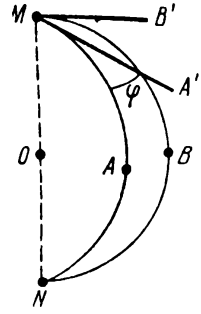



Рис. 46

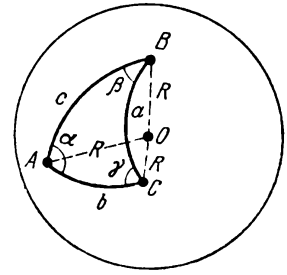



Рис. 47

углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Любая сторона сферического треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон его, например,

$$c<a+b \text{ и } c>a-b.$$

В сферическом треугольнике сумма углов $\alpha+\beta+\gamma$ всегда больше 180°. Разность между суммой этих углов и 180° называется *сферическим избытком* и обозначается $\varepsilon$, т. е.

$$\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180°;$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin\gamma;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}};$$

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

**19.2. Основные формулы.** $a$, $b$, $c$ — стороны; $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ — углы сферического треугольника (см. рис. 47).

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha\\ \cos b&=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta\\ \cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma\end{aligned}\right\}$$ (теорема косинусов)

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a;$$
$$\cos\beta=-\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b;$$
$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c;$$

$$\sin a\cos b=\cos\beta\sin c+\sin b\cos\gamma\cos a;$$
$$\sin a\cos b=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos\alpha;$$
$$\sin\alpha\cos b=\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos a;$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\cos b\sin\gamma-\sin\beta\cos c\cos\alpha;$$

$$\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}b\sin c-\cos\alpha\cos c;$$
$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}$$ (теорема синусов);

$$\sin a\sin\beta=\sin b\sin\alpha;$$
$$\sin a\sin\gamma=\sin c\sin\alpha;$$
$$\sin b\sin\gamma=\sin c\sin\beta.$$

**19.3. Прямоугольные треугольники** (рис. 48, *а*). Сферический прямоугольный треугольник может быть решен по любым трем из его шести элементов (трех сторон и трех углов):

$\sin b=\sin a\sin\beta$, или $\sin b=\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}c$;
$\sin c=\sin a\sin\gamma$, или $\sin c=\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}b$;
$\cos a=\cos b\cos c$, или $\cos a=\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$;
$\cos\beta=\cos b\sin\gamma$; $\cos\gamma=\operatorname{ctg}a\cdot\operatorname{tg}b$;
$\cos\gamma=\cos c\sin\beta$; $\cos\beta=\operatorname{ctg}a\cdot\operatorname{tg}c$.

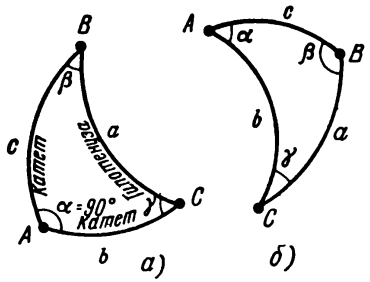



Рис. 48

**19.4. Косоугольные треугольники** (рис. 48, *б*). Для решения косоугольных сферических треугольников, кроме теоремы косинусов (см. п. 19.2), пользуются следующими формулами:

| Случай | Данные | Формулы |
|---|---|---|
| 1 | $a$, $b$, $c$ | $s = \frac{a+b+c}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{k}{\sin(s-a)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = \frac{k}{\sin(s-b)}$; $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{k}{\sin(s-c)}$, где $k^2 = \frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s}$ |
| 2 | $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ | $p = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma-180^\circ}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \frac{\varrho}{\sin(\alpha-p)}$; $\operatorname{ctg}\frac{b}{2} = \frac{\varrho}{\sin(\beta-p)}$; $\operatorname{ctg}\frac{c}{2} = \frac{\varrho}{\sin(\gamma-p)}$, где $\varrho^2 = \frac{\sin(\alpha-p)\cdot\sin(\beta-p)\cdot\sin(\gamma-p)}{\sin p}$ |
| 3 | $a$, $\beta$, $\gamma$ | $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$; $\sin\alpha\sin b = \sin\beta\sin a$; $\sin\alpha\cos b = \cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos a$; $\sin\alpha\sin c = \sin\gamma\sin a$; $\sin\alpha\cos c = \cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta\cos a$ или, положив $\operatorname{ctg}\varphi = \cos a\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\lambda = \cos a\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a\cos\varphi\sec(\gamma-\varphi)$ и $\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a\cos\lambda\sec(\beta-\lambda)$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\frac{\sin a\sin\varphi}{\sin b\sin(\gamma-\varphi)} = \operatorname{tg}\gamma\frac{\sin a\sin\lambda}{\sin c\sin(\beta-\lambda)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\alpha, b, c$ | $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha;$<br>$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha;$<br>$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha;$<br>$\sin a \cos \gamma = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha;$<br>$\sin a \sin \gamma = \sin c \sin \alpha$<br>**или, положив**<br>$\operatorname{tg} \varphi = \cos \alpha \operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} \lambda = \cos \alpha \operatorname{tg} c;$<br>$\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\sin b \sin \alpha}{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha}$<br>и<br>$\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{\sin c \sin \alpha}{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha};$<br>$\sin a = \sin b \sin \alpha \operatorname{cosec} \beta = \sin c \sin \alpha \operatorname{cosec} \gamma$ |
| 5 | $a, b, \alpha$ | $\sin \beta = \dfrac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha$ (для $\sin a > \sin b$);<br>$\operatorname{tg} \dfrac{1}{2} c = \dfrac{\cos \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}(a + b) =$<br>$= \dfrac{\sin \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}(a - b);$<br>$\operatorname{ctg} \dfrac{1}{2} \gamma = \dfrac{\cos \dfrac{1}{2}(a + b)}{\cos \dfrac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) =$<br>$= \dfrac{\sin \dfrac{1}{2}(a + b)}{\sin \dfrac{1}{2}(a - b)} \operatorname{tg} \dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$ |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\alpha, \beta, a$ | $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$ (для $\sin\alpha > \sin\beta$);<br>$\operatorname{tg}\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b) =$<br>$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b);$<br>$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) =$<br>$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ |

Аналогии Непера:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Формулы Гаусса — Деламбра:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Формула тангенсов:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

# V. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ И ИНФОРМАТИКА

## 20. ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ (ЭЛЕМЕНТЫ)

### 20.1. Оформление данных в виде таблиц.

**Пример.** В течение нескольких лет собиралась информация о потреблении некоторого продукта в четырех крупных районах страны с условными названиями: Север, Восток, Запад, Юг. Данные поступали раз в три месяца и записывались в тетрадь:

**Потребление продукта за апрель — июль 1985 г.**

Север — 47 тыс. т. Восток — 78 тыс. т.
Запад — 310 тыс. т. Юг — 38 тыс. т.

Спустя некоторое время возникла потребность обобщить накопленную информацию. Для этого ее свели в таблицу. Каждому району отвели свою строку, зафиксировали начало наблюдений и месяца, по которым имеются данные, пронумеровали подряд. Данные, относящиеся к одному отрезку времени, расположили в столбик и получили следующую таблицу:

Таблица 1

| Район | 1—3 | 4—6 | 7—9 | 10—12 | 13—15 | 16—18 | 19—21 | 22—24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Север | 47 | 45 | 54 | 50 | 49 | 47 | 57 | 52 |
| Восток | 84 | 85 | 90 | 89 | 80 | 78 | 84 | 82 |
| Запад | 345 | 305 | 410 | 390 | 337 | 310 | 425 | 375 |
| Юг | 24 | 36 | 54 | 33 | 25 | 38 | 61 | 32 |

Несмотря на то что данные уже записаны в табличной форме, ими еще не очень удобно пользоваться. Прежде всего бросается в глаза различный порядок цифр для сведенных в таблицу районов. Если в дальнейшем придется эти районы сравнивать, то полезно учесть, что они различны по площади, населенности и т. д. Поскольку речь идет о потреблении, нужно принять во внимание численность их населения. Предположим, что ориентировочные данные о населении общеизвестны: на Севере проживает 5 млн. человек, на Востоке — 9, на Западе — 35, а на Юге — 3 млн. человек. Поделив в уме соответствующие элементы таблицы на численность населения, мы получим достаточно близкие (за небольшим исключением) друг к другу числа: около 10. Следовательно, переход к данным, характеризующим потребление рассматриваемого нами продукта в расчете на душу населения, оправдан. Воспользуемся более точными данными о населении (в миллионах человек):

| Год | Район | | | | Всего |
|---|---|---|---|---|---|
| | Север | Восток | Запад | Юг | |
| 1984 | 4,9 | 9,1 | 35,5 | 2,9 | 52,4 |
| 1985 | 5,0 | 8,7 | 35,7 | 3,1 | 52,5 |

Справа мы добавили еще один столбец, в котором указано общее население всех четырех районов. Теперь табл. 1 можно преобразовать в табл. 2.

Таблица 2

**Потребление продукта в расчете на душу населения за 1984—1985 гг. (в килограммах)**

| Район | 1984 г. | | | | 1985 г. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I кв. | II кв. | III кв. | IV кв. | I кв. | II кв. | III кв. | IV кв. |
| Север | 9,59 | 9,18 | 11,02 | 10,20 | 9,80 | 9,40 | 11,40 | 10,40 |
| Восток | 9,23 | 9,34 | 9,89 | 9,78 | 9,20 | 8,97 | 9,66 | 9,43 |
| Запад | 9,72 | 8,59 | 11,55 | 10,99 | 9,44 | 8,68 | 11,90 | 10,50 |
| Юг | 8,28 | 12,41 | 18,62 | 11,38 | 8,06 | 12,26 | 19,68 | 10,32 |
| В среднем | 9,54 | 8,99 | 11,60 | 10,72 | 9,35 | 9,01 | 11,94 | 10,30 |

Новая таблица уже значительно усовершенствована. Во-первых, у нее появился заголовок, в котором указаны: содержание таблицы, период, к которому относятся данные, единицы измерения. Во-вторых, более наглядными стали заголовки столбцов — теперь ясно видно, что мы имеем дело с квартальными данными и к каким годам эти данные относятся. В-третьих, появилась строка, подытоживающая данные за каждый квартал, но вместо суммы в ней указана средняя для всех четырех районов величина потребления за квартал. Чтобы рассчитать ее, пришлось сложить данные из табл. 1 и разделить полученный результат на соответствующее рассматриваемому году население: Это *средневзвешенная величина* стоящих в столбце значений, и она не совпадает с их обычной арифметической средней.

**20.2. Анализ табличных данных.** Приступая к анализу табличных данных, нужно сначала обратить внимание на то, достаточно ли они обозримы, т. е. не препятствует ли восприятию содержащейся в данных информации избыточное число значащих цифр. В табл. 3 данные табл. 2 округлены до десятых, появился столбец данных за средний квартал года. (Для простоты приводятся данные только за 1985 г.)

Таблица 3

| Район | 1985 г. | | | | В среднем |
|---|---|---|---|---|---|
| | I кв. | II кв. | III кв. | IV кв. | |
| Север | 9,8 | 9,4 | 11,4 | 10,4 | 10,2 |
| Восток | 9,2 | 9,0 | 9,7 | 9,4 | 9,3 |
| Запад | 9,4 | 8,7 | 11,9 | 10,5 | 10,1 |
| Юг | 8,1 | 12,3 | 19,7 | 10,3 | 12,6 |
| В среднем | 9,4 | 9,0 | 11,9 | 10,3 | 10,2 |

Хотя данные о потреблении можно сравнивать как по периодам, так и по районам, все-таки более тесные сопоставления, по-видимому, должны относиться к одному району. Поэтому строки и столбцы табл. 3 удобно поменять местами. При этом районы можно расположить по возрастанию потребления продукта в расчете на душу на-

Таблица 4

| 1985 г. | Район | | | | В среднем |
|---|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг | |
| I кв. | 9,2 | 9,4 | 9,8 | 8,1 | 9,4 |
| II кв. | 9,0 | 8,7 | 9,4 | 12,3 | 9,0 |
| III кв. | 9,7 | 11,9 | 11,4 | 19,7 | 11,9 |
| IV кв. | 9,4 | 10,5 | 10,4 | 10,3 | 10,3 |
| В среднем | 9,3 | 10,1 | 10,2 | 12,6 | 10,2 |

Таблица 5

**Отклонения от средней**

| 1985 г. | Район | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг |
| I кв. | −1,0 | −0,8 | −0,4 | −2,1 |
| II кв. | −1,2 | −1,5 | −0,8 | +2,1 |
| III кв. | −0,5 | +1,7 | +1,2 | +9,5 |
| IV кв. | −0,8 | +0,3 | +0,2 | +0,1 |
| В среднем | −0,9 | −0,1 | 0 | +2,4 |

селения. Чтобы получить более наглядное представление об изменении данных по периодам и районам, удобно составить таблицу отклонений данных от общего для них среднего значения, т. е. вычесть из каждого значения табл. 4 величину 10,2. Получим табл. 5.

Таблица отклонений от средней позволяет обнаружить некоторые закономерности, свойственные имеющимся в нашем распоряжении данным. Во-первых, для всех районов, кроме Юга, самый низкий уровень потребления наблюдается во втором квартале, а самый высокий уже для всех без исключения районов — в третьем квартале. Если мы обратимся к данным за 1984 г., то увидим примерно такую же картину. Таким образом, наши данные обнаруживают сезонные колебания спроса.

В табл. 5 содержатся два числа, явно выпадающие из общей картины — это значения для Юга во втором и в третьем кварталах. Значение во втором квартале, как мы уже отмечали, не соответствует общему правилу, в соответствии с которым для этого квартала достигается минимум потребления, а значение для третьего квартала оказалось неправдоподобно бо́льшим. Как относиться к таким отклонениям?

Общих рекомендаций здесь быть не может, ибо все зависит от цели, с которой ведется анализ данных, и от той содержательной информации, которой мы располагаем. Так, если приведенные данные относятся, например, к потреблению сахара, то и сезонность и отклонения для Юга допускают вполне правдоподобное объяснение. В самом деле, в третьем квартале потребление сахара увеличивается в связи с заготовкой ягод и фруктов на зиму. Кроме того, уже во втором квартале на Юг отправляются отдыхающие, в результате чего фактическое население этого района значительно возрастает в сравнении с зимними месяцами, а в третьем квартале приток отдыхающих накладывается на период заготовок ягод и фруктов. Таким образом, ошибки в данных, скорее всего, нет. Однако это не означает,

Таблица 6

**Отклонения от средних по районам**

| 1985 г. | Район | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг |
| I кв. | −0,1 | −0,7 | −0,4 | −4,5 |
| II кв. | −0,3 | −1,4 | −0,8 | −0,3 |
| III кв. | +0,4 | +1,8 | +1,2 | +7,1 |
| IV кв. | +0,1 | +0,4 | +0,2 | −2,3 |
| В среднем | 0 | 0 | 0 | 0 |

что обрабатывать данные и делать на их основе выводы можно, не обращая внимания на два отмеченных существенных отклонения. Если нас будут интересовать общие закономерности, связанные с потреблением рассматриваемого продукта, то отклонения из дальнейшего анализа лучше исключить. Если же речь пойдет о распределении продукта с целью удовлетворения спроса на него, то придется учитывать всю имеющуюся информацию целиком.

Чтобы обнаружить сезонные колебания и проанализировать их, удобно составить таблицу отклонений по районам от соответствующих каждому из них годовых средних (табл. 6).

Построим табл. 4а и 6а, аналогичные табл. 4 и 6, для 1984 г.

Сравнивая табл. 6 и 6а, мы убеждаемся в очень заметном сходстве сезонных колебаний, что подтверждает гипотезу о сезонных колебаниях спроса на интересующий нас продукт. Для трех районов: Восток, Запад, Север — можно утверждать, что среднее значение спроса в расчете на душу населения достаточно стабильно, причем в первом полугодии спрос несколько ниже среднего значения, а во втором полу-

Таблица 4а

| 1984 г. | Район | | | | В среднем |
|---|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг | |
| I кв. | 9,2 | 9,7 | 9,6 | 8,3 | 9,5 |
| II кв. | 9,3 | 8,6 | 9,2 | 12,4 | 9,0 |
| III кв. | 9,9 | 11,6 | 11,2 | 18,6 | 11,6 |
| IV кв. | 9,8 | 11,0 | 10,2 | 11,4 | 10,7 |
| В среднем | 9,6 | 10,2 | 10,0 | 12,7 | 10,2 |

Таблица 6а

**Отклонения от средних по районам**

| 1984 г. | Район | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг |
| I кв. | −0,4 | −0,5 | −0,4 | −4,4 |
| II кв. | −0,3 | −1,6 | −0,8 | −0,3 |
| III кв. | +0,3 | +1,4 | +1,2 | +5,9 |
| IV кв. | +0,2 | +0,8 | +0,2 | −1,3 |
| В среднем | 0 | 0 | 0 | 0 |

годии он несколько выше. В первом из районов амплитуда сезонных колебаний невелика, а в двух других она значительно заметнее. Колебания спроса в районе Юг имеют несколько иной характер: в третьем квартале наблюдается значительное превышение среднего значения, а в остальные кварталы спрос ниже среднего, причем во втором квартале спрос почти равен среднему, а в третьем — значительно выше среднего. Спрос как бы поднимается по почти равным ступеням от нижнего положения к верхнему, а затем почти таким же образом опускается в свое нижнее положение. Такая картина с большой точностью повторялась оба года, за которые имеются наблюдения. Чтобы выявить роль, которую играют в нашем примере систематические колебания, сначала усредним отклонения (см. табл. 6 и 6а) от средних (табл. 7), а затем приведем отклонения от этих средних отклонений (табл. 8). Характер данных в табл. 8 свидетельствует, во-первых, о том, что таблица средних значений спроса за два года служит хорошим ориентиром (моделью) спроса на интересующий

Таблица 7

**Усредненные отклонения за два года**

| Квартал | Район | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг |
| I кв. | −0,2 | −0,6 | −0,4 | −4,4 |
| II кв. | −0,3 | −1,5 | −0,8 | −0,3 |
| III кв. | +0,4 | +1,6 | +1,2 | +6,5 |
| IV кв. | +0,2 | +0,6 | +0,2 | −1,8 |
| В среднем | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 8

**Отклонения от средних отклонений**
(или отклонение от средних значений за два года)

| Квартал | Район | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг |
| I кв. | −0,1 | +0,1 | 0 | +0,1 |
| II кв. | 0 | −0,1 | 0 | 0 |
| III кв | 0 | −0,2 | 0 | −0,6 |
| IV кв. | +0,1 | +0,2 | 0 | +0,5 |
| В среднем | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 9

**Модель потребления продукта**

| Квартал | Район | | | | В среднем |
|---|---|---|---|---|---|
| | Восток | Запад | Север | Юг | |
| I кв. | 9,4 | 9,6 | 9,7 | 8,2 | 9,4 |
| II кв. | 9,2 | 8,6 | 9,3 | 12,4 | 9,0 |
| III кв. | 9,8 | 11,8 | 11,3 | 19,1 | 11,7 |
| IV кв. | 9,6 | 10,8 | 10,3 | 10,8 | 10,5 |
| В среднем | 9,5 | 10,2 | 10,1 | 12,6 | 10,2 |

нас продукт в рассматриваемых районах (табл. 9), во-вторых, определенная стабильность отклонений в третьем и четвертом кварталах указывает на существование фактора, отличающего один год от другого, причем этот фактор не был принят нами во внимание (правда, влияние неучтенного фактора не очень велико).

Теперь можно сделать вывод о плане поставок продукта в четыре рассмотренных района в течение года. Общий план поставок определяется среднедушевым потреблением 10,2, умноженным на общую численность населения. При наличии сравнительно небольшого запаса потребности первых трех районов могут быть удовлетворены, если ежеквартально поставлять в каждый из них количество продукта, равное среднедушевому потреблению за год в этом районе, взятому из табл. 9 и умноженному на численность населения соответствующего района. Та же политика для района Юг приведет к дефициту в третьем квартале. Однако численность населения в этом районе невелика и поэтому для него можно сохранить ту же политику, несколько увеличив страховой запас.

**20.3. Временны́е ряды.** Если характеристика некоторого объекта измеряется через равные промежутки времени, то полученные данные, расположенные в порядке их появления, образуют *временно́й ряд*.

В табл. 10 приведены примеры временных рядов — годовые данные о населении СССР в миллионах человек, о производстве электроэнергии и гидроэлектроэнергии в СССР в миллионах тонн условного топлива (т. у. т.) за 1970—1984 гг. (по данным статистических ежегодников «Народное хозяйство СССР»).

В п. 20.2 рассматривались квартальные данные, также образующие временно́й ряд для каждого из регионов.

Таким образом, временно́й ряд — это последовательность. Величина промежутка времени между соседними членами ряда является его шагом.

Чтобы составить представление о поведении временно́го ряда,

Таблица 10

**Три временны́х ряда**

| Годы | Население, млн. человек | Выработка электроэнергии, млн. т у. т | Выработка гидроэлектроэнергии, млн. т у. т |
|---|---|---|---|
| 1970 | 241,1 | 91,1 | 15,3 |
| 1971 | 243,9 | 98,4 | 15,5 |
| 1972 | 246,3 | 105,4 | 15,1 |
| 1973 | 248,6 | 112,5 | 15,0 |
| 1974 | 250,9 | 120,0 | 16,2 |
| 1975 | 253,3 | 127,8 | 15,5 |
| 1976 | 255,6 | 136,7 | 16,7 |
| 1977 | 257,9 | 141,4 | 18,1 |
| 1978 | 260,1 | 147,8 | 20,9 |
| 1979 | 262,1 | 152,3 | 21,2 |
| 1980 | 264,5 | 159,2 | 22,6 |
| 1981 | 266,6 | 163,1 | 23,0 |
| 1982 | 268,8 | 168,1 | 21,5 |
| 1983 | 271,2 | 174,4 | 22,2 |
| 1984 | 273,8 | 183,5 | 25,0 |

пользуются различными способами его представления и образуют производные от него временны́е ряды. В табл. 11 для ряда численности населения из табл. 10 приведены:

$N_i$ ($i = 1970, \ldots, 1984$) — численность населения СССР в миллионах человек (столбец 2);

$\Delta N_{i+1} = N_{i+1} - N_i$ ($i = 1970, \ldots, 1983$) — абсолютный прирост численности населения за год (столбец 3);

$\Delta^2 N_{i+1} = \Delta N_{i+1} - \Delta N_i$ ($i = 1971, \ldots, 1983$) — изменение абсолютного прироста за год (столбец 4);

$100 N_{i+1}/N_i$ ($i = 1970, \ldots, 1983$) — относительный годовой рост населения, годовой темп роста в процентах (столбец 5);

$100\left(\frac{N_{i+1}}{N_i} - 1\right)$ ($i = 1970, \ldots, 1983$) — относительный годовой прирост населения, годовой темп прироста в процентах (столбец 6);

$100 N_i/N_{1970}$ ($i = 1970, \ldots, 1984$) — индекс роста населения; численность в 1970 г. принята за 100 (в заголовке таблицы пишут: 1970 = 100) (столбец 7).

Значения в столбце 3 позволяют сделать вывод, что ежегодные приросты населения примерно одинаковы и колеблются около среднего значения прироста, равного 2,3 млн. человек. Таким образом, вместо того чтобы запоминать весь ряд, можно запомнить среднюю величину ежегодного прироста (2,3 млн. человек) и, например, значение ряда в 1970 г. (241,7 млн. человек). Любое значение ряда за другие годы периода можно теперь приближенно вычислить как значение арифметической прогрессии:

$$\hat{N}_{1970+t} = N_{1970} + 2{,}3t. \qquad (1)$$

Так,

$$\hat{N}_{1980} = N_{1970} + 2{,}3 \cdot 10 = 241{,}7 + 23 = 264{,}7.$$

Полученное модельное значение (его обозначают такой же буквой, но с крышечкой, чтобы отличить от соответствующего значения ряда) оказалось достаточно близким к значению исходного ряда. В табл. 12 в столбце 4 приведены исходные данные о населении, в столбце 3 — модельные данные, а в столбце 2 — отклонения исходных данных от модельных. В последние годы периода модель опережает реальный рост населения, но к концу периода вновь приближается к реальному значению (1984 г.). С помощью модели

$$\Delta N = 2{,}3, \quad N_{1970} = 241{,}7 \tag{1а}$$

можно предсказать численность населения в 1985 г. Так появляется прогноз $\hat{N}_{1985} = 276{,}2$. Реальное значение в 1985 г. оказалось равным 276,3, т. е. прогноз весьма точен и к тому же поменялся знак отклонения модели от реального значения. Это обстоятельство побуждает выяснить, не обладает ли период 1979—1983 гг. какой-либо особенностью. Для ответа на этот вопрос нужно обратиться к содержанию демографических процессов, к историческим особенностям периода. Можно, например, предположить, что рост населения в эти годы был медленнее в связи с последствиями войны. Поскольку в военные годы рождаемость значительно снизилась, то спустя 18—20 лет можно

Таблица 11

**Временной ряд, способы его представления и производные ряды**

| Годы | Население, млн. человек | Прирост | Изменение прироста | Темп роста, % | Темп прироста, % | Индекс (1970 = 100) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1970 | 241,7 | | | | | 100,00 |
| 1971 | 243,9 | 2,1 | | 100,91 | 0,91 | 100,91 |
| 1972 | 246,3 | 2,4 | +0,3 | 100,98 | 0,98 | 101,90 |
| 1973 | 248,6 | 2,3 | −0,1 | 100,93 | 0,93 | 102,85 |
| 1974 | 250,9 | 2,3 | 0 | 100,93 | 0,93 | 103,80 |
| 1975 | 253,3 | 2,4 | +0,1 | 100,96 | 0,96 | 104,80 |
| 1976 | 255,6 | 2,3 | −0,1 | 100,91 | 0,91 | 105,75 |
| 1977 | 257,9 | 2,3 | 0 | 100,90 | 0,90 | 106,70 |
| 1978 | 260,1 | 2,2 | −0,1 | 100,85 | 0,85 | 107,61 |
| 1979 | 262,1 | 2,0 | −0,2 | 100,77 | 0,77 | 108,40 |
| 1980 | 264,5 | 2,4 | +0,4 | 100,92 | 0,92 | 109,40 |
| 1981 | 266,6 | 2,1 | −0,3 | 100,79 | 0,79 | 110,30 |
| 1982 | 268,8 | 2,2 | +0,1 | 100,82 | 0,82 | 111,21 |
| 1983 | 271,2 | 2,4 | +0,2 | 100,89 | 0,89 | 112,20 |
| 1984 | 273,8 | 2,6 | +0,2 | 100,96 | 0,96 | 113,28 |

тоже ожидать снижения рождаемости, а еще через 18—20 лет это должно было вновь сказаться на росте населения. Чтобы убедиться в правильности подобной гипотезы, потребуется более подробный анализ данных о демографических процессах.

В столбце 5 табл. 11 приведены темпы роста населения для каждого года, а в столбце 6 — темпы прироста (обе характеристики даны в процентах). Темпы прироста (как и абсолютные приросты) достаточно близки один к другому. Чтобы найти средний темп роста (а следовательно, и темп прироста) за 14 лет с 1970 по 1984 г. (обратите внимание: 15 годовых данных отражают рост за 14 лет!), предполагают темп роста равным ежегодно одному и тому же числу $Q$, т. е.

$$N_{1971} = Q\,N_{1970},\ N_{1972} = Q\,N_{1971} = Q^2\,N_{1970},\ \ldots,\ N_{1984} = Q^{14}\,N_{1970}.$$

Следовательно,

$$Q = \sqrt[14]{\frac{N_{1984}}{N_{1970}}} = \sqrt[14]{\frac{273{,}8}{241{,}7}} = 1{,}009.$$

Теперь можно предложить еще одну модель данного временно́го ряда:

$$\hat{N}_{1970+t} = N_{1970}\,1{,}009^t, \qquad (2)$$

или

$$Q = 1{,}009,\ N_{1970} = 241{,}7. \qquad (2а)$$

Соответствующие этой модели значения численности населения приведены в столбце 5 табл. 12, а отклонения модели от значений ряда — в столбце 6.

Анализ отклонений позволяет ответить на вопрос, какая из двух рассмотренных моделей лучше приближает исходные данные (см. табл. 12).

Прежде всего определяется средняя величина отклонений:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{N}_i - N_i).$$

Модель (1): $1{,}7/14 \approx 0{,}1$. Модель (2): $-2{,}0/14 \approx -0{,}1$.

(Хотя в табл. 12 содержится 15 исходных значений ряда, сумму чисел в каждом из столбцов 2 и 6 делят на 14. Дело в том, что отклонений тоже по существу имеется только 14, так как модель определена таким образом, что модельное значение 1970 г. совпадает со значением данного ряда.)

Может быть также рассчитана средняя величина абсолютного отклонения:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\hat{N}_i - N_i|.$$

Модель (1): $2{,}3/14 \approx 0{,}2$. Модель (2): $4{,}2/14 \approx 0{,}3$.

Таблица 12

**Приближение с помощью двух простейших моделей**

| Годы | Отклонение 3—4 | Модель (1) | Население, млн. человек | Модель (2) | Отклонение 5—4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1970 | 0 | 241,7 | 241,7 | 241,7 | 0 |
| 1971 | +0,1 | 244,0 | 243,9 | 243,9 | 0 |
| 1972 | 0 | 246,3 | 246,3 | 246,1 | —0,2 |
| 1973 | 0 | 248,6 | 248,6 | 248,3 | —0,3 |
| 1974 | 0 | 250,9 | 250,9 | 250,5 | —0,4 |
| 1975 | —0,1 | 253,2 | 253,3 | 252,8 | —0,5 |
| 1976 | —0,1 | 255,5 | 255,6 | 255,0 | —0,6 |
| 1977 | —0,1 | 257,8 | 257,9 | 257,3 | —0,6 |
| 1978 | 0 | 260,1 | 260,1 | 259,7 | —0,4 |
| 1979 | +0,3 | 262,4 | 262,1 | 262,0 | —0,1 |
| 1980 | +0,2 | 264,7 | 264,5 | 264,4 | +0,1 |
| 1981 | +0,4 | 267,0 | 266,6 | 266,7 | +0,1 |
| 1982 | +0,5 | 269,3 | 268,8 | 269,1 | +0,3 |
| 1983 | +0,4 | 271,6 | 271,2 | 271,6 | +0,4 |
| 1984 | +0,1 | 273,9 | 273,8 | 274,0 | +0,2 |
| 1985 | —0,1 | 276,2 (прогноз) | 276,3 | 276,5 (прогноз) | +0,2 |

Из теоретических соображений обычно рассчитывают среднеквадратическое отклонение:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{N}_i - N_i)^2}{n}}.$$

Модель (1): $\sqrt{0{,}66/14} = 0{,}22$. Модель (2): $\sqrt{1{,}74/14} = 0{,}35$.

По всем характеристикам модель (1) выглядит предпочтительнее модели (2). К тому же у модели (2) наблюдается тот же недостаток, что и у модели (1): в конце периода модель заметно опережает исходные данные. Однако если на протяжении почти двух третей всего периода первая модель давала превосходное приближение к исходным данным, то значения, генерируемые второй моделью, систематически меньше значений моделируемого ряда. Поэтому говорить об особенностях последнего периода на основе второй модели труднее. Скорее, можно высказать сомнения как по поводу приемлемости самой формы модели, так и по поводу выбора начальной точки периода. Вполне могло случиться, что 1970 г. был особым и нетипичным с точки зрения роста населения. На такое предположение наталкивает

низкий темп прироста в 1971 г. в сравнении с четырьмя последующими годами. Нетипичным был и 1984 г., когда также наблюдался резкий скачок темпа. Отсюда не следует, что значения 1970 и 1984 гг. нужно исключить. Просто не следует требовать от модели, чтобы ее начальное значение обязательно совпадало со значением 241,7 для 1970 г. Можно поставить задачу так: найти средний для периода темп роста и такое значение ряда в 1970 г., чтобы модельные значения как можно меньше отклонялись от реальных.

Попытаемся сначала уточнить таким образом модель (1). Для нее среднее значение прироста $\Delta N = 2{,}3$ уже найдено и остается так выбрать начальное значение, чтобы отклонения модели от значений данного ряда были наименьшими, т. е. чтобы наименьшей была сумма квадратов всех отклонений. Это означает, что начальное значение арифметической прогрессии неизвестно и модель нужно записать в виде

$$\Delta N = 2{,}3, \quad N_{1970} = a,$$

т. е.

$$\hat{N}_{1970+t} = a + 2{,}3t. \tag{3}$$

Для года с номером $t$ отклонение модели (3) от реальных данных $N_t$ будет равно

$$a + 2{,}3t - N_t,$$

а сумма квадратов всех отклонений за 1970—1984 гг.

$$\sum_{t=0}^{14} (a + 2{,}3t - N_t)^2. \tag{4}$$

Нужно так выбрать неизвестное $a$, чтобы эта сумма была наименьшей. Продифференцируем (4) по $a$ и приравняем производную нулю:

$$\sum_{t=0}^{14} [2(a + 2{,}3t - N_t)] = 0.$$

Остается осуществить суммирование. При этом можно отбросить коэффициент 2. Следует заметить, что параметр $a$ войдет в каждое из слагаемых, т. е. встретится 15 раз. Поэтому.

$$15a + 2{,}3 \sum_{t=0}^{14} t - \sum_{t=0}^{14} N_t = 0,$$

откуда

$$a = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} N_t - \frac{2{,}3}{15} \sum_{t=0}^{14} t. \tag{5}$$

Первое слагаемое в формуле (5) — средняя за период численность населения, а во втором сумма может быть легко рассчитана непосредственно:

$$\sum_{t=0}^{14} t = \sum_{t=1}^{14} t = \frac{(1+14)14}{2} = 15 \cdot 7 .$$

Для $a$ можно получить и такое выражение:

$$a = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} (N_t - 2{,}3t) = \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} \{N_0 + [N_t - (N_0 + 2{,}3t)]\} =$$

$$= N_0 + \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} [N_t - (N_0 + 2{,}3t)] = N_0 - \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} [(N_0 + 2{,}3t) - N_t] .$$

Последнее слагаемое представляет собой среднюю арифметическую всех отклонений модельных значений от значений ряда, т. е. среднюю арифметическую чисел из столбца 2 табл. 12. Так как эта средняя арифметическая (с принятой в расчетах точностью) близка к нулю, то улучшить модель (1) за счет выбора $a$ не удается.

Перейдем теперь к модели (2). Здесь нет твердой уверенности ни относительно выбора значения среднего темпа $Q$, ни по поводу выбора начальной точки. Поэтому запишем модель в виде

$$\hat{N}_{1970+t} = AQ^t . \tag{6}$$

Прологарифмируем (6) и получим

$$\lg \hat{N}_{1970+t} = \lg A + t \lg Q . \tag{7}$$

Обозначим $\hat{n}_{1970+t} = \lg \hat{N}_{1970+t}$; $a = \lg A$; $q = \lg Q$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\hat{n}_{1970+t} = a + qt . \tag{8}$$

Если прологарифмировать теперь исходные данные о населении, то возникнет задача, аналогичная рассмотренной для модели (1): нужно будет определить наиболее подходящие значения $a$ и $q$. Для ряда логарифмов численности населения нужно провести операции, аналогичные тем, которые в табл. 12 были осуществлены при построении модели (1) (см. табл. 13):

а) рассчитать приросты логарифмов — столбец 4;

б) найти средний прирост — он равен 0,0039;

в) построить модель для логарифмов численности населения

$$\hat{n}_{1970+t} = n_{1970} + 0{,}0039t \tag{9}$$

и рассчитать соответствующие ей значения $\hat{n}$ — столбец 5;

г) рассчитать отклонения $\hat{n} - n$ — столбец 6;

д) найти $a$ по формуле

$$a = n_{1970} + \frac{1}{15} \sum_{t=0}^{14} (\hat{n}_{1970+t} - n_{1970+t}) ,$$

Таблица 13

**Уточнение модели (2)**

| Годы | $N$ | $\lg N$ | $\Delta \lg N$ | $n_{1970} + 0{,}0039t$ | 5—3 | $241{,}8 \times 1{,}009^t$ | 7—2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1970 | 241,7 | 2,3833 | | 2,3833 | 0 | 241,8 | +0,1 |
| 1971 | 243,9 | 2,3872 | 0,0039 | 2,3872 | 0 | 243,9 | 0 |
| 1972 | 246,3 | 2,3915 | 0,0043 | 2,3911 | —0,0004 | 246,2 | —0,1 |
| 1973 | 248,6 | 2,3955 | 0,0040 | 2,3950 | —0,0005 | 248,4 | —0,2 |
| 1974 | 250,9 | 2,3995 | 0,0040 | 2,3989 | —0,0006 | 250,6 | —0,3 |
| 1975 | 253,3 | 2,4036 | 0,0041 | 2,4028 | —0,0008 | 252,9 | —0,4 |
| 1976 | 255,6 | 2,4076 | 0,0040 | 2,4067 | —0,0009 | 255,2 | —0,4 |
| 1977 | 257,9 | 2,4114 | 0,0038 | 2,4106 | —0,0008 | 257,5 | —0,4 |
| 1978 | 260,1 | 2,4151 | 0,0037 | 2,4145 | —0,0006 | 259,8 | —0,3 |
| 1979 | 262,1 | 2,4185 | 0,0034 | 2,4184 | —0,0001 | 262,1 | 0 |
| 1980 | 264,5 | 2,4224 | 0,0039 | 2,4223 | —0,0001 | 264,5 | 0 |
| 1981 | 266,6 | 2,4259 | 0,0035 | 2,4262 | +0,0003 | 266,8 | +0,2 |
| 1982 | 268,8 | 2,4294 | 0,0035 | 2,4301 | +0,0007 | 269,2 | +0,4 |
| 1983 | 271,2 | 2,4333 | 0,0039 | 2,4340 | +0,0007 | 271,7 | +0,5 |
| 1984 | 273,8 | 2,4374 | 0,0041 | 2,4379 | +0,0005 | 274,1 | +0,3 |
| 1985 | 276,3 | | | | | 276,6 (прогноз) | +0,3 |

т. е. значение $n_{1970}$ изменяется на величину, равную среднему арифметическому значению отклонений, содержащихся в столбце 6. Таким образом,

$$a = n_{1970} - (-0{,}0002) = n_{1970} + 0{,}0002 = 2{,}3835 .$$

Итак, модель (8) окончательно примет вид

$$\hat{n}_{1970+t} = 2{,}3835 + 0{,}0039t . \qquad (10)$$

После ее преобразования к виду (6) получим модель (3):

$$\hat{N}_{1970+t} = 241{,}8 \cdot 1{,}009^t . \qquad (11)$$

По сравнению с моделью (2) модель (3) лишь незначительно изменилась на одну десятую (уточнено начальное значение $\bar{N}$), однако приближение исходного ряда новая модель обеспечивает несколько лучше. Сумма квадратов отклонений

$$\sum_{t=0}^{14} (\hat{N}_{1970+t} - N_{1970+t})^2$$

для модели (3) равна 1,26, а для модели (2) она равнялась 1,69. Поэтому модель (3) приближает исходный ряд лучше, чем модель (2), но хуже модели (1), для которой сумма квадратов отклонений равна 0,75.

**20.4. Изображение данных в виде графиков и диаграмм.** На рис. 49 графически изображены данные о среднедушевом потреблении продукта за 1984—1985 гг. в четырех рассмотренных в п. 20.1 районах (см. табл. 4 и 4а). Каждому значению соответствует точка в середине квартала (иногда удобнее брать точку, соответствующую началу или концу квартала).

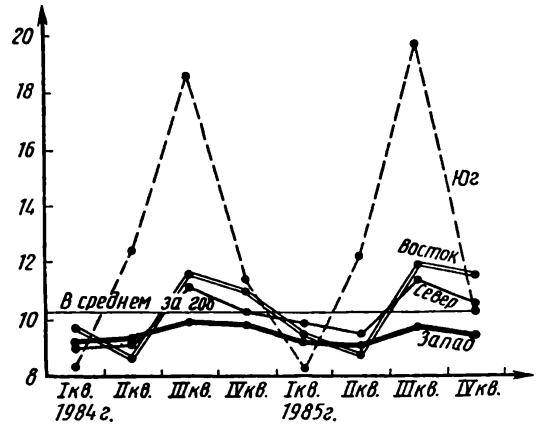



Рис. 49

Ту же информацию можно изобразить в виде *гистограммы*: на рис. 50 каждому значению соответствует свой прямоугольник, высота которого в выбранном масштабе равна уровню потребления в данном квартале, а каждому региону отвечает одна и та же раскраска.

Два графических способа представления данных о среднедушевом потреблении интересующего нас продукта оказываются в данном случае менее выразительными в сравнении с табличным способом представления этих же данных (см. табл. 4 и 4а).

Чтобы отразить структуру потребления, можно воспользоваться секторной диаграммой (рис. 51). Площадь каждого сектора пропорцио-

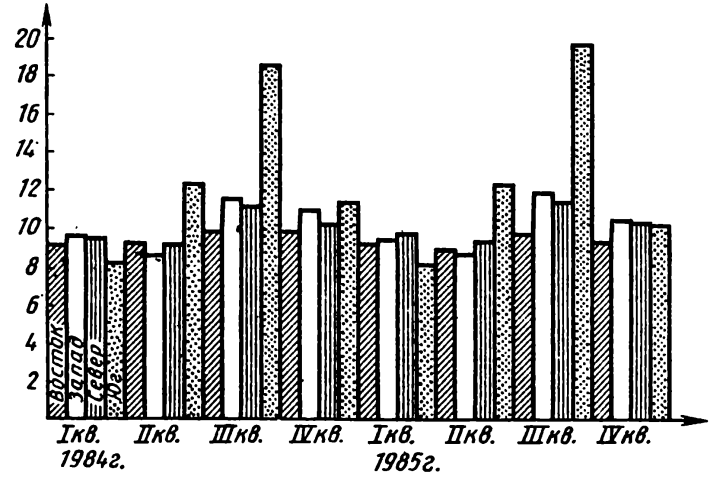



Рис. 50

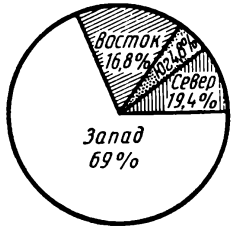



Рис. 51

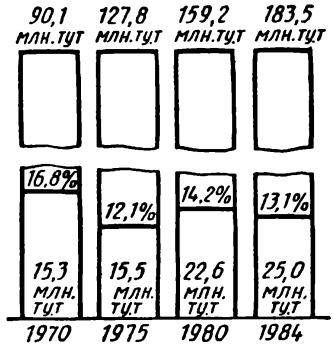



Рис. 52

нальна доле каждого района в суммарном потреблении за рассматриваемый период (использованы данные из табл. 1).

Данные о выработке в СССР электроэнергии, и в частности гидроэлектроэнергии, за 1970—1984 гг. (см. табл. 10) также можно отразить и графически, и с помощью гистограмм. Однако нагляднее содержание этих данных отражает диаграмма, изображенная на рис. 52, в которой отражена информация за 1970, 1975, 1980 и 1984 гг. Наиболее существенное, что заключают в себе соответствующие данные, — это рост общих объемов производства электроэнергии и изменение доли гидроэлектроэнергии. Поэтому прямоугольники на диаграмме выбраны одинаковой высоты. Сверху приведена величина всей произведенной за год электроэнергии. Доля гидроэлектроэнергии указана в процентах к общему производству электроэнергии. Так как доля гидроэлектроэнергии невелика, то верхнюю часть прямоугольника удобнее изображать не полностью. Из диаграммы видно, что доля гидроэлектроэнергии в общем производстве электроэнергии приблизительно постоянна. Колебания этой доли связаны как с погодными условиями, так и с вводом мощностей гидроэлектроэнергетики, который из-за больших объемов строительства происходит скачкообразно. Наблюдается и некоторая тенденция к снижению удельного веса гидроэнергетики в общем объеме произведенной электроэнергии.

**20.5. Обобщающие показатели.** Пусть имеется набор данных из семи элементов

$$2\ 4\ 4\ 5\ 8\ 9\ 10, \qquad (1)$$

означающих, например, стоимости покупок, сделанных семью покупателями, которые поочередно подходили к кассе в магазине самообслуживания.

Значение элемента (наблюдения), встречающееся наиболее часто, называется *модой*. В данном случае это 4.

Значение элемента (наблюдения), находящегося как бы в центре, в том смысле, что не больше этого значения столько же элементов,

сколько не меньше его, называется *медианой.* Для рассматриваемого набора данных это 5 (четыре элемента 2, 4, 4 и 5 не превосходят 5 и четыре элемента 5, 8, 9, 10 не меньше 5).

Величина $M$, равная частному от деления суммы всех элементов рассматриваемого набора данных на число всех элементов, называется *среднеарифметическим значением* или просто *средней.* Для набора данных (1) средняя равна 6. Для набора данных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ средняя равна

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Три указанные характеристики набора, или совокупности данных, обладают особыми свойствами, которые определяют характер их использования.

У совокупности данных может не существовать моды:

2 3 4 5 6;

может быть две моды:

2 3 3 5 6 6 7

или несколько мод. Появление нового оригинального (т. е. не встречавшегося до этого) значения не изменяет моду.

При изучении поступающих данных модой интересуется представитель фабрики, производящей одежду, если он хочет определить наиболее ходовые размеры, а также цену, по которой чаще всего покупают продукцию его фабрики, или модель, пользующуюся наибольшей популярностью.

Медиана была определена так, что она существует лишь для набора данных с нечетным числом элементов. Когда в наборе имеется четное число элементов, то можно указать два из них, находящихся «в центре». Например, для данных

2 4 4 5 8 9 10 14 (2)

ближе к центру находятся значения 5 и 8. В таком случае медианой считают среднее арифметическое значение этих чисел, т. е. 6,5. Значение медианы не изменится, если большие значения станут еще больше, а малые — еще меньше. Так, если последние два значения в наборе (2) станут равными 100 и 140, т. е. увеличатся в 10 раз, то медиана останется прежней и будет равна 6,5. Поэтому медианой пользуются для характеристики данных, в которых имеются редкие, но очень сильные отклонения от преобладающих значений. Например, если один из сотрудников отдела получил Государственную премию, то в качестве представительной характеристики доходов этой группы трудящихся за данный месяц следует выбрать значение медианы. Если же взять значение средней, то оно окажется сильно смещенным, поскольку доход

одного из сотрудников за этот месяц будет соизмерим с доходом всех остальных.

Средняя арифметическая, или просто средняя, чувствительна к любому изменению значений набора данных. Для набора данных (1) она равна 6, для набора данных (2) ее значение равно 7, а если в наборе (2) заменить два последних элемента на 100 и 140, то значение средней окажется равным 34.

Если взять любой набор данных и из каждого вычесть значение средней, например

$$\begin{array}{rcccccccc} & 2 & 4 & 4 & 5 & 8 & 9 & 10 & 14 \\ - & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ \hline & -5 & -3 & -3 & -2 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array},$$

то получим набор чисел (отклонений от средней), сумма которых обязательно равна нулю. Верно и обратное: если сумма всех отклонений данных от некоторого значения, равна нулю, то это значение является средней.

Средняя обладает еще одним важным свойством. Можно составить все отклонения элементов набора данных от любого числа и рассчитать сумму квадратов этих отклонений. Сумма квадратов отклонений будет минимальной тогда и только тогда, когда отклонения рассчитывались от средней. Для набора данных (2) сумма квадратов отклонений от средней равна 110. Если рассчитать отклонения от числа 8, то получим значения

$$-6\ \ -4\ \ -4\ \ -3\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 6,$$

и сумма квадратов отклонений будет равна 118.

Если каждый элемент набора данных увеличить (уменьшить) на одну и ту же постоянную величину, то средняя увеличится (уменьшится) на эту же величину. Если каждый элемент набора данных умножить (разделить) на одну и ту же постоянную величину, то значение средней нужно будет умножить (разделить) на эту же величину. Например, средняя набора данных

$$4\ \ 8\ \ 8\ \ 10\ \ 16\ \ 18\ \ 20\ \ 28,$$

полученного умножением набора данных (2) на 2, будет равна 14, т. е. равна значению средней (2), умноженному на 2.

По отклонениям от средней можно рассчитать характеристики степени рассеяния данных $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ вокруг найденного среднего значения $M$:

$$\text{дисперсия } D=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-M)^2;$$

$$\text{стандартное отклонение } \sigma=\sqrt{D}.$$

Для обозначения дисперсии пользуются также символом $\sigma^2$. Вообще, дисперсия есть среднеквадратическое отклонение от средней, т. е. сумму квадратов всех отклонений нужно было бы разделить на $n$. Однако число $M$ само получено с помощью $X_i$ и поэтому возникает ситуация, с которой мы встречались при анализе данных табл. 12. Там совпадение начальных значений было постулировано заранее и поэтому при расчете среднего отклонения оно не учитывалось. Здесь тоже заранее говорится, что отклонения мы рассчитываем от средней, полученной на основе тех же самых данных, т. е. гарантируется, что средняя всех отклонений равна нулю. В силу этого как бы теряется одно наблюдение.

Характеристики рассеяния (вариации) не зависят от значения средней непосредственно. Если ко всем элементам набора данных прибавить одно и то же число, то дисперсия и стандартное отклонение не изменятся. При умножении всех элементов некоторого набора данных на одно и то же число стандартное отклонение нужно будет умножить на это же число, а дисперсию — на его квадрат.

Для набора данных (2)

$$\sigma^2 = 110/7 = 15{,}71, \quad \sigma = 3{,}96.$$

Часто ставят задачу сравнить между собой два набора попарно соответствующих друг другу данных. Например, нужно сопоставить изменение во времени двух показателей: рост населения СССР ($X$ в млн. человек) и увеличение производства электроэнергии ($Y$ в млн. т условного топлива — т у.т.).

Прежде чем решать задачу сопоставления, каждый набор данных удобно *стандартизовать*:

1) рассчитать среднюю;

2) найти отклонения от средней;

3) вычислить стандартное отклонение;

4) разделить каждое отклонение от средней на величину стандартного отклонения.

Все эти расчеты для двух рассматриваемых наборов данных представлены в табл. 14, столбцы которой расположены так, чтобы стандартизованные ряды было удобнее сравнивать. В результате процесса стандартизации у каждого из двух рядов средняя равна нулю, а дисперсия равна единице. Глядя на стандартизованные ряды, легко заметить сходство в их поведении: оба ряда возрастают, принимая к тому же близкие значения. Такие ряды называют *положительно коррелированными*. Если же при возрастании одного ряда другой убывает, то они будут *отрицательно коррелированными*. Для измерения степени корреляции между двумя стандартизованными наборами данных пользуются *коэффициентом корреляции*, который равен средней величине попарных произведений стандартизованных переменных $x_i$ и $y_i$:

$$R = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Таблица 14

**Сопоставление двух наборов данных**

| Год | $Y$ | $Y-M_Y$ | $y=\frac{1}{\sigma_Y}(Y-M_Y)$ | $x=\frac{1}{\sigma_X}(X-M_X)$ | $X-M_X$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1970 | 91,1 | −47,7 | −1,66 | −1,61 | −16,5 | 241,1 |
| 1971 | 98,4 | −40,4 | −1,40 | −1,34 | −13,7 | 243,9 |
| 1972 | 105,4 | −33,4 | −1,16 | −1,11 | −11,3 | 246,3 |
| 1973 | 112,5 | −26,3 | −0,91 | −0,88 | −9,0 | 248,6 |
| 1974 | 120,0 | −18,8 | −0,65 | −0,66 | −6,7 | 250,9 |
| 1975 | 127,8 | −11,0 | −0,38 | −0,42 | −4,3 | 253,3 |
| 1976 | 136,7 | −2,1 | −0,07 | −0,20 | −2,0 | 255,6 |
| 1977 | 141,4 | 2,6 | 0,09 | 0,03 | 0,3 | 257,9 |
| 1978 | 147,8 | 9,8 | 0,34 | 0,24 | 2,5 | 260,1 |
| 1979 | 152,3 | 13,5 | 0,47 | 0,44 | 4,5 | 262,1 |
| 1980 | 159,2 | 20,4 | 0,71 | 0,67 | 6,9 | 264,5 |
| 1981 | 163,1 | 24,3 | 0,84 | 0,88 | 9,0 | 266,6 |
| 1982 | 168,1 | 29,3 | 1,02 | 1,10 | 11,2 | 268,8 |
| 1983 | 174,4 | 35,6 | 1,24 | 1,33 | 13,6 | 271,2 |
| 1984 | 183,5 | 44,7 | 1,55 | 1,58 | 16,2 | 273,8 |

$M_Y=138{,}8$ $\sigma_Y=28{,}80$ $R=0{,}998$ $\sigma_X=10{,}22$ $M_X=257{,}6$

Сумма попарных произведений делится на $n-1$, а не на $n$ по тем же соображениям, по которым в формулу для дисперсии тоже входит $n-1$. Для данных из табл. 14 $R=0{,}998$.

Если средние значения для исходных данных рассчитаны и равны соответственно $M_X$ и $M_Y$, то формулу для расчета коэффициента корреляции можно записать так:

$$R=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-M_X)(Y_i-M_Y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-M_X)^2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-M_Y)^2}}.$$

Коэффициент корреляции изменяется между $-1$ и 1. Если $R>0$, то возрастание (убывание) $X$ сопровождается, вообще говоря (т. е. не совсем строго, чем ближе $R$ к 1, тем более явно выражена эта связь), возрастанием (убыванием) $Y$. Если $R<0$, то имеет место обратное соотношение: с возрастанием (убыванием) $X$ переменная $Y$ убывает (возрастает).

Если вернуться к исходным, не подвергшимся стандартизации данным для $X$ и $Y$, то нетрудно убедиться в том, что найденная высокая корреляция между рядами объясняется в значительной мере тем, что оба они монотонно возрастают. Однако приросты этих рядов вовсе не так тесно коррелируют, что видно из табл. 15, в которой новые стандар-

Таблица 15

**Сопоставление приростов**

| Годы | $\Delta Y$ | $\Delta Y - M_{\Delta Y}$ | $y = \frac{1}{\sigma_{\Delta Y}} (\Delta Y - M_{\Delta Y})$ | $x = \frac{1}{\sigma_{\Delta X}} (\Delta X - M_{\Delta X})$ | $\Delta X - M_{\Delta X}$ | $\Delta X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1971 | 7,3 | 0,7 | 0,441 | −1,275 | −0,2 | 2,1 |
| 1972 | 7,0 | 0,4 | 0,252 | 0,637 | 0,1 | 2,4 |
| 1973 | 7,1 | 0,5 | 0,315 | 0,000 | 0,0 | 2,3 |
| 1974 | 7,5 | 0,9 | 0,567 | 0,000 | 0,0 | 2,3 |
| 1975 | 7,8 | 1,2 | 0,756 | 0,637 | 0,1 | 2,4 |
| 1976 | 8,9 | 2,3 | 1,448 | 0,000 | 0,0 | 2,3 |
| 1977 | 4,7 | −1,9 | −1,197 | 0,000 | 0,0 | 2,3 |
| 1978 | 6,4 | −0,2 | −0,126 | −0,637 | −0,1 | 2,2 |
| 1979 | 4,5 | −2,1 | −1,322 | −1,912 | −0,3 | 2,0 |
| 1980 | 6,9 | 0,3 | 0,189 | 0,637 | 0,1 | 2,4 |
| 1981 | 3,9 | −2,7 | −1,700 | −1,275 | −0,2 | 2,1 |
| 1982 | 5,0 | −1,6 | −1,008 | −0,637 | −0,1 | 2,2 |
| 1983 | 6,3 | −0,3 | −0,189 | 0,637 | 0,1 | 2,4 |
| 1984 | 9,1 | 2,5 | 1,574 | 1,912 | 0,3 | 2,6 |

$M_{\Delta Y} = 6{,}6$ $\quad \sigma_{\Delta Y} = 1{,}588$ $\quad R = 0{,}65$ $\quad \sigma_{\Delta X} = 0{,}157$ $\quad M_{\Delta X} = 2{,}3$

тизованные переменные $x$ и $y$ уже соответствуют приростам $\Delta X$ и $\Delta Y$. Коэффициент корреляции для приростов оказался равным 0,65, и это значение лучше отражает взаимное изменение переменных $X$ и $Y$.

Коэффициент корреляции позволяет установить связь между стандартизованными переменными $y$ и $x$ и записать *уравнение регрессии* для стандартизованных переменных:

$$y = Rx . \qquad (3)$$

С этого момента переменные $y$ и $x$, а следовательно, и переменные $Y$ и $X$ неравноправны, поскольку одна из них объясняется с помощью другой посредством коэффициента, как правило, отличного от нуля. В данном случае $x$ — объясняющая стандартизованная переменная; $y$ — объясняемая стандартизованная переменная. Если их поменять местами, то нужно будет записать такое уравнение регрессии:

$$x = Ry , \qquad (4)$$

т. е. уравнениям (3) и (4) соответствуют графики, симметричные относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. На рис. 53 изображены линии регрессии, соответствующие уравнениям, связывающим стандартизованные переменные:

$y = 0{,}998x$ — регрессия для стандартизованных исходных данных;

$y = 0{,}65x$ — регрессия для стандартизованных приростов;

$x = 0{,}65y$ — обратная регрессия для стандартизованных приростов.

Каждая из полученных таким образом линий регрессии наилучшим

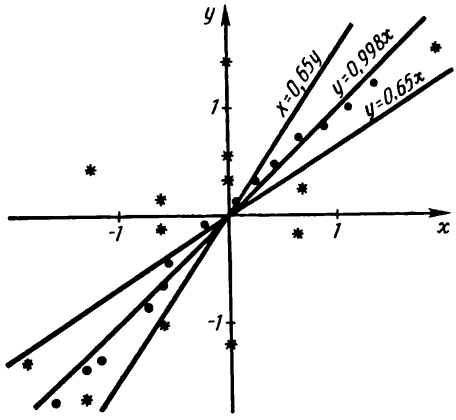



Рис. 53

образом приближает исходные данные. Другими словами, если в исходное уравнение подставить наблюдавшиеся значения объясняющей переменной и рассчитать по ним значения объясняемой переменной, а затем составить разности между наблюдавшимися и расчетными значениями, то сумма квадратов этих разностей будет минимальной, т. е. минимальной будет дисперсия отклонений наблюдавшихся значений объясняемой переменной от линии регрессии. Очень важно помнить, что отклонения измеряются вдоль оси объясняемой переменной. При переходе от регрессии (3) к регрессии (4) изменяется и направление, вдоль которого измеряются отклонения. Этим и объясняется несовпадение двух линий регрессии, соответствующих одним и тем же исходным данным, если при выводе уравнения регрессии исходить из минимального значения суммы квадратов отклонений.

Чтобы перейти от уравнения регрессии (3) к уравнению, связывающему исходные переменные $Y$ и $X$, нужно как бы «обратить» процесс стандартизации переменных. Приведем окончательные формулы, позволяющие найти *коэффициенты регрессии*:

$$Y = bX + a\,; \tag{5}$$

$$b = R\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,; \quad a = M_Y - bM_X\,, \tag{6}$$

где $R$ — коэффициент корреляции между $Y$ и $X$, рассчитанный по имеющимся данным; $\sigma_Y$ и $\sigma_X$ — дисперсии; $M_Y$ и $M_X$ — средние, рассчитанные по тем же данным.

Получим уравнения:

$$Y = 2{,}812X - 585{,}7;$$
$$\Delta Y = 6{,}575\Delta X - 8{,}521;$$
$$\Delta X = 0{,}0643\Delta Y + 1{,}876.$$

# 21. ЭЛЕМЕНТЫ ИНФОРМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## Алгоритм

**21.1 Предмет информатики и понятие алгоритма.** *Информатика* — прикладное научное направление логико-математического характера, рассматривающее теоретическую сторону программирования, организации и обработки данных (на ЭВМ). Нередко под информатикой понимают и саму практическую деятельность, в связи с которой существует это направление.

Базовым для информатики (как «практической», так и «теоретической») является понятие *алгоритма* — конечного, однозначно понимаемого набора предписаний (инструкций). Это не математическое определение (новое понятие не введено как частный случай более широкого). В уточнении нуждается требование «однозначной понимаемости». Кому (или чему) должен быть понятен алгоритм? Достаточна ли для понимания алгоритма ясность каждой отдельной его инструкции?

**Пример 1.** Рассмотрим некоторое устройство, способное выполнять ограниченный набор операций: умножение двух чисел, возведение числа 10 в любую (действительную) степень, вычисление логарифма (десятичного) любого положительного числа. Требуется выполнить с помощью этого устройства сложение двух чисел $A$ и $B$.

Инструкция «сложи $A$ и $B$» не будет «понята» данным устройством, поскольку оно «не знает» операции сложения. Понятным будет следующий алгоритм:

(шаг 1) вычислить $C = 10^A$;
(шаг 2) вычислить $E = 10^B$;
(шаг 3) вычислить $F = CE$;
(шаг 4) вычислить $S = \lg F$.

Таким образом, алгоритм должен быть понятен не вообще, а конкретному его *исполнителю* — человеку или устройству, выполняющему предписанные действия, а само «понимание» означает способность выполнить каждое из предписаний. Предписания могут, в свою очередь, тоже быть алгоритмами, но алгоритмами, уже известными исполнителю. (Например, список понятных устройству из примера 1 операций можно дополнить приведенным там же алгоритмом сложения. Тогда в другом алгоритме можно будет непосредственно пользоваться предписанием «сложи $A$ и $B$», по которому происходит обращение к алгоритму сложения.)

Пример 1 позволяет ответить и на второй из сформулированных вопросов. Достаточно поставить на первое место третье или четвертое из предписаний алгоритма, и он станет непонятным для описанного в примере устройства. Таким образом, для однозначного понимания набора предписаний алгоритма необходимо понимать, во-первых, каждое из них в отдельности (включая и те, которые задают последова-

тельность действий) и, во-вторых, порядок их исполнения, возможно, отличающийся от порядка, в котором они записаны.

*Замечание.* Во многих руководствах по программированию на ЭВМ приводится ряд дополнительных требований, предъявляемых к алгоритму. Говорится, что алгоритм должен удовлетворять требованиям: 1) массовости (применимость для разных исходных данных); 2) конечности (получение результата за конечное число шагов); 3) однозначности (повторное применение к тем же исходным данным приводит к тому же самому результату). В информатике такие уточнения не оправданы. Если бы они были введены, то, например, нельзя было бы считать алгоритмами ни процедуру вычисления числа e (не обладает свойствами массовости и конечности), ни правило, позволяющее найти дорогу в незнакомом районе: «пойти прямо, а затем повернуть направо» (отсутствуют массовость и однозначность).

**21.2. Данные, входы и выходы алгоритма.** Алгоритмы информатики — это алгоритмы *обработки данных*. *Данные* — некоторые «относящиеся к делу» наборы знаков, символов. Это понятие также является в информатике базовым и конкретизируется в процессе постановки задачи. Например, для задачи поиска информации в этом справочнике данными являются все содержащиеся в нем числа, символы, слова и рисунки. Алгоритм, как правило, использует *входные* (исходные) данные (в примере 1 это числа, которые требуется сложить), а в результате работы выдает *выходные* данные (в примере 1 это сумма соответствующих слагаемых). Часто говорят: *данные на входе* и *данные на выходе* алгоритма или просто *входы* и *выходы* алгоритма. То, над чем выполняются алгоритмы или отдельные предписания (операции), называют *операндами* алгоритма (или операции). Понятие операнда шире понятия данных, так как операндом может быть не только символ (слово, число и т. д.), но и предмет: робот обрабатывает или перемещает не слово «деталь» и не ее код, а саму деталь. Точно так же понятие результата работы алгоритма шире понятия выходных данных, ибо результатом тоже может быть предмет или ситуация: обработанная деталь или ее перемещение. Результат одной операции, используемый другой операцией, является для последней операндом.

Алгоритм должен быть результативен, т. е. множество его результатов (возможно, полученное за бесконечное число шагов) должно быть не пусто. В отличие от выходов алгоритма, множество его входов может быть пустым — такой алгоритм не «берет» извне никаких операндов, а сам их «порождает». Так, алгоритм вычисления суммы гармонического ряда (см. пример 2) вырабатывает и последовательность членов этого ряда.

**Пример 2.** Алгоритм вычисления суммы $N$ первых членов гармонического ряда:

(1) присвоить переменной $S$ значение 0;

(2) присвоить переменной $k$ значение 1;

(3) увеличить значение $S$ на величину $1/k$;

(4) если $k$ равняется $N$, то перейти к пункту (3);

(5) вывести полученное значение $S$.

*Замечание.* Номера шагов выполнения алгоритма и пунктов его описания могут совпадать (см. пример 1) и не совпадать (пример 2). Совпадение имеет место для линейных алгоритмов (см. п. 21.4).

**21.3. Типы данных и типы операций.** В информатике, как и в математике, *постоянная* величина *(константа)* задается своим *значением,* а переменная — своим *именем,* состоящим из одного или нескольких символов.

Числовые константы: 1; 2; 0,725.

Числовые переменные: $x$; $a$; $T$; $R193$.

К числовым данным применяют обычные операции над числами (сложение «+», вычитание «—», умножение « *», деление «/», возведение в степень, вычисление логарифма, синуса, тангенса и т. д.).

Чтобы пользоваться переменными, необходима *операция присваивания,* которая записывается в форме $N = R$, где $N$ — имя переменной; «=» — знак операции присваивания; $R$ — выражение, содержащее переменные и константы. Смысл операции присваивания состоит в том, что, во-первых, вычисляется значение выражения, стоящего справа от «=», во-вторых, вычисленное значение присваивается переменной, имя которой записано слева от «=». Поскольку правая часть может содержать произвольное число операций, которые необходимо выполнить, прежде чем можно будет присвоить переменной $N$ конкретное значение, говорят не об операции, а об *операторе присваивания,* $N$ — его левая часть, $R$ — правая.

*Замечание 1.* Оператор присваивания не обладает свойствами равенства. Можно рассматривать оператор присваивания $x = x + 5$. В соответствии с этим оператором «старое» значение $x$ из левой части (скажем, $x = 7$) будет увеличено на 5 и полученное число (12) станет «новым» значением, которое присваивается переменной $x$.

*Замечание 2.* Выполнение операции присваивания возможно только тогда, когда каждая из переменных в правой части оператора имеет конкретное значение.

**Пример 3.**

| Номер | Оператор присваивания | Значения переменных, входящих в правую часть | Результат операции присваивания |
|---|---|---|---|
| 1 | $s = a + \sin 0$ | $a = 5$ | $s = 5$ |
| 2 | $t = (t + a) * 10$ | $t = 0$, $a = 5$ | $t = 50$ |
| 3 | $x = (y - b) * (z - c)$ | $y = 0$, $c = 1$ | Не может быть выполнена, так как значения $b$ и $z$ не заданы |
| 4 | $a = b - 10/x$ | $x = 0$ | Не может быть выполнена из-за появления в правой части деления на 0 |

В информатике рассматриваются разнообразные по типу данные, среди которых числовые данные представляют собой (весьма важный) специальный случай. Для алгоритмов обработки нечисловой информации приходится вводить свои операции, конкретизируя их в зависимости от постановки задачи. Операция присваивания является общей для всех типов данных.

В информатике используются как операции, для которых и операнды, и результаты принадлежат одному типу данных, так и операции, переводящие операнды одного типа в результаты другого, и даже операции с разнотипными операндами и разнотипными результатами.

Могут обрабатываться символьные данные — строки символов. Для обработки таких данных можно ввести, например, операцию «подклейки» (конкатекации) строк, обозначаемую символом «+». В соответствии с этой операцией к строке, стоящей перед знаком «+», будет «подклеена» строка, стоящая за ним, и из этих двух строк будет образована новая строка.

**Пример 4.** Рассмотрим алгоритм:

(1) $X=$"СТО";
(2) $Y=$"НИЗВОДИТ К";
(3) $Z=$"ЕДИНИЦ";
(4) $T=$"Е";
(5) $S=X+Y+Z+T$;
(6) $U=$"ТВОРИТ ИЗ";
(7) $V=$"Ы";
(8) $S=S+X+U+V$.

Первые четыре оператора присваивают соответствующим символьным переменным значения текстовых констант, пятый оператор подклеивает их друг за другом, образуя строку: "СТО НИЗВОДИТ К ЕДИНИЦЕ,". Аналогично, восьмой оператор удлиняет эту строку:

"СТО НИЗВОДИТ К ЕДИНИЦЕ, СТО ТВОРИТ ИЗ ЕДИНИЦЫ."

Приведенные выше примеры содержали (в правых частях операторов присваивания) только *операции преобразования данных.* В общем случае рассматривают разнообразные *отношения* между данными. Например, для числовых данных существуют отношения «больше», «меньше», «равно» и т. д., для данных, являющихся геометрическими объектами, — «длиннее», «описан вокруг», «является секущей» и т. д., для языковых объектов — «является суффиксом», «служит сказуемым» и т. д.

Внутри алгоритма отношение может быть записано между именами переменных. После того как в процессе реализации алгоритма этим именам будут присвоены конкретные значения, можно проверить, выполняется записанное отношение или нет, и в зависимости от этого строить дальнейшую работу алгоритма. На этом основан *условный оператор,* предусматривающий, во-первых, проверку выполнения отношения (условия), во-вторых, переход в зависимости от результата проверки к выполнению одного из альтернативных (взаимоисключающих) пред-

писаний. Чтобы обеспечить такой переход, необходим специальный оператор, который так и называется *оператором перехода.* С его помощью осуществляется переход от исполнения одного предписания (пункта) к другому. Оператор перехода не зависит от типа данных и предназначен только для установления последовательности выполнения шагов алгоритма, т. е. оператор перехода является *оператором управления* последовательностью действий, реализуемых алгоритмом. Условный оператор и оператор перехода встречались в примере 2.

**Пример 5.** С помощью оператора присваивания пример 2 можно переписать следующим образом:

(1) $S = 0$;
(2) $k = 1$;
(3) если $k > N$, то перейти к пункту (7);
(4) $S = S + 1/k$;
(5) $k = k + 1$;
(6) перейти к (3);
(7) вывести $S$.

В этой записи оператор перехода встречается дважды: в пункте (6) стоит *оператор безусловного перехода* (его выполнение состоит в передаче управления оператору, на который в операторе безусловного перехода имеется ссылка), а в пункте (3) — оператор перехода, который является частью условного оператора (его называют *условным оператором перехода*).

Наряду с операторами присваивания, операторами перехода и условными операторами перехода в алгоритмах используют *операторы ввода* и *операторы вывода,* обеспечивающие соответственно реализацию процедур ввода и вывода данных.

**21.4. Форма записи и структура алгоритмов.** Алгоритм может быть записан:

на естественном языке ('дождаться автобуса № 57, проехать три остановки, перейти на противоположную сторону');

на языке математических символов (примеры 1 и 2);

на языке рисунков и схем (см. ниже).

Выбор языка представления алгоритма определяется удобством и возможностью его понимания тем, кому алгоритм адресован (как правило, исполнителем или посредником).

Графическое представление алгоритма позволяет отразить его *структуру,* т. е. порядок исполнения предписаний и взаимосвязи между ними, которые изображаются стрелками (вместо стрелок, ведущих сверху вниз, обычно рисуют отрезки). Сами предписания (или их обозначения) помещают в фигурах (овалах и четырехугольниках). В результате получают *блок-схему* алгоритма, где каждое предписание является *блоком.*

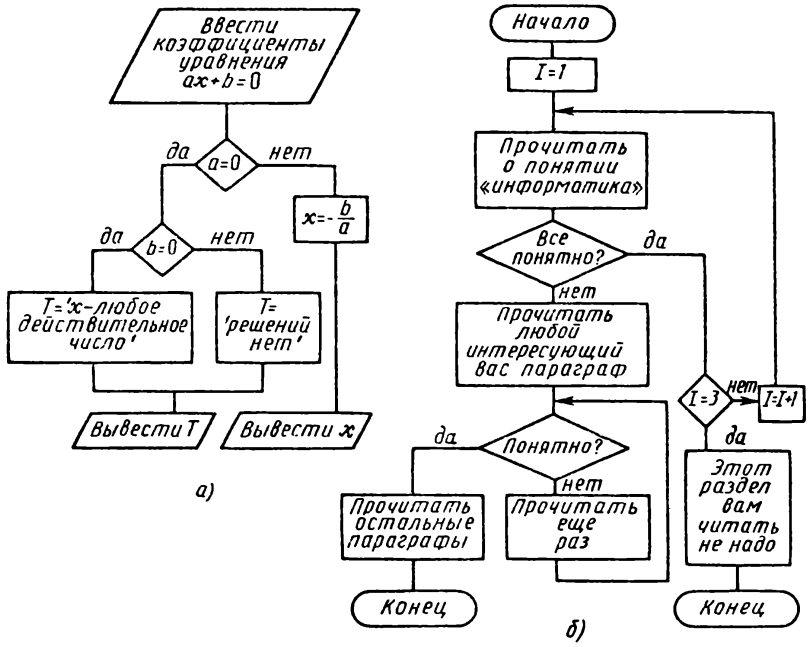



Рис. 54

На рис. 54 для обозначения соответственно использованы:

| | |
|---|---|
| операторы ввода и вывода | — параллелограммы, |
| условные операторы | — ромбы, |
| операторы присваивания | — прямоугольники, |
| другие предписания | — прямоугольники, |
| операторы «начало» и «конец» | — овалы. |

На двух изображенных блок-схемах прямоугольниками обозначаются разные операторы. Такая «неоднозначность» в обозначениях вполне допустима, поскольку блок-схемы адресованы человеку, а не машине.

Оператор, из которого исходит стрелка, называется *предшественником,* а оператор, на который стрелка указывает, — *преемником.* В примере 1 операторы выполнялись последовательно один за другим, так что у каждого (кроме последнего) был ровно один преемник и у каждого (кроме первого) был ровно один предшественник (см. рис. 55, *а*). Такие алгоритмы называют *линейными* и говорят, что операторы в них строго линейно упорядочены. Алгоритмы могут содержать *разветвления,* порождаемые условными операторами. Часто решение одной и той же задачи можно записать как в виде линейного алгоритма, так и в виде алгоритма, содержащего условный оператор.

**Пример 6.** Возвести $x$ в 7-ю степень.

| Линейный алгоритм | Алгоритм с условным оператором |
|---|---|
| (1) $M=x$; | (1) $N=7$; |

| | |
|---|---|
| (2) $M = M * x$; | (2) $M = x$; |
| (3) $M = M * x$; | (3) $k = 1$; |
| (4) $M = M * x$; | (4) $M = M * x$; |
| (5) $M = M * x$; | (5) если $k = N$, перейти к (8); |
| (6) $M = M * x$; | (6) $k = k + 1$; |
| (7) $M = M * x$; | (7) перейти к (4); |
| (8) вывести $M$. | (8) вывести $M$. |

Хотя оба алгоритма содержат одинаковое число операторов (эти алгоритмы равны по объему), по времени счета первый даже экономнее. Однако для большего показателя степени (скажем, $N = 100$) в описании первого потребуется 101 пункт, а во втором достаточно изменить только значение $N$ в первом операторе.

Операторы (4) — (7) во втором алгоритме из примера 6 (как и предписания (3) — (4) в примере 2) повторяются *циклически*, а сами эти операторы образуют *тело цикла*. Переменная $k$ является *счетчиком цикла*.

**Пример 7.** Рассмотрим четыре устройства, каждое из которых способно выполнять только ограниченный набор операций: умножение двух чисел, возведение числа 10 в любую (действительную) степень, вычисление десятичного логарифма любого положительного числа (см. пример 1). Требуется с помощью этих четырех устройств быстро сложить четыре числа.

Обозначим числа через $A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Можно обобщить алгоритм из примера 1:

(1) возвести 10 в степень $A_1$;

(2) возвести 10 в степень $A_2$;

(3) возвести 10 в степень $A_3$;

(4) возвести 10 в степень $A_4$;

(Комментарий: закончили возведение в степень.)

(5) умножить результат операции (1) на результат операции (2);

(6) умножить результат операции (5) на результат операции (3);

(7) умножить результат операции (6) на результат операции (4);

(Комментарий: закончили умножение.)

(8) вычислить десятичный логарифм от результата операции (7).

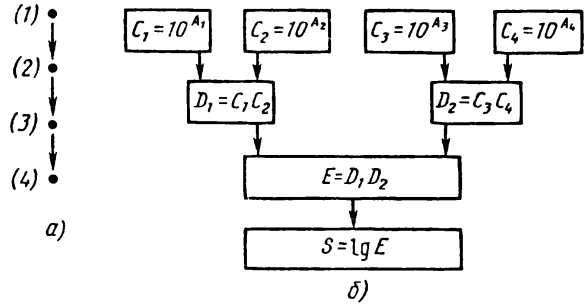



Рис. 55

Как и в примере 1, здесь явно задан порядок выполнения всех предписаний. Однако время решения задачи можно уменьшить, если организовать вычисления так, чтобы некоторые предписания выполнялись одновременно. Порядок вычисления первых четырех операций может быть произвольно изменен, и это не повлияет на результат. Поэтому их можно выполнить одновременно на четырех имеющихся устройствах. Далее операции умножения можно сначала выполнить попарно, а затем умножить полученные результаты. Получим более компактный и быстрее реализуемый алгоритм:

(1) на устройстве с номером $k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) возвести 10 в степень $A_k$;

(2) на каждом устройстве с номером $2p$ (на втором и четвертом) умножить результат предыдущего шага на число, записанное в устройстве с номером $2p - 1$;

(3) на устройстве с номером 4 умножить результат предыдущего шага на число, записанное в устройстве с номером 2;

(4) взять десятичный логарифм от числа, записанного в устройстве с номером 4.

Алгоритм из примера 7 не содержит условных операторов, однако его структура отличается от линейной: операторы, расположенные на рис. 55, *б* на одном уровне, могут выполняться одновременно (параллельно).

Эти операторы (или операции) являются *независимыми*, поскольку выполнение одного возможно без предварительного выполнения другого. Для независимости операторов необходима независимость операндов каждого из них от результатов других.

Структуры алгоритмов, изображенные на рис. 55, *а*, *б*, указывают только порядок следования операций, в то время как операнды и результаты лишь подразумеваются: в графическом изображении вершины (рис. 55, *а*) и блоки (рис. 55, *б*) соответствуют операциям, а стрелки указывают взаимосвязь операций. Такая структура называется *управляющей структурой* алгоритма. Стрелки указывают в ней *передачу управления* от операции к операции.

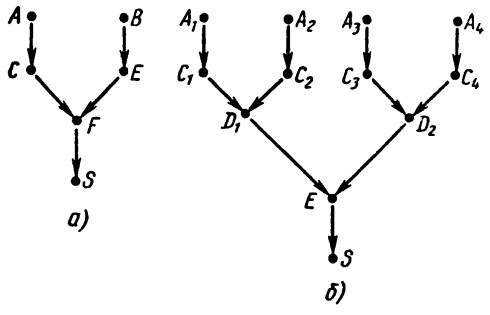



Рис. 56

Изменить управляющую структуру алгоритма (например, на рис. 55, *а* поменять местами первую и вторую операции) можно лишь зная, как связаны между собой операнды и результаты, т. е., зная *информационную* структуру алгоритма. Информационная структура тоже изображается графиче-

ски: вершинами будут операнды и результаты, а стрелки указывают направления от операндов к результатам для каждой конкретной операции.

При этом одной операции с одним результатом соответствуют все стрелки, ведущие в соответствующую результату вершину. На рис. 56, *а, б* изображены соответственно информационные структуры алгоритмов из примеров 1 и 7.

## Обработка данных на вычислительной системе

**21.5. Общее представление о вычислительной системе.** *Вычислительная система* (ВС) представляет собой набор взаимодействующих *аппаратных* (технических) и *программных* средств, предназначенных для выполнения алгоритмов (не обязательно вычислительных) обработки данных. ВС может входить в состав другой системы (например, робототехнической), выполняющей алгоритмы не только над данными, но и над объектами. Однако сама ВС при этом имеет дело только *с информацией* о предметах и предметной деятельности, т. е. с данными. Таким образом, ВС является *исполнителем алгоритмов*. Из этого следует, что ВС должна как минимум обладать следующими возможностями: вводить и выводить данные, перерабатывать их согласно исполняемому алгоритму, запоминать промежуточные результаты. Для этого требуются устройства ввода и вывода информации, устройство ее обработки, память.

Чтобы скоординировать работу названных устройств и обеспечить выполнение (прохождение) алгоритмов, по отношению к которым она является исполнителем, сама ВС должна быть реализацией алгоритма. Этот управляющий алгоритм вычислительной системы — *алгоритм ВС* работает с тремя типами операндов: алгоритмами, данными и устройствами.

**Пример управляющего алгоритма.** Рассмотрим пример алгоритма, управляющего прохождением алгоритмов обработки данных через ВС, содержащую три типа устройств: устройства ввода, устройства вывода и устройства обработки, последние из которых обладают собственной памятью. Пусть в состав некоторой ВС входят: одно устройство ввода — обозначим его $I_1$, одно устройство вывода $O_1$, два устройства обработки $E_1$ и $E_2$. На входе алгоритма, управляющего работой ВС (алгоритма ВС), находится очередь *алгоритмов обработки данных* (АОД), из которой алгоритм ВС с помощью устройства ввода берет следующий алгоритм для исполнения. Данные, соответствующие очередному АОД, вводятся, а результаты обработки выводятся с помощью тех же устройств ввода и вывода. Любое из устройств ВС может находиться в одном из двух состояний: «свободно» или «занято» (вводом, выводом или выполнением очередного алгоритма). Введем следующие три операции:

1) над исполнителями — «сообщи состояние», которую обозначим словом STATE (предписание «сообщи состояние первого устройства обработки» будет записано как STATE ($E_1$), а результат операции STATE — «занято» или «свободно»);

2) над алгоритмами — «взять из очереди первый», которую обозначим FROM, и тогда FROM (у этой операции нет аргументов) есть имя очередного выбираемого из очереди алгоритма;

3) над устройствами и алгоритмами — «выполнить», которую обозначим EXECUTE (запись EXECUTE ($E_2$, $S$) означает, что надо ввести с помощью устройства ввода алгоритм $S$ и начать его выполнение на устройстве обработки $E_2$). Фрагмент алгоритма, обеспечивающего обработку АОД, будет выглядеть так:

(1) $k = 1$;
(2) если STATE ($E_k$) = 'свободен', перейти к (5);
(3) если $k = 2$, перейти к (1);
(4) $k = 2$ и перейти к (2);
(5) если STATE ($I_1$) = 'свободен', перейти к (7);
(6) перейти к (5);
(7) EXECUTE ($E_k$, FROM) и перейти к (3).

По этому «блоку запуска» алгоритмы выбираются из очереди и передаются на выполнение свободному устройству обработки.

В этом примере ВС одновременно выполняет два алгоритма из очереди алгоритмов. Если их выходные сообщения выдаются порциями, то без специального входящего в состав алгоритма ВС «блока вывода» (управляющего выводом этих сообщений) в ВС возникла бы путаница: терялись бы сообщения, посылаемые алгоритмами на занятое в данный момент (выводом другого сообщения) устройство вывода, сообщения от разных алгоритмов выводились бы в последовательности их поступления на устройство вывода, т. е. «вперемежку» (например, сперва сообщение первого, потом второго алгоритма, после чего опять первого, и т. д.).

Даже из этого упрощенного примера видно, что в ВС должно быть и устройство управления, выполняющее алгоритм ВС, т. е. координирующее работу остальных устройств и выполнение пропускаемых через ВС алгоритмов.

Таким образом, в состав ВС должны входить устройства пяти типов: управления, обработки, ввода, вывода и память. Необходимость этих устройств следует из логики работы ВС как исполнителя алгоритмов и как реализации алгоритма ВС; сами устройства называются *логическими,* а отражающие их взаимодействие связи — *логической структурой* ВС. Физическая (в виде конкретных технических устройств) их реализация может быть различна.

Одни и те же функции алгоритма ВС могут осуществляться как *программными,* так и *аппаратными* (техническими) средствами. Реа-

лизованная в виде программ часть алгоритма ВС называется *операционной системой,* а входящие в ее состав программы *системными.*

При разработке ВС (а не при создании программ для уже имеющихся технических средств) разделение элементов алгоритма ВС между аппаратной и программной составляющими определяется стоимостью изготовления, достигаемым в результате такого разделения быстродействием, возможностью вносить изменения. Непосредственная аппаратная реализация обеспечивает большее быстродействие, упрощает разработку и выполнение алгоритмов обработки данных, но обычно имеет бóльшую стоимость и допускает изменения только путем замены блока аппаратуры. Как правило, почти весь алгоритм ВС реализуется в виде операционной системы, а аппаратно реализуются разные типы команд и данных.

**21.6. Аппаратные средства ВС.** *Аппаратные средства* (называемые также *техническим обеспечением)* — это физическая реализация логических устройств ВС.

*Процессор* (он же «центральный процессор» в однопроцессорных ВС) — устройство обработки информации. Включает собственно *арифметико-логическое устройство* и (в однопроцессорных ВС) *устройство управления.* Однопроцессорная ВС обычно называется *электронно-вычислительной машиной* (ЭВМ) или *компьютером.* В многопроцессорных ВС функцию устройства управления исполняет, как правило, специально выделенный процессор, организующий одновременную работу остальных процессов и всей системы в целом. На таких ВС выполняются *параллельные* (или *распараллеливаемые)* алгоритмы (см. пример 7).

Процессор непосредственно выполняет *машинные операции (команды),* каждая из которых содержит *код операции* и обычно от одного до трех операндов. При этом операндами являются не сами данные, предназначенные для аппаратного выполнения этих машинных операций, а *адреса,* по которым данные расположены, например, в оперативной памяти (см. ниже) или в самом процессоре. За элементарный *такт* работы процессора происходит: 1) выбор (считывание) из оперативной памяти очередной команды; 2) определение устройством управления по коду операции ее типа; 3) передача в арифметическое устройство операндов — адресов данных; 4) исполнение (по сигналу устройства управления) арифметическим устройством операции; 5) определение адреса следующей команды.

*Оперативная память* ВС — устройство, хранящее программы и данные, непосредственно выбираемые из него (или записываемые в него) процессором. Из-за высокой стоимости объем оперативной памяти ограничен. Кроме того, оперативная память не сохраняет своего состояния. Например, при отключении электропитания записанная в ней информация затирается. Поэтому вся память ВС имеет *уровневую организацию,* включающую кроме быстродействующей оперативной еще и менее быструю *внешнюю* память на магнитных носителях (дис-

ках, лентах и т. п.), которая сама также неоднородна по времени доступа к ней (запись и считывание информации с диска или его аналога — устройства, выполненного по тому же принципу, — производится значительно быстрее, чем с ленты). Однако и физически однородная память ВС (в первую очередь оперативная) может быть неоднородной по возможности доступа к ней. Например, алгоритму ВС доступна вся память, а обычному пользовательскому алгоритму обработки данных — лишь память, отводимая под него алгоритмом ВС. Точно так же в многопроцессорных ВС процессоры могут иметь как общую память (называемую общим полем памяти), доступную всем процессорам, так и каждый свою (*локальную*) память.

*Устройства ввода/вывода* обычно являются «двусторонними» — они выполняют обе функции, т. е. и ввод, и вывод информации. «Двусторонним» является и *терминал* — аппаратно-программное устройство, позволяющее пользователю общаться с ВС и способное во многих ВС работать независимо от ее остальных устройств. В состав терминала входит как минимум устройство ввода с клавиатуры и устройство отображения вводимой и поступающей от ВС информации — пишущая машинка, телевизор. Терминал имеет (по крайней мере, небольшую) собственную оперативную память, называемую *буферной* (в этой памяти размещается обмениваемая с ВС и «редактируемая», например вводимая пользователем, информация). Терминал может представлять собой и малую ЭВМ (например, персональный компьютер), но обычно в его состав входят клавиатура, телевизор (называемый *дисплеем*) и буферная память. Вывод текстов может производиться с помощью специального устройства печати — *принтера*.

Обмен информацией с внешними устройствами (непосредственно между внешним устройством и оперативной памятью или же с промежуточной пересылкой в арифметико-логическое устройство) осуществляет *канал* — устройство управления внешними устройствами и обмена с ними. К одному каналу может присоединяться до нескольких десятков внешних устройств. Канал сам является процессором, имеющим собственную память и работающим параллельно с центральным процессором, что исключает непроизвольные затраты ресурсов центрального процессора на обмен с медленными внешними устройствами.

**21.7. Программные средства ВС.** *Программные средства (программное обеспечение)* — комплекс программ, дополняющих аппаратные средства и (главным образом) составляющих *алгоритм функционирования ВС*.

*Программа* — запись на языке программирования. Эта запись не обязательно является алгоритмом, т. е. не обязательно явно включает управляющую структуру (см. п. 21.5). *Языки программирования* делятся на *процедурные* (или *алгоритмические*) и *непроцедурные (неалгоритмические)*. В алгоритмических языках требуется явная запись самих операций и порядка их выполнения (т. е. управляющей струк-

туры). Запись на непроцедурном языке предполагает наличие у исполнителя алгоритма, обеспечивающего возможность выполнения программ на этом языке. Процессор (или ВС) способен «понимать», т. е. исполнять только программы, написанные на машинном языке — с помощью машинных команд.

Существенно облегчает процедуру составления программ замена используемых в машинных командах цифровых кодов и адресов на их буквенно-цифровые имена. (Скажем, вместо кода 1011 операции сложения можно написать СЛОЖ, а вместо адреса слагаемого — «имя» этого адреса, например *А*.) Программирование на этом символическом языке нисколько не сокращает доступный программисту набор команд ВС и позволяет учитывать при составлении программ конструктивные особенности конкретной ВС и все ее машинные команды. Перевод символической программы в машинную выполняет специальная программа ВС, заменяющая «имена» их цифровыми кодами.

Еще более удобны для написания программ так называемые языки *высокого уровня,* отличающиеся от машинных и символических операциями и типами данных. Например, в машинном языке нет типа данных «комплексные числа» или операции вычисления синуса. Однако на машинном языке можно написать программу, действующую с парой вещественных чисел как с комплексным числом, или программу, вычисляющую синус. Средство, позволяющее «перевести» *(оттранслировать)* операторы программы, написанной на языке высокого уровня, в машинные команды, называется *транслятором* (с данного языка высокого уровня). Возможна аппаратная или аппаратно-программная реализация такого перевода или включение в состав ВС специальных процессоров, машинный язык которых содержит «нетрадиционные» типы данных и операции (например, для работы с текстами). Обычно же перевод выполняет системная *программа-транслятор.*

Трансляция производится в одном из двух режимов: *компиляции* или *интерпретации.* Компилятор создает по исходному тексту программы, написанной на языке высокого уровня, программу на машинном языке, которая в дальнейшем может быть исполнена как любая машинная программа. Интерпретатор, считывая очередной оператор исходной программы, «распознает» его и тут же выполняет предписанные им действия (само считывание начинается, конечно, с первого оператора программы и продолжается в обычном порядке, пока не встретится оператор перехода; по адресу в операторе перехода интерпретатор находит в тексте программы место, куда должен быть произведен переход, и продолжает работу с этого места).

Интерпретируемая программа исполняется медленнее, чем уже откомпилированная программа (интерпретатор не только исполняет результат трансляции исходной программы, как это имеет место после ее компиляции, но и транслирует каждый очередной оператор даже если он встречается повторно). Когда высокая скорость не требуется,

а нужно организовать *диалог* человека, сидящего за терминалом, с программой, режим интерпретации оказывается более удобным. Языки программирования, обеспечивающие проведение диалога, называются *диалоговыми*.

## Программирование на языке BASIC

**21.8. BASIC-система.** BASIC (или, как пишут по-русски, БЭЙСИК) является диалоговым алгоритмическим языком программирования. Программы, написанные на этом языке, выполняются интерпретирующей BASIC-системой, входящей в состав программного обеспечения конкретной ВС. Обычно BASIC-система также предоставляет возможность компиляции BASIC-программ. Кроме этого, она выполняет функции программы-редактора: с ее помощью с клавиатуры вводится, подвергается исправлениям, запоминается во внешней памяти ВС и удаляется из памяти текст BASIC-программы. Таким образом, оставаясь в рамках BASIC-системы, можно выполнить весь цикл работ по превращению исходного текста в реально работающую программу. Различные версии BASIC-систем отличаются возможностями редактирования текстов программ, средствами, с помощью которых конкретная ВС интерпретирует (или компилирует) BASIC-программы, входным языком, т. е. версией самого языка BASIC. Существует довольно много версий языка BASIC, и программа, «понятная» одной BASIC-системе, возможно, не будет исполняться другой. Приводимые ниже операторы и типы данных имеются в большинстве версий, однако они служат скорее иллюстрацией принципов построения самого языка, нежели руководством для его изучения.

Существует два режима исполнения операторов языка BASIC — *непосредственный* и *программный*. Для работы в программном режиме пользователь должен нумеровать строки программы; если же вводимая строка содержит оператор языка BASIC, которому не предшествует в строке натуральное число (воспринимаемое BASIC-системой как номер строки), то BASIC-система обрабатывает эту строку в непосредственном режиме: введенный оператор тут же исполняется (если это возможно; иначе на экран дисплея выдается сообщение об ошибке). Работа в непосредственном режиме поэтому может вестись только с линейными алгоритмами, и не все операторы языка BASIC можно использовать в непосредственном режиме. Ниже рассматривается программный режим.

**21.9. Работа с BASIC-системой и правила записи BASIC-программ.** Ввод с клавиатуры. BASIC-система обеспечивает возможность ввода программ с клавиатуры. Набираемый текст при этом высвечивается на экране дисплея (при нажатии клавиши на экране тут же появляется соответствующий символ). Программа вводится построчно.

Строка экрана имеет длину 80 символов, из которых используются первые 72. Первым в строке следует набирать ее *номер* — натуральное число, после которого записывается один или более операторов языка BASIC. Операторы, расположенные в одной строке, следует отделять один от другого знаком '\' или знаком ':' (двоеточие).

Строки программы можно вводить в произвольном порядке их номеров, BASIC-система сама производит упорядочение строк по возрастанию их номеров. Например, введя строки с номерами 4, 10, 11, можно уже после этого ввести строку с номером 5, которую BASIC-система разместит следом за строкой 4.

Ввод строки, имеющей тот же номер, что и одна из введенных ранее, приводит к замене (замещению) старой строки новой. *Удаление* любой ранее введенной строки производится вводом ее номера.

Операторы языка BASIC и директивы BASIC-системы. Функции BASIC-системы не ограничиваются выполнением операторов языка BASIC. BASIC-система обеспечивает также возможности редактирования текстов программ, их трансляции и выполнения. Для этого используются операторы BASIC-системы (называемые *директивами* или *командами* BASIC-системы), не являющиеся операторами языка BASIC.

Оператор задается его *форматом,* т. е. формой записи. В описании формата пояснения последовательных его составляющих заключены в угловые скобки. То, что не заключено в такие скобки, входит в запись оператора непосредственно.

Команды BASIC-системы.

SUB — оператор замены внутри ранее введенной строки.

Формат:

SUB <номер строки> <разделитель> <замещаемая подстрока> <разделитель> <замещающая подстрока>

(Комментарий: <замещаемая подстрока> — любая часть исправляемой строки, возможно, и ее номер, вместо которой должна быть помещена <замещающая подстрока>; <разделитель> — любой символ, не содержащийся в замещаемой подстроке; по оператору SUB замещается первая (слева) замещаемая подстрока (если она содержится несколько раз, то остальные замещены не будут); запись оператора SUB может занимать больше строки.)

RESEQ — оператор «переупорядочения», изменения номеров строк введенной части программы: независимо от прежних номеров первая из имеющихся строк получает номер 10, вторая номер 20, затем 30, 40 и т. д. с шагом 10. Соответственно изменяются номера строк, упоминаемые внутри операторов.

LIST — оператор, по которому текст программы высвечивается на дисплее.

Форматы:

LIST

(Комментарий: в ответ на эту команду BASIC-система выдает на экран (поочередно строка за строкой) текст всей программы — машина как бы прочитывает ее; если программа не помещается на экране, то остается высвеченной ее последняя часть.)

LIST <с какой> — <по какую>

(Комментарий: указываются номера первой и последней из выводимых строк; между этими номерами ставится тире.)

LIST <с какой> —

(Комментарий: указывается номер первой выводимой на дисплей строки и после него ставится тире; начиная с указанного номера программа как бы «прочитывается», как в случае LIST.)

LIST — <по какую>

(Комментарий: после тире указывается номер последней из строк, которые будут высвечены на экране; начало программы может не уместиться на экране.)

LIST <номер строки>

(Комментарий: в ответ на эту команду будет высвечена строка программы с указанным номером.)

RENAM — оператор присвоения или изменения имени программы.

Формат:

RENAM <имя программы>

(Комментарий: имя присваивается программе, находящейся в оперативной памяти; по этому имени программа, переписанная во внешнюю память, может быть в ней найдена.)

RUN — оператор запуска программы, находящейся в оперативной памяти.

Перечисленные директивы BASIC-системы действуют над программой, находящейся в оперативной памяти. С помощью команд SAVE («сохрани») и OLD («старая») осуществляется обмен между оперативной памятью и внешней памятью ВС.

SAVE — оператор передачи находящейся в оперативной памяти программы «на хранение» во внешнюю память.

OLD — оператор извлечения текста программы из внешней памяти.

Формат:

OLD <имя программы>

**Пример 1.** На экране высвечен следующий введенный с клавиатуры текст программы:

```
17 PRINT 'ЖДАВСТВУЙТЕ, ВВЕДИТЕ ВАШЕ ИМЯ'
18 PRINT 'ДО СВИДАНИЯ'; AΩ
```

Нужно исправить опечатку в строке 17:

SUB 17 КЖКЗ

(в качестве разделителя использована буква 'К'). Теперь нужно вставить строку между 17 и 18. Поскольку свободных номеров между 17 и 18 нет, нужно перенумеровать введенные строки программы:

RESEQ

По этой команде 17-я строка получает номер 10, а 18-я — номер 20. Вводим пропущенную строку:

```
15 INPUT A$
```

Командой LIST выводим на экран исправленный текст:

```
10 PRINT 'ЗДРАВСТВУЙТЕ, ВВЕДИТЕ ВАШЕ ИМЯ'
15 INPUT A$
20 PRINT 'ДО СВИДАНИЯ'; A$
```

Присвоим этой программе имя HELLO:

RENAME HELLO

и запишем программу на диск:

SAVE.

**21.10. Типы данных**. В языке BASIC различают три типа данных: целые числа, действительные числа, символьные данные. Первые два типа данных вместе образуют *числовые данные*. Каждому типу данных соответствует своя форма машинного представления.

Запись констант трех типов на языке BASIC имеет вид:

после целой константы ставится признак целочисленности '%';

действительные числа записывают либо в традиционной форме: с использованием точки (отделяющей в языках программирования целую часть от дробной), или без нее, если число целое, либо в *нормализованной* форме:

<мантисса> E <десятичный порядок>;

символьная константа, т. е. произвольная последовательность символов (строка), заключается в кавычки (если предполагается записать последовательность, содержащую кавычки, то она сама заключается в одинарные кавычки, а каждая из ее внутренних кавычек удваивается).

**Пример 2.** Числовые константы: 1) 1%; 2) 1; 3) 1.0; 4) —78.5; 5) —7.85E + 1; 6) 3,4.

Константа 1) — целое число; 2) — 5) — действительные числа, причем 2) и 3), а также 4) и 5) — одинаковые действительные числа, по-разному представленные; 6) — ошибочная запись.

Символьные константы:

1) 'ЗДЕСЬ ЗАПИСАНА СТРОКА СИМВОЛОВ';

2) 'ОДНА КАВЫЧКА ". ДВЕ "". И — """ — ТРИ'.

Второй пример представляет собой запись строки: ОДНА КАВЫЧКА'. ДВЕ". И — "" — ТРИ.

*Имя* (иначе называемое *идентификатором) переменной* в языке BASIC состоит не более чем из трех символов, первым из которых обязательно является буква латинского алфавита, затем может идти (а может и отсутствовать) только одна цифра, последним символом является признак типа ('%' — для целочисленных переменных и $ — для символьных). Если специальный признак типа отсутствует, то пере-

менная считается действительной (таким образом, имя действительной переменной состоит не более чем из двух символов).

**Пример 3.** Переменные: 1) A; 2) B7; 3) C3%; 4) L%; 5) Z$; 6) P8$; 7) AC.

Переменные 1) и 2) — действительные; 3) и 4) — целочисленные; 5) и 6) — символьные; 7) — ошибочное имя (второй символ не цифра и не признак типа переменной).

**21.11. Стандартные арифметические функции.**

INT(X) — целая часть числа $X$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $X$;
SGN(X) — знак числа $X$ ($-1$ при $X<0$, 0 при $X=0$, 1 при $X>0$);
ABS(X) — абсолютная величина $X$;
SQR(X) — квадратный корень из $X$ ($X\geqslant 0$);
PI — число $\pi$;
SIN(X) — синус $X$;
COS(X) — косинус $X$;
ATN(X) — арктангенс $X$;
EXP(X) — экспонента, $e^X$;
LOG(X) — натуральный логарифм $X$;
LOG10(X) — десятичный логарифм $X$;
RND — случайно выбранное число из интервала (0,1).

В приведенных записях $X$ — некоторое выражение, в частности переменная или константа.

*Замечание 1.* Термин «стандартные арифметические функции» по смыслу близок к понятию «элементарные функции числового аргумента».

*Замечание 2.* Замечания функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ и других можно вычислить, выразив эти функции через стандартные арифметические функции языка BASIC.

Функции над символьными данными существенно различаются в разных версиях языка BASIC и здесь не приводятся.

**21.12. Арифметические выражения и оператор присваивания.** *Арифметические выражения* образуются в языке BASIC арифметическими операциями над арифметическими функциями, над числовыми переменными и константами.

Арифметические операции: + (сложить), — (вычесть или, если у этой операции один операнд, взять его со знаком «—»), * (умножить), / (разделить), ↑ (возвести в степень).

*Замечание 1.* Понятие «арифметическое выражение» здесь значительно шире традиционных рамок арифметики, и речь идет о выражениях, образованных из элементарных (арифметических) функций, числовых переменных и констант.

*Замечание 2.* В арифметическое выражение могут входить числовые данные как целого, так и вещественного типа. Если аргументы арифметической операции относятся к одному типу, то и результат выполне-

ния этой операции относится к тому же типу (результатом деления чисел целого типа будет целая часть частного). Если среди аргументов арифметической операции имеется хотя бы один аргумент вещественного типа, то результат будет вещественным. При извлечении корня и вычислении трансцендентных функций результат относится к действительному типу даже если аргумент относится к целому типу (sin (1%) = = sin (1)).

Для задания порядка выполнения операций, отличного от общепринятого, используются круглые скобки, например, A * (B + C) или (B + C)/(B — C). Если в арифметическом выражении отсутствуют круглые скобки, то операции выполняются в такой последовательности: (1) вычисление функций, (2) возведение в степень, (3) умножение и деление, (4) сложение и вычитание.

Выражение

$$A/B * C \neg E \neg D + 2 * K$$

будет обработано BASIC-системой как выражение

$$(A/B) * (C \neg (E \neg D) + (2 * K).$$

(При последовательном возведении в степень сначала выполняют операции в показателе степени. Поэтому результат обработки выражения C¬E¬D совпадет с результатом обработки выражения C¬(E¬D) и не совпадет с результатом для (C¬E)¬D.)

Значением выражения 1%/2% * 2 будет 0, так как 1%/2% = 0%, а 0% * 2 = 0, тогда как значение выражения 1%/2 * 2% = 1, поскольку 1%/2 = 0.5, *а* 0.5 * 2% = 1.

Оператор присваивания имеет формат:

⟨номер строки⟩ LET ⟨переменная⟩ = ⟨выражение⟩

*Замечание.* В большинстве версий языка BASIC слово LET можно не писать.

Левая и правая части оператора присваивания должны одновременно относиться либо к числовому, либо к символьному типу. При несовпадении этих типов BASIC-система выдает сообщение об ошибке. (Если тип числовой переменной, стоящей слева от знака равенства, не совпадает с типом результата вычисления выражения, стоящего в правой части, то результат приводится к типу переменной из левой части (когда это целый тип, берется целая часть результата).)

**Пример 3.** Переменные A, B, A%, C% имеют значения: 2.2, — 1.1, 3, 10 соответственно. Найти результаты для операторов присваивания:

10 R% = 2 * A + B + SIN (PI/6)

17 U = A%/C%

Для первого из этих операторов найдем R% = 3% (после подстановки было 2 * 2.2 — 1.1 + 0.5 = 3.8, от этого результата при выполнении оператора присваивания берется целая часть и потому R% = 3%). Для второго оператора получим U = 0, так как 3%/10% = 0%, а не 3/10.

Для операторов

14 U%=A

12 C='1.33'

будут выданы сообщения об ошибках (несовпадение типов).

В языке BASIC принято правило: до тех пор пока числовой переменной в программе не присвоено конкретное значение, она считается равной нулю.

**21.13. Операторы ввода/вывода:**

INPUT — оператор ввода данных.

Формат:

⟨номер строки⟩ INPUT ⟨список ввода⟩

где ⟨список ввода⟩ — разделенные запятыми имена переменных.

PRINT — оператор вывода.

Формат:

⟨номер строки⟩ PRINT ⟨список вывода⟩

где ⟨список вывода⟩ — имена переменных, выражения и символьные строки, разделяемые либо запятыми, либо точками с запятой.

Используемые для вывода первые 72 позиции строки разбиты на пять зон печати по 14 позиций в каждой, две последние позиции из этих 72 позиций остаются не занятыми.

Если точка с запятой стоит в конце оператора INPUT или PRINT, то информация по следующему оператору ввода/вывода будет введена или выведена, начиная с первой свободной позиции той же или следующей строки. Если в операторе PRINT нет списка вывода, то выполняется пропуск строки. Оператор PRINT может иметь операндом функцию TAB:

TAB (I) — функция управления печатью,

где I — числовое выражение (константа или переменная). По TAB (I) вывод продолжается с позиции, номер которой равен максимуму из I и номера позиции, с которой он осуществлялся бы при отсутствии TAB.

**21.14. Оператор безусловного перехода.**

GO TO — оператор безусловного перехода («перейти к»)

Формат:

GO TO ⟨номер строки⟩

где ⟨номер строки⟩ указывает строку, на которую передается управление, т. е. к исполнению которой BASIC-система переходит по этому оператору.

**21.15. Условный оператор.**

Форматы условного оператора:

⟨номер строки⟩ IF ⟨условие⟩ THEN ⟨оператор⟩

⟨номер строки⟩ IF ⟨условие⟩ GO TO ⟨номер строки⟩

По условному оператору вначале выполняется проверка условия. При его истинности в первом формате выполняется оператор, а во втором формате — переход к строке с указанным номером. Если условие

не выполнено, то в обоих случаях произойдет переход к исполнению операторов следующей строки. Условия могут включать отношения:

| | |
|---|---|
| = совпадает | >= больше или равно (не меньше) |
| > больше | <= меньше или равно (не больше) |
| < меньше | <> не равно |

**Пример 4.** Программа решения линейного уравнения (блок-схема приведена на рис. 54, *а*):

```
10 PRINT 'ВВЕДИТЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ A И B УРАВНЕНИЯ AX + B=0'
20 INPUT A, B
30 IF A = 0 GO TO 50
40 A = -B/A\PRINT 'РЕШЕНИЕ:'; A\GO TO 90
50 IF B=0 GO TO 70
60 T$='РЕШЕНИЙ НЕТ'\GO TO 80
70 T$='РЕШЕНИЕ-ЛЮБОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО'
80 PRINT T$
90 END
```

В этом примере использована запись в одной строке нескольких операторов. Кроме того, здесь использован оператор конца программы END, запись которого не обязательна, но в данном случае нужна, чтобы выйти из строки с номером 40, не попадая на операторы обработки случая A=0.

**Пример 5.** Требуется составить программу, которая предложит пользователю ввести по буквам слово, обеспечит замену всех встречающихся в этом слове букв 'Ш' на буквы 'Б' и распечатку полученного слова. (После того как все слово введено, нужно ввести знак '*', который будет означать конец введенного слова.)

```
10 DIM A$(10)
20 PRINT 'ВВЕДИТЕ ПО БУКВАМ ЛЮБОЕ СЛОВО'
30 I=I+1
40 INPUT B$
50 IF B$ ='*' GO TO 80
60 IF B$ ='Ш' THEN B$='Б'
70 A$(I)=B$\GO TO 30
80 K=K+1
90 PRINT A$(K);
100 IF K<I GO TO 80
```

Вводимые буквы записываются здесь в *символьный массив* A$. Как видно из строки 90, «исправленное» слово будет выведено в «естественном» виде (т. е. как слитный текст), что обеспечивает точка с запятой в конце оператора PRINT, ввод же будет занимать на экране на одну строку больше числа букв в слове.

**21.16. Оператор цикла.** Для выполнения циклических (повторяющихся) участков программы в языке BASIC предназначен *оператор цикла,* состоящий из двух операторов, ограничивающих в тексте

программы повторяемый участок (который называется *телом цикла*), — оператора FOR и оператора NEXT.

Формат оператора FOR:

⟨номер строки⟩ FOR ⟨переменная⟩ = ⟨выражение 1⟩ TO ⟨выражение 2⟩

В конце оператора FOR может присутствовать еще запись:

STEP ⟨выражение 3⟩

Формат оператора NEXT:

⟨номер строки⟩ NEXT ⟨переменная⟩

Стоящая в обоих форматах переменная — это одна и та же числовая переменная, а выражения — это арифметические выражения, первое из которых — начальное значение переменной, второе — «конечное», а необязательное третье — шаг изменения переменной (т. е. та величина, на которую на каждом шаге выполнения цикла изменяется переменная), если в записи оператора FOR отсутствует запись STEP ⟨выражение 3⟩, то шаг изменения принимается BASIC-системой равным 1.

**Пример 6.** Вместо строк (80) — (100) в примере 5 можно записать:

```
80 FOR K=1 TO I
90 PRINT A(K);
100 NEXT K
```

т. е. в пример 20 введен цикл.

Если для краткости обозначить ⟨переменную⟩ (параметр цикла) именем V, а выражения — именами B1, B2 и B3, то алгоритм исполнения цикла BASIC-системой имеет такой вид:

(1) V=B1;

(2) выполнить тело цикла (операторы программы между FOR и NEXT);

(3) V=V+B3;

(4) если V>B2 при B3>0 или если V<B2 при B3<0, перейти к (6);

(5) перейти к (2);

(6) цикл завершен.

«Конечное» значение переменной (т. е. B2) может в действительности отличаться от ее реального значения в момент последнего выполнения цикла и всегда отличается от значения V после выполнения цикла.

**Пример 7.** Программа сложения четных чисел от 2 до 15:

```
10 FOR I = 2 TO 15 STEP 2
20 S = S + I
30 NEXT I
40 PRINT
```

Последнее I, для которого цикл будет выполнен, равно 14, а значение I при выходе из цикла равно 16.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

## VI. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

### 22. МЕТОД КООРДИНАТ И ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ

**22.1. Декартова прямоугольная система координат.** На плоскости введена *система координат,* если указан способ, позволяющий однозначно устанавливать положение всех точек плоскости с помощью чисел. Наиболее употребительные системы координат: декартова прямоугольная и полярная (см. п. 22.5).

*Декартова прямоугольная система координат* на плоскости определяется двумя взаимно перпендикулярными прямыми $Ox$ и $Oy$ (рис. 57), на которых выбраны положительные направления (указываемые стрелками) и масштаб для измерения длин. Эти прямые называются *осями координат* (ось $Ox$ — *осью абсцисс,* ось $Oy$ — *осью ординат,* точка $O$ пересечения осей — *началом координат*). Положительное направление на оси $Ox$ выбирается обычно вправо, а на оси $Oy$ — вверх. Такая система координат называется *правой.* В ней поворот от оси $Ox$ к оси $Oy$ (на наименьший угол) до их совмещения осуществляется против движения часовой стрелки.

Если же такой поворот осуществляется по движению часовой стрелки, то система называется *левой.*

Оси координат делят плоскость на четыре *четверти (квадранты).*

Положение произвольной точки $M$ на плоскости вполне определяется заданием двух чисел $x$ и $y$; число $|x|$ выражает в выбранном масштабе расстояние от точки $M$ до оси ординат ($|x| = |OM_x|$ на рис. 58), число $|y|$ — расстояние от точки $M$ до оси абсцисс ($|y| = |OM_y|$). Числа $x$ и $y$ называются *декартовыми прямоугольными координатами* (соответственно *абсциссой и ординатой*) точки $M$ и берутся со знаком (+), если направления отрезков $OM_x$ и $OM_y$ совпадают с положительными направлениями на осях $Ox$ и $Oy$, или со знаком (—) в противном случае. На рис. 58 дана схема распределе-

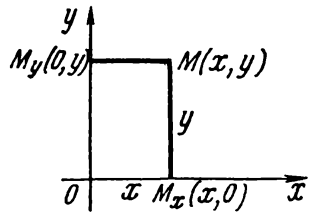



Рис. 57

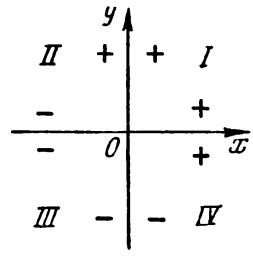



Рис. 58

ния знаков координат в различных четвертях и нумерация четвертей. Запись $M(x, y)$ означает, что точка $M$ имеет абсциссу $x$ и ординату $y$.

**22.2. Расстояние между двумя точками** (рис. 59). Как бы ни были расположены на плоскости точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, расстояние $d$ между ними определяется формулой

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,.$$

Частный случай. Расстояние от точки $M(x, y)$ до начала координат $O$ (0, 0) равно

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

**Пример.** Расстояние между точками $M_1(-3,5)$ и $M_2(1, 2)$ равно

$$d=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

**22.3. Деление отрезка в данном отношении.** Если заданы точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и известно, что точка $M(x, y)$ делит отрезок $M_1M_2$ в отношении $\lambda$ (рис. 60), т. е. что

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda=\frac{m}{n}\,,$$

то координаты $x$ и $y$ точки $M$ определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,,$$

или

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}\,;\quad y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}$$

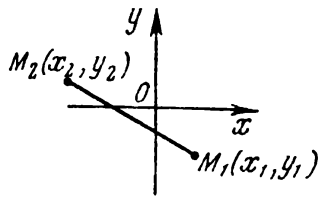



Рис. 59

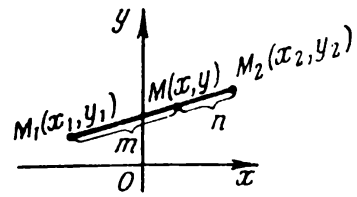



Рис. 60

Частный случай. Координаты $x$ и $y$ середины $M$ отрезка $M_1M_2$ определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

так как $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda = 1$.

Координаты $x$ и $y$ *центра тяжести* материальных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ соответственно с массами $m_1$ и $m_2$ определяются по формулам

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}; \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}.$$

Координаты $x$ и $y$ центра тяжести однородной треугольной пластинки выражаются через координаты $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ и $(x_3, y_3)$ ее вершин по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

**22.4. Преобразование декартовых координат.** Переход от одной правой декартовой прямоугольной системы координат к другой правой системе можно осуществить двумя преобразованиями: 1) параллельным переносом осей и 2) поворотом осей на угол $\alpha$.

При *параллельном переносе* осей из положения $xOy$ в новое положение $x'O'y'$ (рис. 61) координаты точки $M$ в старой и новой системах координат связаны соотношениями

$$x = x' + a; \quad y = y' + b,$$

или

$$x' = x - a; \quad y' = y - b,$$

где $x$ и $y$ — старые координаты точки $M$; $x'$ и $y'$ — ее новые координаты; $a$ и $b$ — координаты нового начала $O'$ в старой системе.

При *повороте осей* на некоторый угол $\alpha$ (рис. 62) старые координаты $x$, $y$ связаны с новыми $x'$, $y'$ соотношениями

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

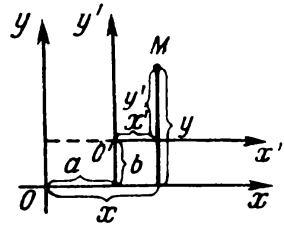



Рис. 61

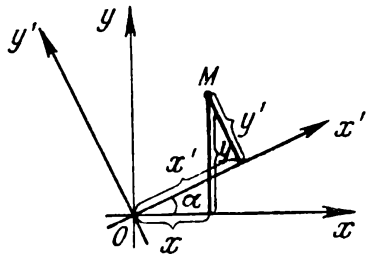



Рис. 62

или

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

В общем случае преобразования правой прямоугольной системы координат имеют место формулы

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$
$$y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

**22.5. Полярные координаты.** *Полярная система координат* задается выбором точки $O$ (*полюса*), луча $OA$, исходящего из точки $O$ (*полярной оси*), и масштаба для измерения длин. Положение точки $M$ на плоскости определяется в полярной системе координат двумя числами: *полярным радиусом* $\rho = OM$ (рис. 63), выражающим длину отрезка $OM$ в выбранном масштабе, и *полярным углом* $\theta = \angle AOM$ (в радианной мере, см. п. 11.3). Полярный угол считают положительным, если он отсчитывается от полярной оси в направлении против движения часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае. Числа $\rho$ и $\theta$ называются *полярными координатами* точки $M$, что записывают так: $M(\rho, \theta)$. Для полюса $O$ значение полярного угла не определено. Любой другой точке плоскости ($\rho \neq 0$) соответствует единственная пара полярных координат и обратно: по заданной паре полярных координат можно указать единственную соответствующую ей точку плоскости.

**22.6. Переход от полярных координат к декартовым и обратно.** Если полярную и декартову прямоугольную системы координат совместить так, чтобы полюс совпал с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси $Ox$ (рис. 64), то независимо от расположения точки $M$ на плоскости получим формулы перехода от полярных координат $\rho$, $\theta$ к декартовым $x$, $y$:

$$x = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta$$

и от декартовых к полярным:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg}\theta = y/x.$$

**Пример.** Определить вид кривой $\rho = \cos\theta$.

Р е ш е н и е. Умножив обе части уравнения на $\rho$, получим

$$\rho^2 = \rho\cos\theta.$$

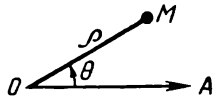



Рис. 63

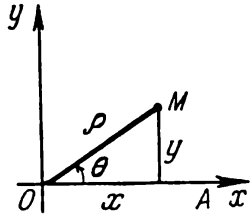



Рис. 64

Воспользуемся формулами перехода:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2; \quad \varrho\cos\theta = x.$$

Итак, получим

$$x^2 + y^2 = x, \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

т. е. уравнение окружности с центром в точке (1/2, 0) и радиусом 1/2. Эта окружность проходит через начало координат.

**22.7. Уравнение линии.** Уравнение с двумя переменными обозначают так:

$$F(x, y) = 0, \quad \text{или} \quad y = f(x),$$

где $F(x, y)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее $x$ и $y$.

*Уравнением* данной линии называется уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными $x$ и $y$, которому удовлетворяют координаты $x$ и $y$ каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней. Величины $x$ и $y$ называются *текущими координатами* точки.

Линия, определенная данным уравнением, есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Линия, определяемая уравнением вида $y = f(x)$, называется *графиком* функции $f(x)$.

Если $F(x, y)$ — многочлен, то линия $F(x, y) = 0$ называется *алгебраической*. В этом случае степень многочлена называется *порядком* линии.

Для отыскания координат точек пересечения двух линий

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

необходимо решить систему

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

## 23. ПРЯМАЯ

**23.1. Уравнение прямой.** В декартовой системе координат каждая прямая определяется линейным уравнением относительно переменных и, обратно, каждое линейное уравнение определяет прямую.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. *Углом наклона* прямой к оси $Ox$ называется угол, на который надо повернуть положительную полуось $Ox$ против движения часовой стрелки до совмещения с данной прямой. Если прямая параллельна оси $Ox$, то угол ее наклона к оси $Ox$ считается *равным нулю*.

Каждая прямая, не перпендикулярная оси $Ox$, может быть определена уравнением

$$y = kx + b \tag{1}$$

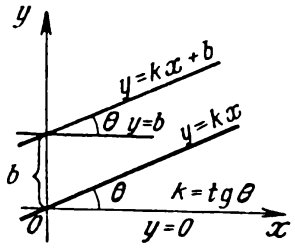



Рис. 65

где $k$ — *угловой коэффициент* прямой, равный тангенсу угла наклона ее к оси $Ox$, т. е. $k = \operatorname{tg}\theta$ (рис. 65); $b$ (*начальная ордината*) — длина отрезка, отсекаемого прямой на оси $Oy$, взятая со знаком «+», если отрезок расположен над осью $Ox$, и со знаком «—» в противном случае.

При $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = kx$$

и определяет *прямую, проходящую через начало координат*. Это уравнение выражает прямую пропорциональную зависимость переменных величин $x$ и $y$.

При $k = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = b$$

и определяет *прямую, параллельную оси* $Ox$ и отстоящую от нее на расстоянии, равном $|b|$.

При $k = 0$ и $b = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$y = 0$$

и определяет ось $Ox$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\theta$,

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

Если $k$ считать здесь переменной величиной, принимающей различные значения, то уравнение (2) называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через данную точку $M_1$.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Ее угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

*Условие того, что три данные точки* $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ *лежат на одной прямой:*

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \tag{3}$$

Частные случаи. 1. $C = 0$, уравнение (3) принимает вид

$$Ax + By = 0$$

и определяет прямую, *проходящую через начало координат* (рис. 66).

2. $B=0$ $(A\neq 0)$, уравнение (3) принимает вид

$$Ax+C=0, \quad \text{или} \quad x=-\frac{C}{A}=a,$$

и определяет прямую, *параллельную оси Oy* (см. рис. 66). Если, кроме того, $C=0$, то получаем *уравнение оси Oy*:

$$x=0.$$

3. $A=0$ $(B\neq 0)$, уравнение (3) принимает вид

$$By+C=0, \quad \text{или} \quad y=-\frac{C}{B}=b,$$

и определяет прямую, *параллельную оси Ox* (см. рис. 66). Если, кроме того, $C=0$, то получаем *уравнение оси Ox*:

$$y=0.$$

Общее уравнение прямой (3) можно привести к виду уравнения (1) с угловым коэффициентом (если $B\neq 0$):

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Таким образом, по данным коэффициентам $A$, $B$, $C$ уравнения (3) можно вычислить угловой коэффициент $k$ и величину $b$ уравнения (1):

$$k=-\frac{A}{B}; \quad b=-\frac{C}{B}. \tag{4}$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{5}$$

Здесь $|a|$ и $|b|$ — длины отрезков, которые прямая отсекает соответственно на осях $Ox$ и $Oy$ (рис. 67).

Общее уравнение прямой (3) можно привести к виду уравнения (5) (если ни один из коэффициентов $A$, $B$, $C$ не равен нулю), причем

$$a=-\frac{C}{A}; \quad b=-\frac{C}{B}. \tag{6}$$

Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения прямой на чертеже. По заданным $a$ и $b$ строим точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ пересечения прямой с осями координат и через эти две точки проводим прямую.

**Пример.** Дана прямая своим общим уравнением

$$3x-4y+12=0.$$

Составить для этой прямой уравнение с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках и построить прямую.

Решение. Имеем: $A=3$, $B=-4$, $C=12$ (сравниваем с уравнением (3)). Найдем угловой коэффициент $k$ прямой и величину $b$ отрезка

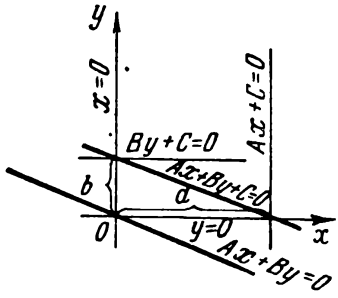



Рис. 66

(с учетом знака), отсекаемого прямой на оси $Oy$ (см. равенство (4)):

$$k = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}; \quad b = -\frac{12}{-4} = 3.$$

Уравнение данной прямой с угловым коэффициентом

$$y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Таким образом, данная прямая составляет с осью $Ox$ угол 0, тангенс которого равен $^3/_4$.

На основании первого равенства (6) найдем длину $|a|$ отрезка, отсекаемого прямой на оси $Ox$ (длину $|b|$ отрезка, отсекаемого на оси $Oy$, мы уже нашли):

$$a = -\frac{12}{3} = -4.$$

Уравнение данной прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Строим теперь точки $A(-4,0)$ и $B(0, 3)$ пересечения данной прямой с осями координат (рис. 68) и через эти точки проводим прямую.

**23.2. Угол между двумя прямыми.** Если две прямые заданы уравнениями

$$y = k_1x + b_1; \quad y = k_2x + b_2,$$

то угол $\varphi$ между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \tag{7}$$

(угол $\varphi$ отсчитывается от 1-й прямой ко 2-й против часовой стрелки).

**Пример.** Вычислить угол между прямой $2x - 3y + 6 = 0$ и прямой, проходящей через точки $(4, -5)$ и $(-3, 2)$.

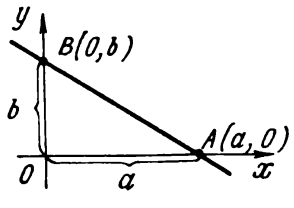



Рис. 67

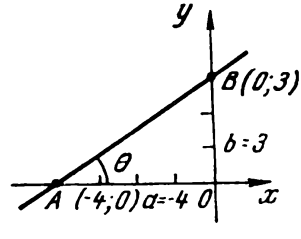



Рис. 68

Р е ш е н и е. Составим уравнение 2-й прямой (см. п. 23.1):

$$\frac{y+5}{2+5}=\frac{x-4}{-3-4},\quad \text{или}\quad x+y+1=0.$$

Найдем угловые коэффициенты заданных прямых:

$$k_1=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3};\quad k_2=-\frac{1}{1}=-1.$$

По формуле (7) находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-1-\frac{2}{3}}{1+(-1)\cdot\frac{2}{3}}=-5.$$

Воспользовавшись табл. 20 в конце книги и учитывая знак тангенса, найдем искомый угол между прямыми:

$$\varphi=\operatorname{arctg}(-5)=101°20'.$$

*Условие параллельности двух прямых:*

$$k_2=k_1,\quad \text{или}\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}.$$

*Условие перпендикулярности двух прямых:*

$$k_2=-\frac{1}{k},\quad \text{или}\quad A_1A_2+B_1B_2=0.$$

**Пример 1.** Через точку $(-2,\ -1)$ провести прямую параллельно прямой $2x-y+5=0$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение пучка прямых (см. п. 23.1), проходящих через заданную точку $(-2,\ -1)$:

$$y+1=k(x+2).$$

Найдем угловой коэффициент заданной прямой:

$$k_1=-2/-1=2.$$

На основании условия параллельности прямых заключаем, что

$$k=k_1=2.$$

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$y+1=2(x+2),\quad \text{или}\quad 2x-y+3=0.$$

**Пример 2.** Найти уравнение высоты $BD$ треугольника $ABC$ (рис. 69), если известны координаты его вершин: $A(2,1)$, $B(1,\ 2)$, $C(6,\ 3)$.

Р е ш е н и е. Найдем уравнение стороны $AC$ треугольника:

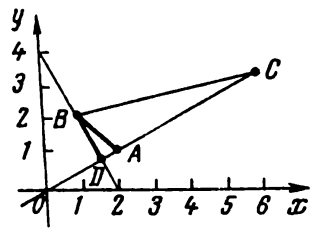



Рис. 69

$$\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-2}{6-2}, \quad \text{или} \quad x-2y=0.$$

Ее угловой коэффициент ($k_{AC}$)

$$k_{AC}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

Высота $BD$ треугольника принадлежит пучку прямых, проходящих через точку $B$:

$$y-2=k(x-1).$$

Угловой коэффициент высоты $BD$ найдем из условия перпендикулярности $AC$ и $BD$:

$$k_{BD}=-\frac{1}{k_{AC}}=-2.$$

Запишем уравнение высоты $BD$:

$$y-2=-2(x-1), \quad \text{или} \quad 2x+y-4=0.$$

**23.3. Пересечение двух прямых.** Если две прямые заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0; \quad A_2x+B_2y+C_2=0;$$

причем $A_1/A_2\neq B_1/B_2$, то координаты $x_0$, $y_0$ точки их пересечения находят при решении системы этих уравнений:

$$x_0=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}; \quad y_0=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Если

$$A_1/A_2=B_1/B_2,$$

то данные прямые параллельны (см. п. 23.2), в частности, если

$$A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2,$$

то прямые совпадают.

**Пример 1.** Найти точку пересечения прямых:

$$2x-y-5=0; \quad x+y-1=0.$$

Так как $^2/_3\neq -^1/_3$, то прямые пересекаются. Сложив первое уравнение со вторым, получим

$$3x-6=0, \quad x=2.$$

Подставив в первое уравнение $x=2$, найдем

$$4-y-5=0, \quad y=-1.$$

Итак, данные прямые пересекаются в точке $(2, -1)$.

**Пример 2.** Выяснить взаимное расположение прямых

$$2x+3y-5=0; \quad 6x+9y-13=0.$$

В данном случае $^2/_6 = {}^3/_9 \neq {}^5/_{13}$, следовательно, прямые параллельны. В самом деле, решая совместно эти уравнения (для этого достаточно из первого уравнения, умноженного на 3, вычесть второе), получим противоречивое равенство $-2=0$, свидетельствующее о том, что данная система несовместна.

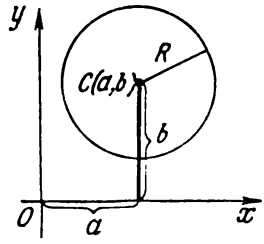


Рис. 70

**Пример 3.** Выяснить взаимное расположение прямых

$$2x+3y-5=0; \quad 6x+9y-15=0.$$

Данные прямые совпадают, так как $^2/_6 = {}^3/_9 = {}^{-5}/_{-15}$.

## 24. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**24.1. Окружность.** *Уравнение окружности имеет вид*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{1}$$

где $a$ и $b$ — координаты центра $C$ окружности; $R$ — ее радиус (рис. 70).

Частные случаи. 1. Уравнение окружности радиуса $R$ с центром в начале координат

$$x^2+y^2=R^2.$$

2. Если окружности радиуса $R$ проходят через начало координат и их центры лежат на оси $Ox$, то уравнения окружностей имеют вид

$$x^2+y^2 \pm 2Rx=0.$$

3. Если окружности радиусом $R$ проходят через начало координат и их центры лежат на оси $Oy$, то уравнения окружностей имеют вид

$$x^2+y^2 \pm 2Ry=0.$$

Общее уравнение 2-й степени относительно $x$ и $y$

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

может изображать *окружность*, если его коэффициенты $A$, $B$, $C$ удовлетворяют двум условиям:

$$A=C \quad \text{и} \quad B=0,$$

т. е. когда оно может быть приведено к виду

$$x^2+y^2+2D'x+2E'y+F'=0. \tag{2}$$

При этом радиус $R$ и координаты $a$ и $b$ центра окружности можно вычислить по формулам

$$R=\sqrt{D'^2+E'^2-F'}; \quad a=-D'; \quad b=-E'.$$

Возможны три случая:

1) $D'^2+E'^2-F'>0$, уравнение (2) изображает окружность;

2) $D'^2+E'^2-F'=0$, уравнение (2) изображает одну точку $C(a, b)$;

3) $D'^2+F'^2-F'<0$ уравнение (2) не имеет геометрического смысла.

Построение точек дуги окружности. Если $AC$ — половина хорды; $CB$ — стрелка (рис. 71) дуги окружности, центр которой находится за пределами чертежа, то точки дуги можно найти следующим построением. Проводим $BE \parallel AC$, $AD \perp AC$, $AE \perp AB$. Делим $AC$, $AD$ и $BE$ на одинаковое число равных частей и соединяем точки деления $AC$ и $BE$, а также точку $B$ с точками деления $AD$. Точки пересечения одинаково занумерованных прямых и будут точками искомой дуги окружности.

**24.2. Эллипс.** Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек $F_1$ и $F_2$ есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение эллипса. Если прямую $F_1F_2$ принять за ось $Ox$, а прямую, ей перпендикулярную и проходящую через середину отрезка $F_1F_2$, — за ось $Oy$ (рис. 72), то получим *каноническое* уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0), \tag{3}$$

где $a$ и $b$ — полуоси эллипса. Эллипс, заданный уравнением (3), симметричен относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$.

Элементы эллипса (см. рис. 72): отрезок $AC=2a$ — *большая ось*; отрезок $BD=2b$ — *малая ось*; отрезок $F_1F_2$ — *фокальное расстояние*; отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ — *фокальные радиусы* точки $M$; точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — *фокусы* эллипса ($c\geqslant 0$); точки $A(-a, 0)$, $B(0-b)$, $C(a, 0)$ и $D(0, b)$ пересечения эллипса с осями координат — его *вершины;* точка $O$ (начало координат) — его *центр*. Величины $a$, $b$, $c$ эллипса связаны соотношениями:

$$c<a, \quad c^2=a^2-b^2.$$

*Эксцентриситетом эллипса* (он обозначается буквой $\varepsilon$) называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad (\varepsilon\geqslant 0).$$

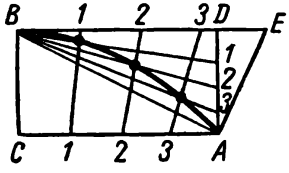



Рис. 71

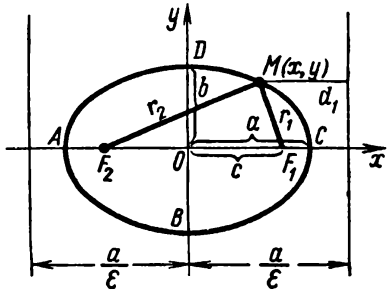



Рис. 72

Эксцентриситет всякого эллипса меньше единицы ($\varepsilon < 1$). Чем меньше отличается $\varepsilon$ от единицы, тем эллипс более вытянут.

Фокальные радиусы $r_1$ и $r_2$ точки $M(x, y)$ эллипса вычисляются по формулам:

$$r_1 = a - \varepsilon x; \quad r_2 = a + \varepsilon x; \quad r_1 + r_2 = 2a.$$

*Директрисами эллипса* называются две прямые, перпендикулярные его большой оси и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии $a/\varepsilon$ от него. *Уравнения директрис эллипса:*

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0).$$

*Уравнение касательной* к эллипсу, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Касательная к эллипсу является биссектрисой угла между продолжением фокального радиуса $F_1M$ и фокальным радиусом $F_2M$.

*Площадь эллипса*: $S = \pi ab$.

*Периметр эллипса:*

$$L = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right],$$

где $\varepsilon$ — эксцентриситет эллипса.

Связь эллипса с окружностью. Уравнение окружности (1) является частным случаем канонического уравнения эллипса (3) при $a = b$. Для окружности $\varepsilon = 0$; следовательно, окружность есть частный случай эллипса, полуоси которого равны между собой (эксцентриситет $\varepsilon$ которого равен нулю).

Ортогональная проекция окружности на произвольную плоскость является эллипсом.

Построение эллипса по точкам. 1) *Способ двух окружностей.* Если известны длины полуосей эллипса $a$ и $b$ ($a > b$), то из начала координат $O$, как из центра, описываем две концентрические окружности радиусами $a$ и $b$ (рис. 73). Проводим произвольный радиус $OC$ большой окружности. Из точки $C$ проводим прямую, параллельную оси $Oy$, а из точки $D$ пересечения $OC$ с малой окружностью — прямую, параллельную оси $Ox$. Точка $M$ пересечения этих прямых и есть точка эллипса. Аналогично строим и другие точки эллипса.

2) *Способ проективных пучков.* Строим прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ с центром в начале координат и со сторонами, равными $2a$ и $2b$ (рис. 74). Отрезки $OC$ и $CD_1$ делим на одинаковое число равных частей и затем из точек $B$ и $D$ проводим два пучка лучей. Точки пересечения одинаково занумерованных лучей и являются точками эллипса. Остальные четверти эллипса строятся аналогично.

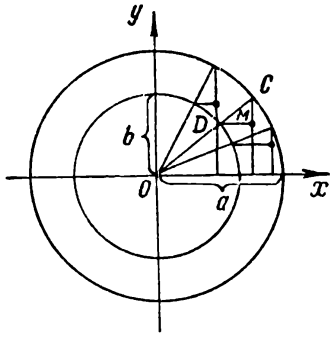



Рис. 73

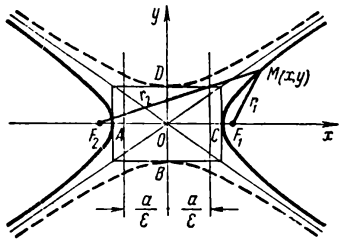



Рис. 75

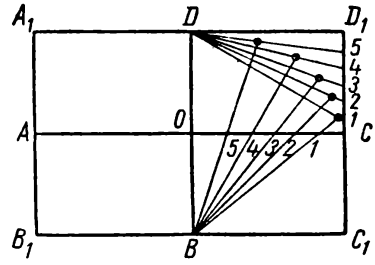



Рис. 74

**24.3. Гипербола.** Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух заданных точек $F_1$ и $F_2$ есть величина постоянная (равная $2a$).

Уравнение гиперболы. Если прямую $F_1F_2$ принять за ось $Ox$, а прямую, ей перпендикулярную и проходящую через середину отрезка $F_1F_2$, — за ось $Oy$ (рис. 75), то получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4)$$

где $a$ и $b$ — полуоси гиперболы ($a>0$, $b>0$). Гипербола, заданная уравнением (4), симметрична относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$.

Элементы гиперболы (см. рис. 75): гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой); отрезок $AC=2a$ — *действительная ось* (пересекает гиперболу), отрезок $BD=2b$ — *мнимая ось* (не пересекает гиперболы), отрезок $F_2F_1=2c$ — *фокальное расстояние,* отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ — *фокальные радиусы* точки $M$; точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ — *фокусы* гиперболы; точки $A(-a, 0)$ и $C(a, 0)$ пересечения гиперболы с ее действительной осью — ее вершины; точка $O$ (начало координат) — ее *центр*. Величины $a$, $b$, $c$ гиперболы связаны соотношением:

$$c>a; \quad c^2=a^2+b^2.$$

*Эксцентриситетом гиперболы* называется отношение фокального расстояния ($2c$) к длине большой оси ($2a$):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Эксцентриситет всякой гиперболы больше единицы ($\varepsilon > 1$). Чем меньше отличается от единицы эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут так называемый *основной* прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы, центр которого совпадает с центром гиперболы.

Фокальные радиусы точки гиперболы с абсциссой $x$ вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a + \varepsilon x \end{aligned}\right\}$$ для точек правой ветви гиперболы;

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= a - \varepsilon x, \\ r_2 &= -a - \varepsilon x \end{aligned}\right\}$$ для точек левой ветви гиперболы.

*Директрисами гиперболы* называются две прямые, перпендикулярные ее действительной оси и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии $a/\varepsilon$ от него. *Уравнения директрис гиперболы*:

$$x = \frac{a}{\varepsilon}; \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

*Асимптотами гиперболы* называются прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$. Направления асимптот совпадают с направлениями диагоналей основного прямоугольника. *Уравнения асимптот гиперболы:*

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

*Уравнение касательной* к гиперболе, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$,

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами точки касания. Для любой точки $M$ гиперболы отрезок касательной между асимптотами делится пополам в точке касания.

Сопряженные гиперболы. Если гипербола задана уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то ее действительная ось расположена на оси $Oy$, а мнимая ось — на оси $Ox$ (на рис. 75 эта гипербола изображена пунктиром). Вершинами этой гиперболы будут точки $D(0, b)$ и $B(0, -b)$, а асимптотами — асимптоты гиперболы (4).

Две гиперболы, определяемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называются *сопряженными*.

У сопряженных гипербол действительная ось одной является мнимой осью другой, мнимая же ось одной является действительной осью другой. Сопряженные гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Равносторонняя гипербола — гипербола с равными полуосями ($a = b$). Ее уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны. Их уравнения

$$y = x; \quad y = -x.$$

Равносторонние гиперболы имеют эксцентриситет

$$\varepsilon = \sqrt{2}.$$

Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы (рис. 76), то ее уравнение примет вид

$$xy = a^2/2$$

или, если ввести обозначение $a^2/2 = m$,

$$y = m/x.$$

Таким образом, равносторонняя гипербола в системе координат, оси которой совпадают с асимптотами, представляет собой график обратной пропорциональной зависимости.

Построение точек гиперболы по заданным ее полуосям. Строим прямоугольник $ABC$ с центром $O$ и со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 77). Проводим диагонали $AC$ и $BD$ прямоугольника. На оси $Ox$ от точки $O$ откладываем отрезки $OF_1$ и $OF_2$, равные $OA$ (половине диагонали). Точки $F_1$ и $F_2$ — фокусы искомой гиперболы. Затем отмечаем на оси $Ox$ произвольные точки *1, 2, 3* и т. д., из фокуса $F_1$ описываем дуги радиусами $A_1 1$, $A_1 2$, $A_1 3$ и т. д. и из фокуса $F_2$ — дуги радиусами $A_2 1$, $A_2 2$, $A_2 3$ и т. д., точки *1, 2, 3* и т. д. пересечения соответственных дуг будут точками гиперболы. Выбирая точки на оси $Ox$ левее фокуса $F_2$, построим аналогично точки левой ветви гиперболы.

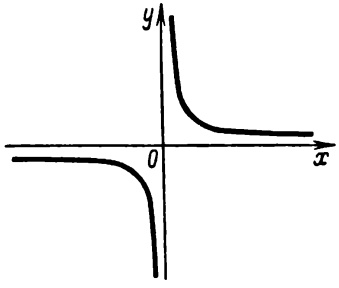



Рис. 76

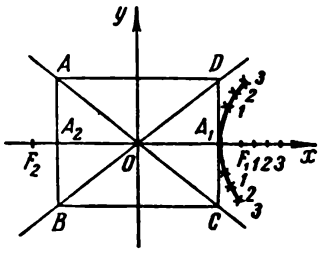



Рис. 77

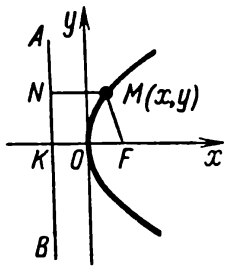



Рис. 78

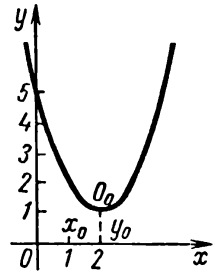



Рис. 79

**24.4. Парабола.** Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Уравнение параболы. Если прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе $AB$, выбрать за ось $Ox$, причем за положительное направление на ней взять направление от директрисы к фокусу (рис. 78), а за начало координат принять середину $O$ отрезка $FK$, то каноническое уравнение параболы примет вид

$$y^2 = 2px, \tag{5}$$

где $p$ — *фокальный параметр* параболы, равный расстоянию от фокуса до директрисы.

Парабола, заданная уравнением (5), симметрична относительно оси $Ox$ и проходит через начало координат.

Элементы параболы (см. рис. 78): ось $Ox$ — *ось параболы*, $O$ — *ее вершина*, точка $F(p/2, 0)$ — *ее фокус*, отрезок $FM = r$ — *фокальный радиус* точки $M$ параболы; $AB$ — *директриса параболы* (директриса и фокус находятся по разные стороны от вершины параболы на одинаковом расстоянии от нее).

В отличие от эллипса и гиперболы *парабола не имеет центра.*

*Эксцентриситет* всякой параболы равен единице ($\varepsilon = 1$).

Фокальный радиус $r$ точки $M(x, y)$ параболы вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение *директрисы* параболы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Уравнение *касательной* к параболе, проведенной в точке $M(x_1, y_1)$,

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Касательная к параболе является биссектрисой угла между фокальным радиусом точки параболы и перпендикуляром, опущенным из этой точки на директрису.

*Длина дуги* $OM$ параболы (считая от вершины $O$ до точки $M$ с координатами $x$, $y$)

$$\breve{OM} = s \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right].$$

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0), \tag{6}$$

правая часть которого есть квадратный трехчлен, представляет собой *уравнение параболы, ось которой параллельна оси* $Oy$ (рис. 79). При $a > 0$ парабола будет восходящей, при $a < 0$ — нисходящей. Параметр $p$ и координаты $x_0$ и $y_0$ вершины $O_0$ параболы, заданной уравнением (6), вычисляются по формулам:

$$2p = \frac{1}{|a|}; \quad x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

На рис. 79 изображена парабола, заданная уравнением

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

Координаты ее вершины $O_0$ равны:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2, \quad y_0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot 5 - 16}{4 \cdot 1} = 1.$$

Построение параболы по точкам *(способ проективных пучков)*. Если заданы: ось параболы (ось $Ox$), вершина $O$ параболы и какая-нибудь ее точка $A$ (рис. 80), то точки параболы можно найти следующим построением. Перпендикуляры $AB$ и $AC$, опущенные из точки $A$ на оси координат, делим на одинаковое число частей и нумеруем, как показано на рис. 80. Точку $O$ соединяем затем с точками деления отрезка $AC$ и из точек деления отрезка $AB$ проводим прямые, параллельные оси $Ox$, до пересечения с соответственно занумерованным лучом из $O$. Точки пересечения одинаково занумерованных отрезков и будут точками искомой параболы.

Точки нижней половины параболы строятся аналогично.

**24.5. Общие свойства кривых второго порядка.** Окружность, эллипс, гипербола и парабола называются *кривыми второго порядка* потому, что в декартовой прямоугольной системе координат они опреде-

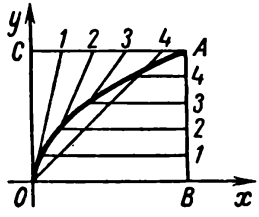



Рис. 80

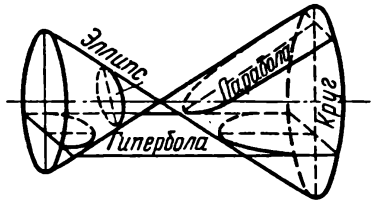



Рис. 81

ляются алгебраическими уравнениями второй степени относительно $x$ и $y$.

Геометрическое место точек $M(x, y)$, для каждой из которых отношение расстояния $r$ до некоторой точки $F$ *(фокуса)* к расстоянию $d$ до некоторой прямой *(директрисы)* — величина постоянная (равная $\varepsilon$), $r/d = \varepsilon$ есть кривая второго порядка с эксцентриситетом, равным $\varepsilon$. При $\varepsilon < 1$ это будет *эллипс*, при $\varepsilon > 1$ — *гипербола*, при $\varepsilon = 1$ — *парабола*.

К о н и ч е с к и е  с е ч е н и я. Кривые второго порядка называются иначе *коническими сечениями*, так как они могут быть получены как линии пересечения поверхности кругового конуса с плоскостью (не проходящей через вершину конуса). Коническая поверхность мыслится неограниченно продолженной в обе стороны от вершины и, следовательно, состоящей из двух полостей (рис. 81).

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и не параллельна ни одной из его образующих, то сечение будет *эллипсом* (или, в частности, *окружностью*).

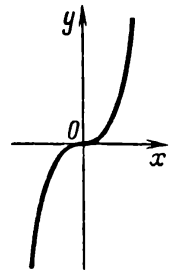
Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость конуса и параллельна одной из образующих, то сечение будет *параболой*.

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса, то сечение будет *гиперболой*.

## 25. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

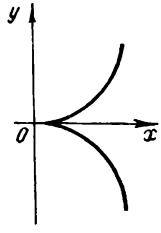
1. *Кубическая парабола*

$$y = ax^3.$$



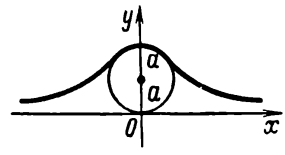

2. *Полукубическая парабола*

$$y = ax^{3/2}.$$




3. *Верзьера Аньези*

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2},$$

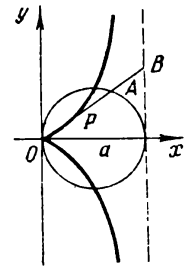


или

$$\begin{cases} x = 2a\,\mathrm{ctg}\theta, \\ y = 2a\sin^2\theta. \end{cases}$$

4. *Циссоида Диокла*

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x},$$

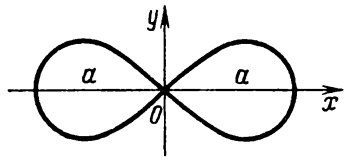



или

$$\varrho = a(\sec\varphi - \cos\varphi)$$
$$(OP = AB).$$

5. *Лемниската Бернулли*

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

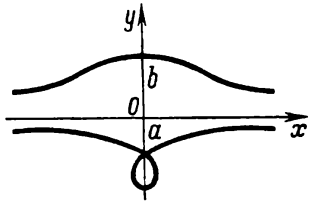



или

$$\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi.$$

6. *Конхоида Никомеда*

$$x^2y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2),$$



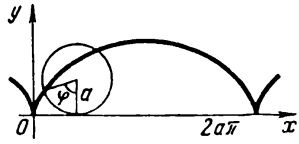

или

$$\varrho = a\,\mathrm{cosec}\,\varphi \pm b$$

(на рисунке $a<b$).

7. *Обыкновенная циклоида*

$$x = a\arccos\frac{a - y}{a} \pm \sqrt{2ay - y^2},$$

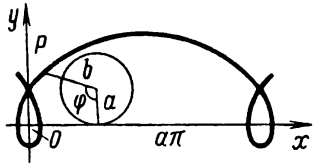



или

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi), \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

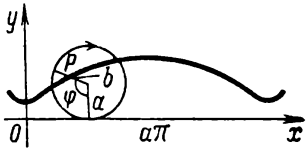
8. *Удлиненная циклоида*

$$\begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi, \\ y = a - b\cos\varphi \end{cases} \quad (a<b).$$



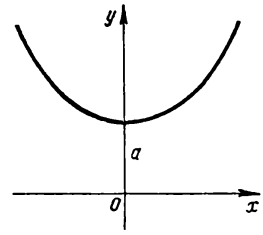

9. *Укороченная циклоида*

$$\begin{cases} x = a\varphi - b\sin\varphi, \\ y = a - b\cos\varphi \end{cases} \quad (a>b)$$



10. *Цепная линия*

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

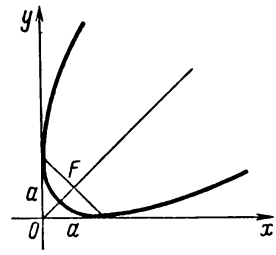



11. *Парабола*

$$\pm x^{\frac{1}{2}}\pm y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.$$

или

$$x^2-2xy+y^2-2ax-2ay+a^2=0.$$

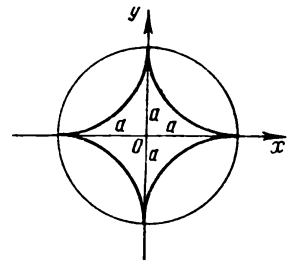



12. *Гипоциклоида с четырьмя ветвями (астроида)*

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},$$

или

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (a>0).$$

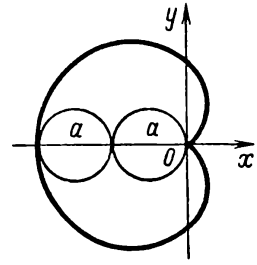



13. *Кардиоида*

$$(x^2+y^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2),$$

или

$$\varrho=a(1-\cos\varphi).$$




14. *Декартов лист*

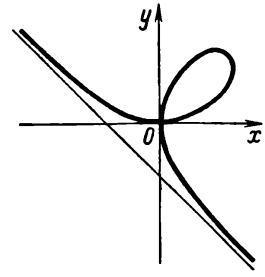
$$x^3+y^3-3axy=0,$$

или

$$\varrho=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi},$$

или

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

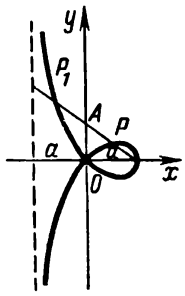


15. *Строфоида*

$$y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x},$$

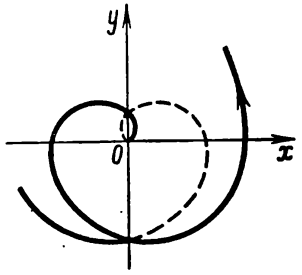
или

$$\varrho = \frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$



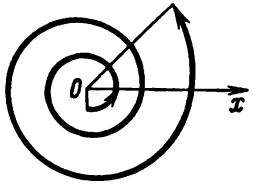

16. *Архимедова спираль*

$$\varrho = a\varphi.$$



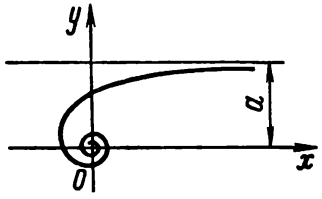

17. *Логарифмическая спираль*

$$\varrho = ae^{k\varphi}.$$




18. *Гиперболическая спираль*

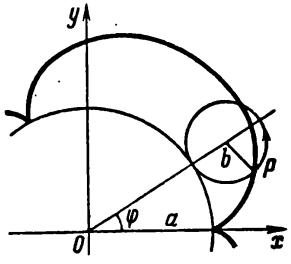
$$\varrho = \frac{a}{\varphi}.$$




19. *Эпициклоида*

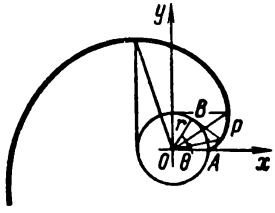
$$\begin{cases} x = (a + b)\cos\varphi - b\cos\dfrac{a+b}{b}\varphi, \\ y = (a + b)\sin\varphi - b\sin\dfrac{a+b}{b}\varphi. \end{cases}$$

При $a = b$ получаем кардиоиду (см. кривую п. 13).



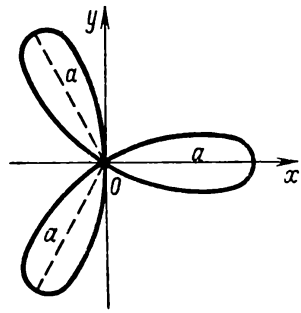

20. *Развертка окружности*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + r\theta\sin\theta, \\ y = r\sin\theta - r\theta\cos\theta. \end{cases}$$



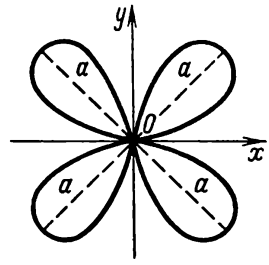
21. *Трехлепестковая роза*

$$\rho = a \cos 3\varphi.$$




22. *Четырехлепестковая роза*

$$\rho = a \sin 2\varphi.$$




## 26. ВЕКТОРЫ

**26.1. Определения.** Две различные точки $A$ и $B$ образуют вектор (рис. 82), если известно, что точка $A$ — первая (*начало* вектора), а точка $B$ — вторая (*конец* вектора).

Обозначения: $\vec{AB}$, $\mathbf{a}$, $\vec{a}$ и т. п.

Вектор имеет две характеристики: длину отрезка $AB$, которая обозначается $|\vec{AB}|$ и называется *модулем*, или *длиной вектора*, и *направление*, определяемое лучом $AB$ в пространстве. Если точки $A$ и $B$ совпадают, то $\vec{AB}$ тоже можно считать вектором; его называют *нулевым* или *нуль-вектором*.

Наряду с векторами рассматривают величины, не связанные с направлением, для определения которых достаточно указать некоторое действительное число. Эти величины называют *скалярами*.

Физические примеры: масса тела, температура тела в точке, работа, мощность — скаляры; скорость движения материальной точки, действующая на тело сила, напряженность поля в точке — векторы.

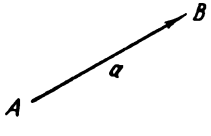



Рис. 82

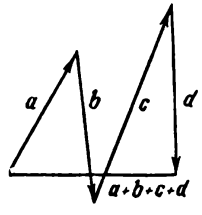



Рис. 83

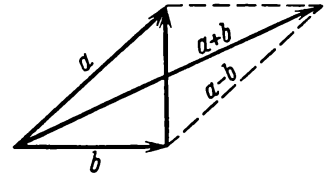



Рис. 84

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными.*

Векторы, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными. Взаимно противоположные* векторы равны по длине и противоположны по направлению:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BA} = -\mathbf{a}.$$

Обычно в математике рассматриваются векторы, в качестве начала которых можно выбрать любую точку. Эти векторы называются *свободными* в отличие от *связанных* векторов, рассматриваемых в некоторых разделах механики. Связанные векторы могут быть *закрепленными* — начало закреплено в некоторой точке, *скользящими* — допускается перенос начала только в точки, лежащие на прямой вдоль направления вектора.

**26.2. Сложение и вычитание векторов.** Чтобы сложить несколько векторов, нужно в конце первого построить вектор, равный второму, начало которого совпадает с концом первого, аналогично, в конце второго построить вектор, равный третьему, и т. д. Вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего, называется *суммой* данных векторов (рис. 83).

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два вектора. Перенесем их в общую точку и построим на этих векторах параллелограмм (рис. 84). Вектор диагонали, проходящий через общую их точку, — *сумма векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, вектор второй диагонали, направленный к вектору $\mathbf{a}$, — *разность* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Сложение и вычитание векторов обладают свойствами переместительности и сочетательности.

**26.3. Проекции вектора на оси координат.** *Проекция точки* на ось — соответствующая координата этой точки. Чтобы спроектировать на ось вектор, нужно спроектировать на ось начало и конец векторов.

*Проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось называют длину вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятую со знаком «+», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ имеет то же направление, что ось, и со знаком «—», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ имеет противоположное направление.

Вектор может быть задан его проекциями на оси координат — *координатами вектора*:

$$\mathbf{a} = (a_x,\ a_y) = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0),$$

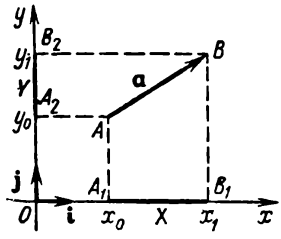



Рис. 85

где $(x_0, y_0)$ — координаты начала, а $(x_1, y_1)$ — координаты конца данного вектора (рис. 85).

Модуль вектора:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Сумма векторов $\mathbf{a} = (x_1\ y_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2).$$

Разность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)\ .$$

**26.4. Умножение вектора на число. Скалярное произведение двух векторов.** В результате умножения вектора $\mathbf{a}$ на число $\lambda$ получается вектор $\lambda\mathbf{a}$, имеющий то же направление, что вектор $\mathbf{a}$, и длину $\lambda|\mathbf{a}|$. Если $\lambda > 0$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ одинаково направлены, если же $\lambda < 0$, то они противоположно направлены.

Произведение вектора на число удовлетворяет следующим свойствам:

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda\ ;$$
$$(\mu + \lambda)\mathbf{a} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{a}\ ;$$
$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}\ .$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором. Векторы единичной длины, перпендикулярные друг другу, называются *ортами*. На плоскости два орта $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ определяют прямоугольную систему координат. Каждый вектор $\mathbf{a}$ на плоскости может быть единственным образом выражен через орты в виде

$$\mathbf{a} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}\ ,$$

где $\lambda$ и $\mu$ — действительные числа, являющиеся проекциями $a_x$ и $a_y$ вектора $\mathbf{a}$ на оси координат, т. е.

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}\ .$$

Задание $a_x$ и $a_y$ определяет единственный (свободный) вектор $\mathbf{a}$.

*Скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число $\mathbf{ab}$, определяемое формулой

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ ,$$

где $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначает косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Геометрический смысл: скалярное произведение $\mathbf{ab}$ равно проекции вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$, умноженной на $|\mathbf{b}|$. Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, то

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2\ .$$

Зная координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, мы можем найти косинус угла между ними:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}\ .$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.
2. $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab})$.
3. $(\lambda + \mu)\mathbf{ab} = \lambda\mathbf{ab} + \mu\mathbf{ab}$.
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *перпендикулярны (ортогональны)* тогда и только тогда, когда $\mathbf{ab} = 0$.

# VII. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

## 27. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

**27.1. Понятие функции.** Понятия переменной величины и соответствия — базовые в математическом анализе. Будем рассматривать здесь только числовые переменные.

Определяя *переменную* $x$, указывают множество $X$, из которого переменная «черпает» свои значения. Запись $x \in X$ в данном случае означает, что переменная $x$ может принять любое значение из множества $X$.

Пусть $x \in X$ и $y \in Y$, где $X$ и $Y$ — множества действительных чисел. *Установить соответствие* между множеством $X$ и множеством $Y$ (обозначают: $X \to Y$), значит указать правило, по которому для каждого $x \in X$ определяются все соответствующие ему числа $y \in Y$. (Понятие соответствия между элементами множеств $X$ и $Y$ является базовым и не определяется.) Одному значению переменной $x$ может соответствовать одно, несколько и даже бесконечно много значений переменной $y$, а может таких значений и не существовать вовсе.

**Примеры. 1.** Можно задать соответствие между множествами действительных чисел $X = \mathbf{R}$ и $Y = \mathbf{R}$, вычисляя для каждого $x \in X$ значение $y = \sin x$. В этом случае каждому $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$. Однако не все значения множества $Y$ будут при этом «задействованы», так как $|\sin x| \leqslant 1$.

**2.** Если для каждого значения $x \in X = \mathbf{R}$ вычислять значения $y = \operatorname{tg} x$, то для чисел $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где $k \in \mathbf{Z}$, соответствующих им значений $y \in Y = \mathbf{R}$ не будет. Остальным значениям $x$ будут соответствовать единственные значения $y$.

**3.** Зададим соответствие между $X = \mathbf{R}$ и $Y = \mathbf{R}$ следующим образом: каждому $x \in X$ ставятся в соответствие значения $y \in Y$ такие, что удовлетворяется равенство

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

При этом каждому значению $|x| < 1$ соответствуют два значения: $y = \sqrt{1-x^2}$ и $y = -\sqrt{1-x^2}$; значениям $x = 1$ и $x = -1$ соответствует единственное значение $y = 0$; значениям $|x| > 1$ не соответствует ни одного значения $y$.

**4.** Каждому значению $x \in X = \mathbf{R}$ можно поставить в соответствие значение $y \in Y = \mathbf{R}$ такое, что $y = x^3$. При этом каждому действительному числу $x$ будет соответствовать единственное действительное число $y$ и не окажется ни одного действительного значения $y$, которое не было бы поставлено в соответствие своему значению $x$. Более того, каждому $y$ будет соответствовать одно и только одно значение $x$.

Соответствие $X \to Y$, при котором каждому $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$, называется *однозначным*. При однознач-

ном соответствии $X \to Y$ одно и то же значение переменной $y$ может соответствовать различным значениям переменной $x$. Однозначными являются соответствия из примеров 1 и 4. Если в качестве $X$ рассматривать множество $\mathbf{R}$ с исключенными из него числами $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где $k \in \mathbf{Z}$, то соответствие между $X$ и $Y = \mathbf{R}$ тоже будет однозначным.

Наряду с соответствием $X \to Y$ можно рассматривать обратное ему соответствие $Y \to X$. Если соответствие $X \to Y$ обозначить символом $f$, то можно записать $X \xrightarrow{f} Y$, а обратное соответствие обозначить $f^{-1}$ и записать $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$.

Если каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$ и обратно: каждому значению $y \in Y$ соответствует одно и только одно значение $x \in X$, то говорят, что между $X$ и $Y$ установлено *взаимно однозначное соответствие* и записывают это так: $X \leftrightarrows Y$, или $X \overset{f}{\leftrightarrows} Y$.

Если соответствие $X \xrightarrow{f} Y$ однозначное, т. е. каждому значению $x \in X$ соответствует одно и только одно значение $y \in Y$, то соответствие $f$ называют *числовой функцией* аргумента $x$ и записывают $y = f(x)$; $x$ называют *независимой* переменной; $y$ — *зависимой* переменной; $X$ — *областью определения* функции $f(x)$; $Y$ — *областью значений* функции $f(x)$. Часто независимую переменную называют *аргументом,* а зависимую — *функцией.* Наряду с понятием «область значений» применяют эквивалентные понятия «множество значений», «область изменения» функции $f(x)$. Область определения функции $f(x)$ обозначают $D(f)$, а область значений этой функции — $E(f)$.

Переменные $x$ и $y$ можно рассматривать как декартовы координаты точек на плоскости. Множество всех точек плоскости $xOy$ с координатами $(x, f(x))$, для которых $x \in X$, называется *графиком функции* $f(x)$ в декартовой системе координат. Аналогично определяется понятие графика функции в полярной системе координат.

Понятие функции позволяет формализовать многие процессы, происходящие в реальности.

**Примеры.** Путь $s$, пройденный автомобилем за время $t$, есть функция скорости $v$. Интенсивность распада радиоактивного вещества данной массы есть функция времени. Площадь круга — функция радиуса.

На практике не всегда можно выделить о д н у переменную, от которой только и зависит функция, а часто это бывает просто бесполезным. Поэтому вводятся в рассмотрение функции нескольких переменных.

**Примеры.** Мощность тока — функция силы тока и напряжения. Скорость автомобиля — функция мощности его мотора, веса, силы трения о грунт, лобового сопротивления воздуха и т. д.

Мы ограничимся рассмотрением функций одной переменной.

**27.2. Способы задания функции.** *Аналитический способ* — это способ задания функции формулами, математическими символами,

которые представляют собой удобную запись известных нам математических операций: сложения, вычитания, деления, отыскания тригонометрических функций, возведения в степень и т. д. По мере развития наших знаний к этим операциям присоединяются новые.

Аналитический способ задания функции не является единственным. Часты случаи, когда невозможно найти аналитическое выражение для функции.

Распространены *табличный* и *графический* способы задания функций.

*Табличный способ* применяется в тех случаях, когда непосредственное вычисление значения функции по ее аналитическому выражению требует большой затраты времени.

*Графический способ* задания функции нашел широкое применение в различных самопишущих технических приборах и ЭВМ.

Обозначения. Наряду с обозначением $y = f(x)$ применяют и другие обозначения функции или *функциональной зависимости:* $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ и т. д. Здесь $x$ — аргумент; $y$ — функция; $F$, $\varphi$ — различные символы функциональной зависимости.

Частное значение функции $y = f(x)$, соответствующее заданному значению $x = a$ независимой переменной, обозначается так: $f(a)$. Например, если

$$f(x) = x^2 + \sqrt{3x + 10},$$

то

$$f(2) = 2^2 + \sqrt{3 \cdot 2 + 10} = 8.$$

**27.3. Задание области определения и области значений фуикции.** Область определения и область значений функции могут состоять из отрезков, интервалов и отдельных числовых значений. *Интервал* — множество действительных значений $x$, заключенных между двумя не совпадающими значениями $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, исключая сами эти значения $a$ и $b$ (рис. 86, *а*).

Обозначения: $x \in (a, b)$, $a < x < b$. Значения $a$ и $b$ называются *концами* интервала, а значения $x \in (a, b)$ — *внутренними точками* интервала.

Если $x \in \mathbf{R}$, т. е. областью определения являются все действительные числа, то иногда пишут $x \in (-\infty, +\infty)$. Аналогичной записью пользуются, когда интервал не ограничен с одной стороны:

$$x \in (-\infty, b), \quad x \in (a, +\infty).$$

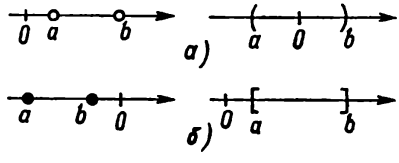



Рис. 86

Если к интервалу присоединим его концы $a$ и $b$, то получим *отрезок* (рис. 86, *б*).

Обозначения: $a \leqslant x \leqslant b$, или $x \in [a, b]$.

Отрезок и интервал называются *промежутками.*

Если к интервалу присоединим один из его концов (левый или правый), то получим *полуоткрытый* промежуток. Обозначения: $[a, b)$, или $(a, b]$.

Зная аналитическое представление функции и свойства тех операций, которые его составляют, мы можем исследовать нашу функцию, в частности найти ее область определения.

**Примеры.**

**1.** $\sqrt{x^2-1}$, область определения: $x \leqslant -1$, $x \geqslant 1$, или $x \in (-\infty, -1] \cap [1, +\infty)$ $(x^2-1=(x-1)(x+1) \geqslant 0)$.

**2.** $1/\ln x$, область определения $x > 0$, $x \neq 1$, или $x \in (0,1) \cap (1, +\infty)$ $(x > 0,\ \ln x \neq 0)$.

**3.** $\ln(x^2-2x+7)$, область определения вся ось: $-\infty < x < +\infty$, или $x \in (-\infty, +\infty)$ $(x^2-2x+7 > 0$ при всех $x)$.

**4.** $\ln \arcsin x$, область определения: $0 < x \leqslant 1$, или $x \in (0, 1]$ (функция $\arcsin x$ требует изменения $x$ в интервале $[-1, 1]$, а $\ln \arcsin x$ — положительности $\arcsin x$).

Существенно помнить, что если функция получена в результате исследования некоторого конкретного процесса, то надо исходить из условий, при которых этот процесс протекает, а не ограничиваться формальными подсчетами.

**Пример.** Исследуя зависимость линейного расширения алюминия от температуры, пользуются приближенной формулой: $l = |\alpha(t-t_0)+1|l_0$. Однако бессмысленно рассматривать значения $t > 658°$, так как при 658° алюминий плавится и говорить о его линейном расширении нельзя.

*Окрестностью* точки $x = x_0$ называется всякий интервал, для которого точка $x_0$ является внутренней.

Если областью определения функции являются все действительные числа, то говорят, что функция определена на всей числовой оси или в интервале «от минус бесконечности до плюс бесконечности». Обозначение: $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty, +\infty)$.

**27.4. Классификация функций.** Функция, заданная формулой (уравнением), называется *явной,* если данное уравнение разрешено относительно функции. Пример явной функции

$$y = x^2 - \sqrt{1-x}\,.$$

Функция называется *неявной,* если задающее ее уравнение не разрешено относительно функции. Пример неявной функции:

$$x^2 + y^2 = 25\,.$$

*Элементарными* называются функции, определенные формулами, содержащими конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций. Все эти операции могут производиться над аргументом, функцией, постоянными величинами — *параметрами.*

Элементарные функции делятся в основном на алгебраические и трансцендентные.

*Алгебраической* называется функция, в которой над аргументом производится конечное число алгебраических операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной.*

Простейшие типы алгебраических функций.

1. *Целая функция (многочлен* или *полином*): $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, над аргументом $x$ производятся только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в целую положительную степень.

Примеры целых функций: $y = a$ *(постоянная),* $y = ax + b$ *(линейная функция),* $y = ax^2 + bx + c$ *(квадратичная функция)* — везде $a \neq 0$.

2. *Дробная (рациональная) функция:* отношение двух целых функций. Наиболее простым примером дробной функции является функция $y = m/x$.

3. *Иррациональная функция:* над аргументом $x$ производится еще действие извлечения корня.

Простейшие типы трансцендентных функций.

1. *Показательная функция* $y = a^x (a > 0)$. На рис. 87 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{-x}$; они симметричны относительно оси $Oy$.

2. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$. На рис. 88 изображены графики функций $y = \log_2 x$ и $\log_{1/2} x$.

3. *Тригонометрические функции:* $y = \sin x$ (рис. 89), $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 90), $y = \sec x$ (рис. 91), $y = \cos x$ (рис. 92), $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 93), $y = \operatorname{cosec} x$ (рис. 94).

4. *Обратные тригонометрические функции:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

На рис. 95 сплошной линией изображен график функции

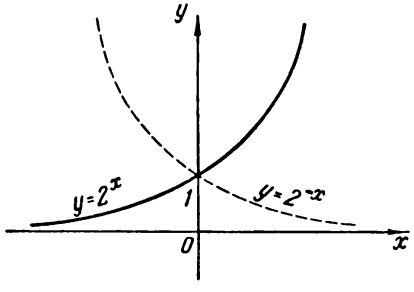



Рис. 87

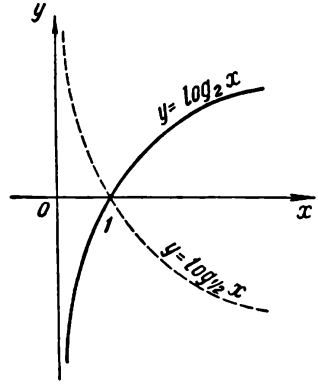



Рис. 88

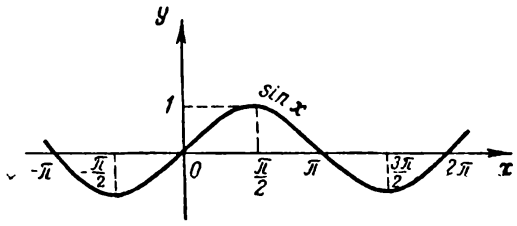



Рис 89

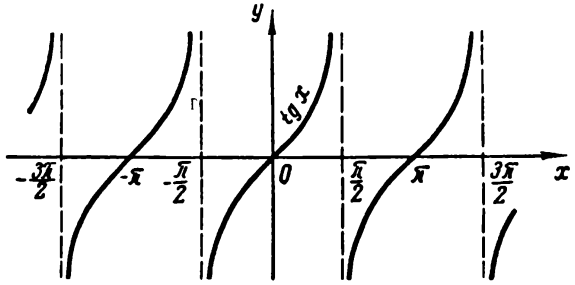



Рис. 90

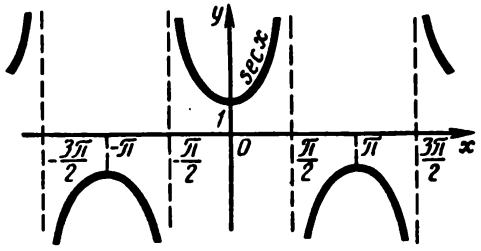



Рис. 91

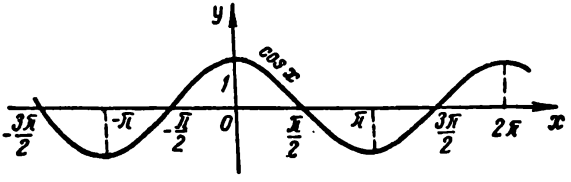



Рис. 92

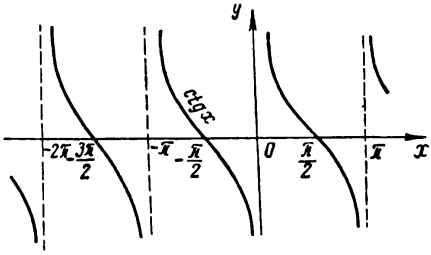



Рис. 93

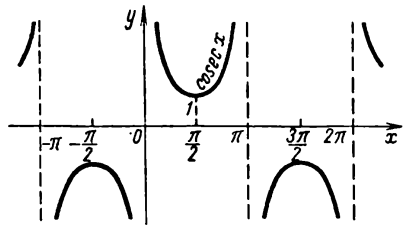



Рис. 94

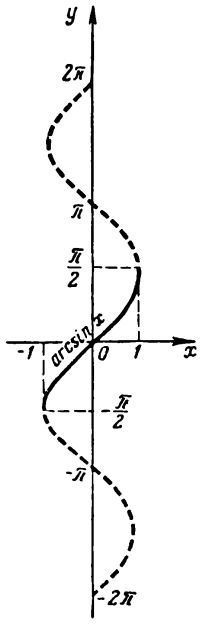



Рис. 95

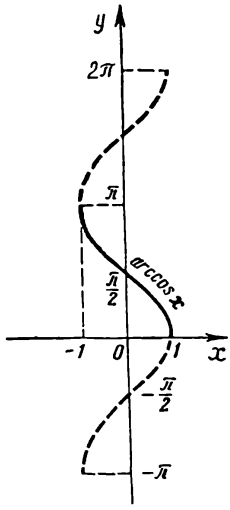



Рис. 96

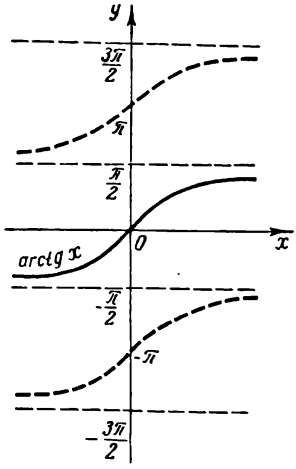



Рис. 97

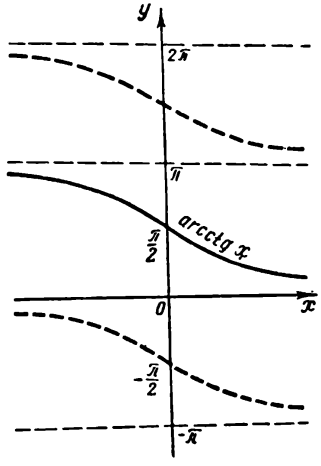



Рис. 98

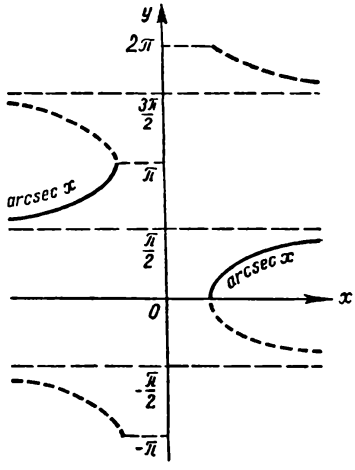



Рис. 99

$y=\arcsin x$. Пунктиром показаны обратные функции, соответствующие двум соседним интервалам монотонности синуса. На рис. 96 сплошной линией выделен график функции $y=\arccos x$. На рис. 97 и 98 изображены соответственно графики $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$, а на рис. 99 и 100 — соответственно графики $y=\operatorname{arcsec} x$ и $y=\operatorname{arccosec} x$. Пунктиром показаны обратные функции, соответствующие двум соседним интервалам монотонности исходной тригонометрической функции.

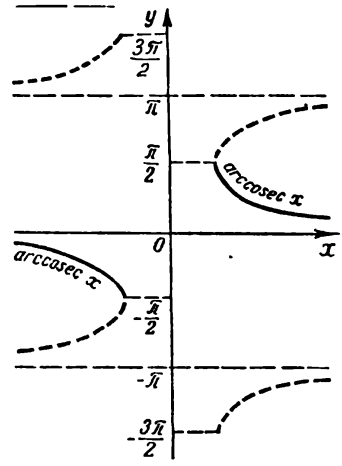


Рис. 100

**27.5. Взаимно обратные функции.** Для характеристики функции совершенно не существенно, какой буквой обозначаются сама функция и ее аргумент. Например, $y=x^2$ и $u=v^2$ — это одна и та же функциональная зависимость. Если в данной функциональной зависимости каждому значению аргумента $x\in X$ соответствует единственное значение $y\in Y$ и мы поменяем ролями аргумент и функцию, то получим функциональную зависимость, *обратную* данной.

**Пример.** Пусть задана функция $u=v^3$. Если поменять ролями аргумент и функцию, то $v$ будет функцией $u$ и изобразится формулой $v=\sqrt[3]{u}$.

Обозначая в обоих случаях аргумент буквой $x$, а функцию — буквой $y$, получим две взаимно обратные функции:

$$y=x^3 \quad \text{и} \quad y=\sqrt[3]{x}\,.$$

Взаимно обратными являются также функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

**27.6. Монотонность. Четность. Периодичность. Ограниченность.** Функция называется *возрастающей* в некотором интервале, если для любых двух значений $x_1$, $x_2$ аргумента из этого интервала значения функции удовлетворяют условию

$$f(x_2)>f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2>x_1\,.$$

Функция называется *убывающей* в некотором интервале, если

$$f(x_2)<f(x_1) \quad \text{при} \quad x_2>x_1\,.$$

Функция либо только возрастающая, либо только убывающая называется *монотонной*.

*Четной* называется функция, удовлетворяющая условию $f(-x)\equiv f(x)$, если $x$ и $-x$ принадлежат области определения функции $f(x)$. Примеры четной функции: $y=x^2+4$, $y=\cos x$. График четной функции симметричен относительно оси $Oy$.

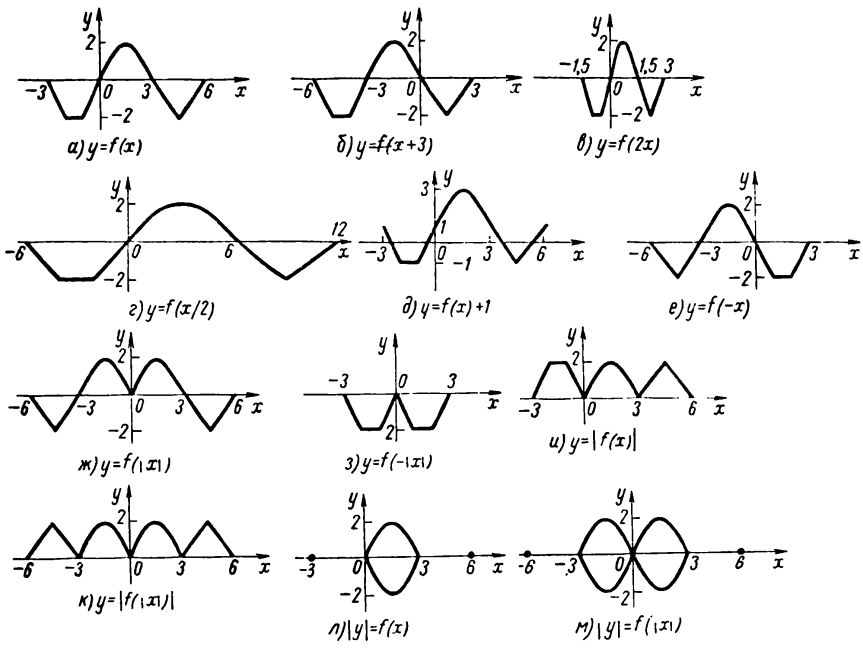



Рис. 101

*Нечетной* называется функция, удовлетворяющая условию $f(-x) \equiv -f(x)$, если $x$ и $-x$ принадлежат области определения функции $f(x)$. Примеры нечетной функции: $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^3 - x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

*Периодической* называется функция, удовлетворяющая условию $f(x+T) = f(x)$ для любого $x$. Наименьшее значение $T > 0$, удовлетворяющее этому условию, называется *периодом функции*. Примеры периодических функций: 1) $y = \sin x$; ее период $T = 2\pi$, так как $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; 2) $y = \operatorname{tg} x$, ее период $T = \pi$, так как $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существует такая постоянная величина $A$, что $|f(x)| \leqslant A$ при любом значении аргумента $x$. В противном случае функция $f(x)$ называется *неограниченной*. Аналогично определяется понятие: функция, ограниченная на интервале $a < x < b$ или на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

**Примеры. 1.** Функция $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ограниченная, так как при любых значениях $x$ имеем $\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1$.

**2.** Функция $y = \sin x$ ограниченная, так как для любых значений $x$ имеем $|\sin x| \leqslant 1$.

**3.** Функция $y = \operatorname{tg} x$ ограничена на интервале $0 < x < \pi/4$ и не ограничена на интервале $0 < x < \pi/2$.

**27.7. Преобразование графиков.** Зная график функции $y = f(x)$ (рис. 101, *а*), можно построить графики функций $y = af(bx + c) + d$, а также графики функций $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$ и т. п.

| График функции | Получается из графика функции с помощью преобразования |
|---|---|
| $f(x + c)$ | При $c > 0$ *сдвиг* вдоль оси $Ox$ *влево* на отрезок $c$; при $c < 0$ — *сдвиг* вдоль оси $Ox$ *вправо* на $c$ (рис. 101, *б*) |
| $f(bx)$, $b > 0$ | При $b > 1$ *сжатие* к оси $Oy$ в $b$ раз; при $0 < b < 1$ — *растяжение* от оси $Oy$ в $1/b$ раз (рис. 101, *в, г*) |
| $y = f(x) + d$ | При $d > 0$ — *сдвиг вверх* на отрезок $d$; при $d < 0$ — *сдвиг вниз* на $d$ (рис. 101, *д*) |
| $y = f(-x)$ | *Симметрия* относительно оси $Ox$ (рис. 101, *е*) |
| $y = -f(x)$ | *Симметрия* относительно оси $Oy$ |
| $y = af(x)$, $a > 0$ | При $a > 1$ — *растяжение* от оси $Oy$ в $a$ раз; при $0 < a < 1$ — *сжатие* к оси $Oy$ в $1/a$ раз |
| $y = af(bx + c)$ $(a > 1, b > 1, c > 0)$ | Последовательно: *сдвиг влево* на $c$ *сжатие* к $Ox$ в $b$ раз, *растяжение* от $Oy$ в $a$ раз. Или: $af[b(x + c/b)]$. Последовательно: *сжатие* к $Ox$ в $b$ раз, сдвиг влево на $c/b$ *растяжение* от $Oy$ в $a$ раз |
| $y = f(\|x\|)$ | В правой полуплоскости график $f(x)$ не изменяется, в левой строится симметричный образ правой полуплоскости относительно $Oy$ (рис. 101, *ж*) |
| $y = f(-\|x\|)$ | В левой полуплоскости график $f(x)$ не изменяется, в правой строится симметричный образ левой полуплоскости относительно $Oy$ (рис. 101, *з*) |
| $y = \|f(x)\|$ | Часть графика $f(x)$, которая располагалась в верхней полуплоскости, не изменяется, часть графика $f(x)$ из нижней полуплоскости симметрично отражается от оси $Ox$ (рис. 101, *и*) |
| $y = \|f(\|x\|)\|$ | В правой полуплоскости строят $\|f(x)\|$ и симметрично отражают от оси $Oy$ (рис. 101, *к*) |
| $\|y\| = f(x)$ | Оставляют часть графика $f(x)$, лежащую над осью $Ox$ и на оси $Ox$ и симметрично отражают ее от оси $Ox$ (рис. 101, *л* — появляются две изолированные точки (—3,0), (6,0)) |
| $\|y\| = f(\|x\|)$ | В правой полуплоскости оставляют часть графика $f(x)$, лежащую над осью $Ox$ и на $Ox$ и симметрично отражают ее от оси $Ox$, полученный график симметрично отражают от оси $Oy$. Добавляют точки графика $y = f(x)$, лежащие на оси $Ox$ в левой полуплоскости (рис. 101, *м*) |

## 28. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ

**28.1. Бесконечно малая и бесконечно большая величины.** Переменная величина $\alpha$ называется *бесконечно малой,* если она при своем изменении становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине меньше любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon$:

$$|\alpha| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim \alpha = 0.$$

Переменная величина $y$ называется *бесконечно большой,* если при своем изменении она становится и в дальнейшем остается по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа $N$:

$$|y| > N.$$

Простейшие свойства бесконечно малых.

1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2. Произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

3. Произведение постоянной величины на бесконечно малую, или произведение двух бесконечно малых, есть величина бесконечно малая.

4. Произведение любого постоянного числа сомножителей, среди которых хотя бы один есть величина бесконечно малая, а остальные — величины ограниченные (или постоянные), есть величина бесконечно малая.

5. Частное $\alpha/a$ (где $\alpha$ — бесконечно малая; $a \neq 0$ — конечная величина) есть величина бесконечно малая.

6. Частное $\alpha/\beta$ двух бесконечно малых величин в зависимости от характера изменения делимого и делителя может быть или бесконечно малой, или конечной, или бесконечно большой величиной.

Если частное $\alpha/\beta$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая (это значит, что $\lim \alpha/\beta = 0$), то $\alpha$ называют *бесконечно малой высшего порядка, чем* $\beta$, и символически записывают:

$$\alpha = o(\beta).$$

Если частное $\alpha/\beta$ двух бесконечно малых есть конечная величина, отличная от нуля (это значит, что $\lim \alpha/\beta = a \neq 0$), то $\alpha$ и $\beta$ называют *бесконечно малыми одного и того же порядка* и символически записывают:

$$\alpha = O(\beta).$$

Нетрудно убедиться в том, что если $\alpha = O(\beta)$, то $\beta = O(\alpha)$.

Если же частное $\alpha/\beta$ двух бесконечно малых есть величина бесконечно большая, то $\alpha$ называют *бесконечно малой низшего порядка, чем* $\beta$. В этом случае можно написать

$$\beta = o(\alpha).$$

Если $\lim(\alpha/\beta)=0$, то целый порядок бесконечно малой $\alpha$ по сравнению с бесконечно малой $\beta$ устанавливается так: находят последовательно пределы $\lim(\alpha/\beta^2)$, $\lim(\alpha/\beta^3)$ и т. д., и если обнаружится, что при каком-нибудь целом $k$ предел $\lim(\alpha/\beta^k)=c$ отличен от нуля, то говорят, что *величина $\alpha$ имеет $k$-й порядок малости относительно бесконечно малой $\beta$*.

*Главной частью* бесконечно малой величины называется бесконечно малая, отличающаяся от данной на бесконечно малую *более высокого* порядка.

7. Бесконечно малые величины $\alpha$ и $\beta$ одного и того же порядка называются *равносильными* или *эквивалентными*, если предел их отношения равен единице:

$$\lim(\alpha/\beta)=1.$$

Разность двух эквивалентных бесконечно малых $\alpha$ и $\beta$ есть обязательно бесконечно малая высшего порядка, чем $\alpha$ и $\beta$; поэтому каждая из двух эквивалентных бесконечно малых есть главная часть другой.

Связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

1. Если $\alpha$ — величина бесконечно малая, то $1/\alpha$ — величина бесконечно большая.

2. Если $y$ — величина бесконечно большая, то $1/y$ — величина бесконечно малая.

**28.2. Предел функции.** Число $A$ называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,$$

если разность $f(x)-A=\alpha$ является бесконечно малой величиной, когда $x-a$ бесконечно малая.

Если функция $y=f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, имеет своим пределом число $A$, то $f(x)$ может быть представлена в виде суммы

$$f(x)=A+\alpha,$$

где $\alpha$ — величина бесконечно малая при $x\to a$.

*Предел бесконечно малой величины* равен нулю.

Для обозначения того факта, что функция $f(x)$ при приближении $x$ к $a$ неограниченно возрастает, употребляют обычно такую запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

Если при $x$, стремящемся к $a$, функция $f(x)$ неограниченно убывает, то записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Запись $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ означает, что при неограниченно возрастающем аргументе $x$ функция $f(x)$ стремится к пределу $A$.

Аналогичный смысл имеет запись $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

Простейшие теоремы о пределах*.

1. Предел постоянной величины $c$ равен самой постоянной $c$:

$$\lim c = c.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x) - \lim f_3(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов:

$$\lim [f_1(x) f_2(x) f_3(x)] = \lim f_1(x) \lim f_2(x) \lim f_3(x).$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim cf(x) = c \lim f(x).$$

5. $\lim (x^m) = (\lim x)^m$; $\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}$.

6. Предел частного двух функций равен частному их пределов, если только предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \text{ если } \lim f_2(x) \neq 0.$$

7. Если функция $f(x)$ заключена между двумя другими функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$

$$f_1(x) < f(x) < f_2(x),$$

имеющими один и тот же общий предел $A$,

$$\lim f_1(x) = A, \ \lim f_2(x) = A,$$

то функция $f(x)$ имеет тот же предел $A$:

$$\lim f(x) = A.$$

Некоторые замечательные пределы.

1. *Числом* e называется следующий предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

---

* Здесь предполагается существование пределов у всех функций, участвующих в формулировках теорем.

или

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e.$$

Число e есть число трансцендентное. Приближенное его значение

$$e \approx 2{,}71828.$$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$

3. Имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Таким образом, переменные величины $x$ и $\sin x$ (а также $\operatorname{tg} x$) при $x \to 0$ представляют собой пример эквивалентных (см. п. 28.1) бесконечно малых.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0,$

где $m$ — любое число.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1,$

где $a > 0$ и постоянная.

Натуральные логарифмы. Система логарифмов, в которой за основание принято число e, называется системой *натуральных* или *неперовых логарифмов*. Обозначение натуральных логарифмов:

$$\log_e N = \ln N.$$

Множитель $\lg e$ (десятичный логарифм числа e), служащий для перехода от натуральной системы логарифмов к десятичной, называется *модулем перехода:*

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}4343;$$

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}3026.$$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратно:

$$\lg N \approx 0{,}4343 \ln N;$$
$$\ln N \approx 2{,}3026 \lg N.$$

**28.3. Приращение функции.** Разность между двумя значениями $x_1$ и $x_2$ независимой переменной $x$ называется *приращением независи-*

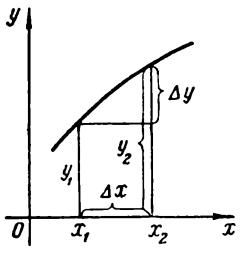



Рис. 102

*мой переменной* и обозначается символом $\Delta x$ (читается: «дельта икс»):

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Отсюда $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Если величины $y_1$ и $y_2$ суть значения функции $y = f(x)$, соответствующие значениям $x_1$ и $x_2$ независимой переменной $x$,

$$y_1 = f(x_1) \text{ и } y_2 = f(x_2),$$

то разность $y_2 - y_1$ (рис. 102) называется *приращением функции*, соответствующим приращению $\Delta x$ независимой переменной, и обозначается символом $\Delta y$:

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

Величины $\Delta x$ и $\Delta y$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Чтобы вычислить приращение $\Delta y$ функции $y = f(x)$, надо в выражении функциональной зависимости заменить $x$ на $x + \Delta x$, а $y$ — на $y + \Delta y$:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

и затем вычесть выражение $y = f(x)$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* $v_{ср}$ изменения функции на интервале $(x, x + \Delta x)$.

**28.4. Непрерывность функции.** Дадим три равносильных определения непрерывной функции в точке.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_1$ (или при $x = x_1$), если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел приращения $\Delta y$ функции, соответствующий приращению $\Delta x$ аргумента, равен нулю при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)] = 0.$$

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_1$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 3. *Функция* $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_1$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_1$ равен значению функции при $x = x_1$, т. е. если

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1).$$

Функция $y=f(x)$, непрерывная в каждой точке интервала $(a, b)$ (или $[a, b]$), называется *непрерывной на заданном интервале (отрезке)*.

Если в некоторой точке $x_0$ какое-нибудь из условий непрерывности функции $y=f(x)$ не выполняется, то говорят, что *функция* $y=f(x)$ *претерпевает разрыв в точке* $x_0$ и точку $x_0$ называют *точкой разрыва* функции.

Непрерывность и точки разрыва элементарных функций. *Целые функции (многочлены)* непрерывны при всех значениях $x$.

*Дробные функции* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывны при всех значениях $x$, за исключением тех, которые обращают в нуль знаменатель $Q(x)$.

*Иррациональные функции.* Радикалы с целым положительным показателем из целых функций непрерывны при всех значениях $x$, принадлежащих области определения (см. п. 27.3). Радикалы из дробных функций имеют те же точки разрыва, что и подкоренная функция.

*Тригонометрические функции.* Функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всех значениях $x$, функции $\operatorname{tg} x$ и $\sec x$ имеют точки разрыва при $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$; функции $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$ разрывны при $x=n\pi$ ($n$ — целое число).

*Обратные тригонометрические функции* $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны при всех значениях $x$; функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ непрерывны при всех значениях $x$, принадлежащих области определения этих функций ($-1 \leqslant x \leqslant 1$).

*Показательные функции* $e^x$ и $a^x$ $(a>0)$ непрерывны при всех значениях $x$.

*Логарифмическая функция* $\log_a x (0<a\neq 1)$ непрерывна при всех $x>0$ и стремится к $-\infty$ при $x\to 0$.

## 29. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**29.1. Производная.** Обозначения: $y$; $\frac{dy}{dx}$; $f'(x)$; $y$; $\frac{df(x)}{dx}$.

Определение. *Производной* функции $y=f(x)$ называется такая новая функция, которая при каждом значении независимой переменной $x$ равна пределу отношения приращения $\Delta y$ функции к приращению $\Delta x$ независимой переменной $x$ при произвольном стремлении $\Delta x$ к нулю:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

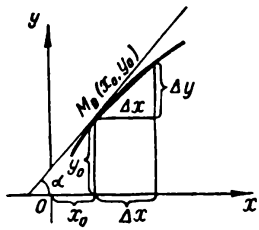



Рис. 103

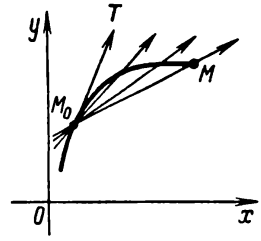



Рис. 104

Процесс вычисления производной от данной функции называется *дифференцированием* функции.

Геометрический смысл производной. Значение производной $y'=f'(x)$ при заданном значении $x_0$ равно тангенсу угла, отсчитываемого от оси $Ox$ против часовой стрелки до касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ (рис. 103):

$$y'_0=\operatorname{tg}\alpha.$$

*Касательной* к кривой в точке $M_0$ (рис. 104) называется предельное положение $M_0T$ секущей $M_0M$, когда точка $M$, перемещаясь вдоль кривой, стремится к совпадению с $M_0$.

*Нормалью* к кривой в точке $M_0$ называется прямая, проходящая через точку $M_0$ перпендикулярно касательной к кривой в этой точке.

*Уравнение касательной к кривой* $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

где $f'(x_0)$ — значение производной от функции $y=f(x)$ при $x=x_0$.

*Уравнение нормали к кривой* $y=f(x)$ в точке

$$x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0.$$

Механический и физический смысл производной. С помощью понятия производной легко определяются многие понятия математики и естествознания. Так, например:

1. *Мгновенная скорость неравномерного прямолинейного движения* есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути $s$ от времени $t$, т. е. если $s=f(t)$, то $v=f'(t)$.

*Замечание.* По аналогии со скоростью движения говорят вообще о скорости изменения функции. Если величина $y$ есть функция величины $x$, т. е. $y=f(x)$, то производную $y'$ называют *скоростью изменения величины $y$ относительно величины $x$.*

2. *Угловая скорость* вращения тела около оси есть производная от функции, выражающей зависимость угла $\varphi$ поворота тела относительно оси от времени.

3. *Линейная плотность* материальной линии (например, проволоки) в данной ее точке есть производная от функции, выражающей зависимость массы этой линии от ее длины.

4. *Теплоемкость* тела при данной температуре есть производная от функции, выражающей зависимость количества тепла от температуры.

5. *Скорость химической реакции* есть производная от функции, выражающей зависимость количества вступившего в реакцию вещества от времени.

6. *Сила тока* есть производная от функции, выражающей количество протекшего электричества от времени.

Связь между существованием производной и непрерывностью функции. Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную при $x=x_0$, то она непрерывна при этом значении $x_0$.

Обратное предложение, вообще говоря, оказывается неверным: функция, непрерывная в данной точке, может не иметь производной в этой точке. Например, функция $y=|x|$ в точке $x=0$ непрерывна и не имеет в этой точке производной.

*Второй производной* функции $y=f(x)$, или *производной второго порядка,* называется производная от ее производной. Обозначения второй производной: $y''$, $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются производные любого порядка. Обозначения производной $n$-го порядка: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$.

*Механический смысл второй производной.* Ускорение $a$ прямолинейного движения тела в данный момент времени есть вторая производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути от времени $t$, т. е. если $s=f(t)$, то $a=s''$.

**29.2. Основные правила и формулы дифференцирования.**

Правила дифференцирования ($u$, $v$, $w$ — функции аргумента $x$, по которому производится дифференцирование).

1. *Производная алгебраической суммы*

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

2. *Производная произведения*

$$(uv)'=vu'+uv';\quad (uvw)'=vwu'+wuv'+uvw'.$$

В частности, если $C$ — постоянная, то

$$(Cu)'=Cu';\quad \left(\frac{u}{C}\right)'=\left(\frac{1}{C}u\right)'=\frac{1}{C}u'.$$

3. *Производная частного (дроби)*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}\qquad (v\neq 0).$$

В частности,

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}.$$

**Таблица основных формул дифференцирования**

| № п/п | Функция | Производная | № п/п | Функция | Производная |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C$ (постоянная) | $0$ | 6 | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 2 | $x^{\alpha}$ ($\alpha$ — постоянная) | $\alpha x^{\alpha-1}$ | 7 | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| | Частные случаи: | | | | |
| | $x$ | $1$ | 8 | $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |
| | $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | 9 | $\operatorname{ctg} x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| | $\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | 10 | $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 3 | $a^x$ ($a>0$ — постоянная) | $a^x \ln a$ | 11 | $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4 | $e^x$ | $e^x$ | 12 | $\operatorname{arctg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| 5 | $\log_a x$ ($0<a\neq 1$) | $\dfrac{1}{x}\log_a e=$ $=\dfrac{1}{x\ln a}$ | 13 | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| | | | 14 | $x^x$ | $x^x(1+\ln x)$ |
| | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | | | |
| | $\lg x$ | $\dfrac{1}{x}\lg e\approx$ $\approx\dfrac{0{,}4343}{x}$ | | | |

4. *Производная сложной функции (функции от функции).* **Если** $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, т. е. $y=f[\varphi(x)]$, то

$$y'=f'(u)\,\varphi'(x), \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

В общем случае, если $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \text{ (}\textit{цепное правило}\text{).}$$

**Пример.** $y=\operatorname{tg}^3 4x$. Здесь $y=u^3$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=4x$. Имеем

$$\frac{dy}{du}=3u^2=3\operatorname{tg}^2 4x,\ \frac{du}{dv}=\frac{1}{\cos^2 v}=\frac{1}{\cos^2 4x};\ \frac{dv}{dx}=4.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}=3\operatorname{tg}^2 4x\frac{1}{\cos^2 4x}\cdot 4=\frac{12\operatorname{tg}^2 4x}{\cos^2 4x}.$$

*Производные некоторых сложных функций.* Если $u$ — функция от $x$ и $a$ — постоянная, то

$$(u^a)' = a u^{a-1} u';$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

5. *Логарифмическое дифференцирование.* Часто для вычисления производной функции $y=f(x)$ эту функцию сначала логарифмируют, а затем дифференцируют. Результат логарифмического дифференцирования функции, т. е. выражение

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

называют *логарифмической производной* от функции $y$.

**Пример.** *Производная общей показательной функции* $y=u^v$ ($u$ и $v$ — функции от $x$; $u>0$). Взяв натуральный логарифм от левой и правой части равенства $y=u^v$, получим

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируем левую и правую части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}.$$

Отсюда

$$y' = \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) y = \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) u^v = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'.$$

6. *Производная неявной функции.* Если функция $y$ задана неявно уравнением $F(x, y)=0$, то для вычисления производной $y'$ дифференцируем по $x$ обе части уравнения, считая $y$ функцией от $x$, и полученное в результате уравнение разрешаем относительно $y'$.

**Пример.** Найти $y'$, если функция $y$ задана неявно уравнением $xy^3-5x+3y-4=0$.

Воспользовавшись правилами дифференцирования суммы, произведения, сложной функции и формулами дифференцирования, получим

$$1\cdot y^3+3y^2y'x-5+3y'=0,$$

откуда

$$y'=\frac{5-y^3}{3y^2x+3}.$$

7. *Производная обратной функции.* Если функция $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратны, то

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}, \text{ или } \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Производные $n$-го порядка от некоторых функций.

| № п/п | Функция | Производная $n$-го порядка |
|---|---|---|
| 1 | $x^m$ | $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ |
| 2 | $a^x$ | $(\ln a)^n a^x$ |
| 3 | $e^{kx}$ | $k^n e^{kx}$ |
| 4 | $\ln x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$ |
| 5 | $\sin x$ | $\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| 6 | $\cos x$ | $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ |

**29.3. Исследование функций с помощью производной.** Возрастание и убывание функций (достаточный признак). Если производная данной функции существует и положительна (отрицательна) для всех значений $x$ в интервале $(a, b)$, то функция в этом интервале возрастает (соответственно убывает).

Максимумы и минимумы функции. Точка $x=x_0$ называется *точкой* (относительного) *максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех значений $x$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0).$$

Точка $x=x_0$ называется *точкой* (относительного) *минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех значений $x$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)>f(x_0).$$

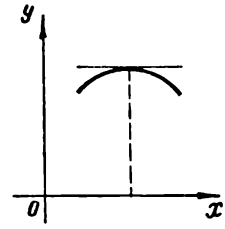


Рис. 105

Для максимума и минимума функции, а также для значений функции в граничных точках ее области определения существует общее название — *экстремум*.

Необходимый признак существования максимума или минимума функции. В точках максимума или минимума функций $y=f(x)$ ее производная $f'(x)$ (если она существует в этих точках) обращается в нуль:

$$f'(x)=0.$$

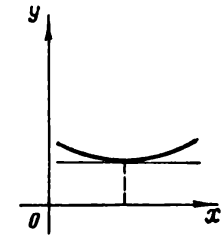


Рис. 106

Геометрический смысл. В точках максимума (рис. 105) или минимума (рис. 106) касательная к графику функции параллельна оси $Ox$.

*Замечание 1.* Не при всяком значении $x_0$, для которого производная $f'(x)$ равна нулю [$f'(x_0)=0$], функция $f(x)$ имеет максимум или минимум.

*Замечание 2.* Функция $y=f(x)$ может иметь экстремум и в точках разрыва своей производной $f'(x)$.

Корни уравнения $f'(x)=0$ называются *стационарными точками*.

Отыскание точек максимума или минимума. Для отыскания точек (относительных) максимума и минимума переменной величины поступают так:

1. Выразив сообразно условию задачи данную переменную величину как функцию независимой переменной, находят производную этой функции (пусть $(a, b)$ — область определения этой функции).

2. Приравнивают производную нулю, решают полученное уравнение $f'(x)=0$ и находят его корни (стационарные точки). Кроме них находят еще и точки разрыва производной $f'(x)$.

3. Каждую из стационарных точек, а также точек разрыва производной исследуют на максимум и минимум одним из следующих двух способов.

*Первый способ.* Допустим, что $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$ — корни уравнения $f'(x)=0$. В таком случае определяем знаки производной $f'(x)$ в каждом из интервалов $(a, c_1)$, $(c_1, c_2)$, ..., $(c_k, b)$*. Тем самым будет выяснено,

* Для определения знака производной, например, в интервале $(c_1, c_2)$ достаточно определить знак производной в какой-нибудь одной точке этого интервала (если $f'(x)$ непрерывна).

изменяет ли и как именно производная знак при переходе (слева направо) через каждую из точек $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$. Если при переходе, например, через точку $c_1$ производная меняет знак с «—» на «+», то в точке $c_1$ функция имеет минимум, если с «+» на «—» — то максимум. Если же знак производной при переходе, например, через точку $c_2$ не меняется, то в этой точке функция не имеет экстремума.

*Второй способ.* Пусть $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$ — корни уравнения $f'(x)=0$. Находим вторую производную $f''(x)$ и определяем знак второй производной при каждом из значений $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$. Если, например, в точке $c_1$

$$f''(c_1)<0,$$

то в этой точке функция имеет максимум; если, например, в точке $c_2$

$$f''(c_2)>0,$$

то в этой точке функция имеет минимум; если же, например, в точке $c_3$

$$f''(c_3)=0,$$

то ничего определенного сказать нельзя. В последнем случае следует обратиться к первому способу отыскания экстремума функции.

Наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке. Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$ надо найти все максимумы (минимумы) этой функции на данном отрезке и значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из всех этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на отрезке $[a, b]$.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Кривая $y=f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой) кверху,* если ее произвольная дуга лежит *над (под)* хордой, стягивающей эту дугу. На рис. 107 дуга $AC$ выпукла кверху, а дуга $CB$ вогнута кверху. Выпуклая дуга лежит *под* любой своей касательной, а вогнутая — *над* любой своей касательной.

Достаточный признак выпуклости и вогнутости функции. Если вторая производная $f''(x)$ данной функции $f(x)$ положительна ($f''(x)>0$) в интервале $(a, b)$, то функция в этом интервале вогнута кверху; если же в интервале $(a, b)$ $f''(x)<0$ (отрицательна), то функция выпукла кверху.

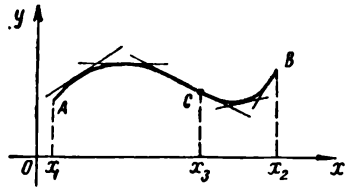



Рис. 107

Точки перегиба. Точка, в которой кривая расположена по разные стороны своей касательной (например, точка $C$ на рис. 107), называется *точкой перегиба.* Точка перегиба отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой ее части.

Необходимый признак существования точки перегиба. В точках перегиба графика

функции $y=f(x)$ ее вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль

$$f''(x)=0.$$

*Замечание 1.* Однако не при всяком значении $x_0$, для которого вторая производная обращается в нуль ($f''(x_0)=0$), функция $f(x)$ имеет точку перегиба.

*Замечание 2.* Функция $y=f(x)$ может иметь точку перегиба и в точках разрыва второй производной $f''(x)$.

Отыскание точек перегиба. Для отыскания точек перегиба графика функции $y=f(x)$ необходимо:

1. Вычислить вторую производную $f''(x)$ данной функции.

2. Найти те значения $x$ в интервале $(a, b)$, при которых $f''(x)$ обращается в нуль (т. е. решить уравнение $f''(x)=0$) или имеет точку разрыва; пусть эти значения будут: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

3. Определить знак второй производной $f''(x)$ в каждом из интервалов $(a, x_1), (x_1, x_2, \ldots, (x_k, b)$ (см. сноску на с. 261). Тем самым будет выяснено, изменяет ли вторая производная $f(x)$ знак при переходе через каждую из точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Изменение знака $f''(x)$, например, в точке $x_1$, указывает, что при $x=x_1$ функция имеет точку перегиба. Если знак $f''(x)$ не изменяется, например, при переходе через точку $x_2$, то при $x=x_2$ функция не имеет точки перегиба.

4. Если при $x=x_1$ функция $f(x)$ имеет точку перегиба, то, определив значение функции в этой точке $f(x_1)$, мы найдем координаты точки перегиба $(x_1, f(x_1))$.

Схема построения графика функции состоит из следующих пунктов, в которых находят:

1) область определения функции (см. п. 27.3), точки разрыва (см. п. 28.4), точки пересечения с осями координат, оси и центры симметрии графика (четность, нечетность и периодичность функции; см. 27.6, 27.7);

2) точки максимума и минимума функции, участки возрастания и убывания функции;

3) значения $x$, при которых график имеет точки перегиба, участки выпуклости и вогнутости функции;

4) координаты «опорных» точек графика функции, вычисляя значения самой функции $f(x)$, отвечающие всем найденным значениям $x$.

Наносят на чертеж все найденные точки и, принимая во внимание все результаты исследования, вычерчивают график данной функции.

Кривизна кривой и радиус кривизны. Круг и центр кривизны. *Средней кривизной* $K_{ср}$ дуги $MM_1$ называется отношение величины угла $\Delta\varphi$ между касательными, проведенными в точках $M$ и $M_1$ дуги («угла смежности»), к длине $\Delta s$ этой дуги (рис. 108):

$$K_{ср}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

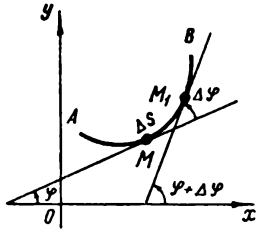



Рис. 108

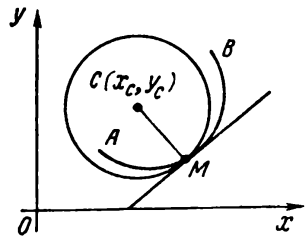



Рис. 109

Средняя кривизна характеризует степень искривленности дуги в целом.

*Кривизной* $K$ кривой в точке $M$ называется предел средней кривизны $K_{ср}$ дуги $MM_1$, когда длина дуги $MM_1$ стремится к нулю:

$$K=\lim_{\Delta s\to 0} K_{ср}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}.$$

*Радиусом кривизны* $R$ в точке $M$ кривой называется величина, обратная кривизне:

$$R=1/K.$$

Для *окружности радиуса* $a$ кривизна и радиус кривизны постоянны, причем

$$K=1/a;\ R=a.$$

Для *прямой* линии

$$K=0;\ R=\infty.$$

Для прочих кривых значения кривизны и радиуса кривизны меняются от точки к точке.

Проведем в точке $M$ (рис. 109) нормаль к кривой $AB$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MC$, равный по величине радиусу кривизны $R$. Полученная при этом точка $C(x_C, y_C)$ называется *центром кривизны*, а круг с центром $C$ и радиусом $CM$ называется *кругом кривизны*. Круг кривизны дает наглядное представление степени искривления кривой в данной точке.

Формулы для кривизны $K$, радиуса кривизны $R$ и координат центра кривизны $x_C$, $y_C$. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$ и функция $f$ дважды дифференцируема, то

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}};\ R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''};$$

$$x_C=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''};\ y_C=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

**29.4. Дифференциал.** Если первая производная $f'(x)$ существует

и не равна нулю, то приращение $\Delta y$ функции $y=f(x)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x;$$

$\alpha\Delta x$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta x$, при $\Delta x \to 0$.

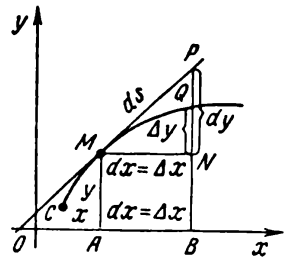



Рис. 110

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ этой суммы, являясь, следовательно, главной частью приращения функции, пропорциональной приращению независимой переменной $\Delta x$, называется *дифференциалом функции* $f(x)$ и обозначается $dy$, или $df(x)$. Итак,

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (1)$$

Частный случай. Дифференциал линейной функции равен приращению этой функции.

*Дифференциалом* $dx$ *независимой переменной* $x$ называют само приращение $\Delta x$ независимой переменной

$$dx = \Delta x.$$

Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$dy = f'(x)dx, \text{ или } f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'. \qquad (2)$$

Таким образом, производную $f'(x)$ функции $f(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала $dy$ функции к дифференциалу $dx$ аргумента.

Зная производную функции, легко найти ее дифференциал и обратно (см. формулы (2)). Поэтому действия отыскания производной и дифференциала данной функции носят общее название: *дифференцирование.*

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $dy$ функции $y=f(x)$ представляет собой приращение ординаты касательной, проведенной в данной точке $M$ графика функции. На рис. 110:

$$dx = \Delta x = MN;\ \Delta y = NQ;\ dy = NP.$$

Правила вычисления дифференциалов.

1. *Дифференциал алгебраической суммы*

$$d(u+v-w) = du + dv - dw.$$

2. *Дифференциал произведения*

$$d(uv) = vdu + udv.$$

В частности, если $C$ — постоянная, то

$$d(Cu) = Cdu,\ d\left(\frac{u}{C}\right) = \frac{du}{C},\ (C \neq 0).$$

3. *Дифференциал частного (дроби)*

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0).$$

В частности,

$$\mathrm{d}\left(\frac{C}{u}\right)=-\frac{C\mathrm{d}u}{u^2}.$$

Основные формулы вычисления дифференциалов. Все указанные ниже формулы справедливы независимо от того, является ли $u$ независимой переменной или функцией от другой переменной $x$ (см. свойства дифференциала ниже).

1. $\mathrm{d}C=0$ ($C$ — постоянная).
2. $\mathrm{d}(u^m)=mu^{m-1}\mathrm{d}u$ ($m$ — постоянная).

В частности,

$$\mathrm{d}\sqrt{u}=\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}},\quad \mathrm{d}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}.$$

3. $\mathrm{d}(a^u)=a^u\ln a\mathrm{d}u$ ($a$ — постоянная, $a>0$).
4. $\mathrm{d}(\mathrm{e}^u)=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$.
5. $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{au})=a\mathrm{e}^{au}\mathrm{d}u$ ($a$ — постоянная).
6. $\mathrm{d}(u^v)=vu^{v-1}\mathrm{d}u+u^v\ln u\mathrm{d}v$, $(u>0)$.

В частности,

$\mathrm{d}(u^u)=u^u(1+\ln u)\mathrm{d}u$.

7. $\mathrm{d}(\log_a u)=\frac{\mathrm{d}u}{u\ln a}=\frac{\log_a \mathrm{e}}{u}\mathrm{d}u$, $(0<a\neq 1)$.

В частности,

$$\mathrm{d}(\ln u)=\frac{\mathrm{d}u}{u};\quad \mathrm{d}(\lg u)=\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}.$$

8. $\mathrm{d}\sin u=\cos u\mathrm{d}u$.
9. $\mathrm{d}\cos u=-\sin u\mathrm{d}u$.
10. $\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,u=\frac{du}{\cos^2 u}$.
11. $\mathrm{d}\,\mathrm{ctg}\,u=-\frac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u}$.
12. $\mathrm{d}\sec u=\mathrm{tg}\,u\sec u\mathrm{d}u$,
13. $\mathrm{d}\,\mathrm{cosec}\,u=-\mathrm{ctg}\,u\,\mathrm{cosec}\,u\mathrm{d}u$.
14. $\mathrm{d}\arcsin u=\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
15. $\mathrm{d}\arccos u=-\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$.
16. $\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\,u=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

17. $\mathrm{d}\,\mathrm{arcctg}\,u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

18. $\mathrm{d}\,\mathrm{arcsec}\,u = \dfrac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-1}}$.

19. $\mathrm{d}\,\mathrm{arccosec}\,u = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-1}}$.

Свойства дифференциала.

1. *Инвариантность формы.* Дифференциал $f'(u)\mathrm{d}u$ функции $y=f(u)$ сохраняет одно и то же выражение независимо от того, является ли ее аргумент $u$ независимой переменной или функцией от другой независимой переменной.

2. *Порядок малости.* Если $\mathrm{d}x$ — бесконечно малая, то $\mathrm{d}y$ и $\Delta y$ — равносильные бесконечно малые, и разность $\Delta y - \mathrm{d}y$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ и $\Delta y$.

Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Пользуясь определением дифференциала функции, можно для малых $\Delta x$ с небольшой погрешностью заменить выражение для приращения функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ выражением $f'(x_0)\Delta x$:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y,$$

откуда

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (3)$$

Приближенное равенство (3) и используется для вычисления значений функции.

С помощью (3) можно легко получить ряд приближенных формул (см. таблицу в п. 32.6), которыми часто пользуются на практике (ради сокращения записи введем обозначение: $\Delta x = h$).

Дифференциал дуги. Обозначив длину дуги $CM$ через $s$ (см. рис. 110), мы получим следующее выражение для дифференциала $\mathrm{d}s$ дуги:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x, \text{ или } \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}.$$

Геометрический смысл дифференциала дуги. Дифференциал дуги $\mathrm{d}s$ равен отрезку касательной $MP$ (см. рис. 110) от точки касания до точки пересечения касательной с перпендикуляром, восставленным к оси $Ox$ в точке с абсциссой $x+\Delta x$.

Дифференциал второго порядка. *Дифференциалом второго порядка* функции $y=f(x)$ или *вторым дифференциалом* называется дифференциал от дифференциала функции. Обозначения: $\mathrm{d}^2y$, $\mathrm{d}^2f(x)$. Итак,

$$\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y).$$

Аналогично определяются дифференциалы любого порядка. Дифференциал $n$-го порядка обозначается $\mathrm{d}^n y$. Если дана функция $y=f(x)$,

где $x$ — *независимая переменная*, то дифференциалы второго, третьего и высших порядков определяются по формулам:

$$d^2y=f''(x)dx^2;\ d^3y=f'''(x)dx^3,\ \ldots,\ d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Если $x$ не является независимой переменной, то эти формулы, вообще говоря, не верны.

## 30. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**30.1. Неопределенный интеграл.** Определения и основные понятия. *Первообразной функцией* от данной функции $f(x)$ называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$ (или, что то же самое, дифференциал которой равен $f(x)dx$):

$$F'(x)=f(x),\ \text{или}\ dF(x)=f(x)dx.$$

Если функция имеет первообразную, то она имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

График первообразной $F(x)$ от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $y=f(x)$. Если $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... — первообразные данной функции $f(x)$, то их графики представляют собой одну и ту же линию, смещенную в ту или другую сторону в направлении оси $Oy$.

*Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется выражение $F(x)+C$, т. е. совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Здесь функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*; выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*; $F(x)$ — какая-нибудь из первообразных функций $f(x)$; $C$ — произвольная постоянная.

*Геометрически* неопределенный интеграл представляет собой *совокупность* (или, как говорят, *семейство*) *всех интегральных кривых*, получаемых при непрерывном параллельном движении одной из них по направлению оси $Oy$ от $-\infty$ до $+\infty$.

Действие отыскания первообразных называется *интегрированием*. Интегрирование есть действие, *обратное* дифференцированию.

Свойства первообразной.

1. Производная от первообразной равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

2. Дифференциал первообразной равен подынтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx=f(x)dx.$$

3. Первообразная от дифференциала функции $F(x)$ равна сумме функции $F(x)$ и произвольной постоянной $C$:

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int F'(x)dx + C.$$

4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u$ - любая дифференцируемая функция от $x$.

**30.2. Основные свойства, формулы и способы интегрирования.** Основные правила интегрирования:

1. *Постоянный множитель* можно вынести за знак интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

2. *Интеграл алгебраической суммы* равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx.$$

3. *Интеграл дроби,* в которой числитель есть производная знаменателя, равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

Основные формулы интегрирования (таблица простейших интегралов):

1. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0).$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$
10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| + C.$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C_1.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1.$$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C = -\arccos \frac{x}{|a|} + C_1.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1.$$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

В частности,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Простейшие способы интегрирования:

1. *Непосредственное интегрирование.* С помощью основных правил интегрирования и тождественных преобразований подынтегральной функции данный интеграл приводят к одному или нескольким табличным.

**Пример.**

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx +$$

$$+ \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

2. *Интегрирование подстановкой (способ замены переменной).* Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt^*.$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{2x-1}dx$.

Полагаем $2x-1=z$. Дифференцируя это соотношение, находим $2dx=dz$, откуда $dx=dz/2$. Итак, имеем

---

* Здесь предполагается, что $f(x)$ — непрерывная функция, а $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx=\int \sqrt{z}\,\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}\int z^{1/2}dz=\frac{1}{2}\frac{z^{3/2}}{3/2}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{z^3}+C=\frac{1}{3}z\sqrt{z}+C=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Полагаем $x=\sin t$ (тригонометрическая подстановка), тогда $dx=\cos t\,dt$. Подставляя в данный интеграл, находим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int \cos^2 t\,dt=$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt.$$

Для вычисления второго интеграла вводим еще подстановку: $2t=z$, тогда $2dt=dz$ и второй интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\int\cos z\frac{dz}{2}=\frac{1}{4}\int\cos z\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Итак,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Для того чтобы возвратиться к старой переменной $x$, надо $t$ и $\sin 2t$ выразить через $x$, помня, что $x=\sin t$. Имеем

$$t=\arcsin x,$$

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2x\sqrt{1-x^2}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1+x^2})+C.$$

3. *Интегрирование по частям.* Общая формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

где $u$ и $v$ — некоторые функции от $x$.

**Пример 1.** Вычислить интеграл $\int x\sin x\,dx$.

Полагая $x=u$; $\sin x\,dx=dv$, находим $du$ и $v$:

$$du=dx;\ v=\int\sin x\,dx=-\cos x.$$

Теперь, воспользовавшись формулой интегрирования по частям, получим

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

Возьмем этот интеграл по частям, полагая

$$u = x, \quad dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} du = dx; \\ v = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}, \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

4. *Интегралы вида*

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx \quad (a \neq 0).$$

Интеграл

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$$

является табличным, так как в числителе стоит производная знаменателя: $(2ax+b)\,dx = d(ax^2+bx+c)$, и

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

Числитель $Mx+N$ всегда можно представить в виде

$$Mx+N = k(2ax+b) + l.$$

Тогда интеграл распадается на два:

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = k\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + l\int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

первый из которых мы только что вычислили.

Вычисление интеграла

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

производится тремя разными способами в зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена $ax^2+bx+c$:

1) $b^2-4ac<0$. Квадратный трехчлен имеет два комплексно-сопряженных корня и может быть преобразован к виду $ay^2+d$:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right) +$$

$$+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}\right) = ay^2+d,$$

где $y=x+\frac{b}{2a}$, $b=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}$.

Этот прием преобразования квадратного трехчлена называется *дополнением до полного квадрата.*

Затем интеграл сводится к табличному:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dy}{ay^2+d}=\frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2+\frac{d}{a}}$$

(интеграл 13, если $d/a>0$, и интеграл 14, если $d/a<0$; см. п. 30.2).

2) $b^2-4ac=0$. Квадратный трехчлен приводится к виду $ay^2$, так как в этом случае $d=0$, а интеграл становится табличным:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dy}{ay^2}=-\frac{1}{ay}+C=-\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+C=$$

$$=\frac{2}{2ax+b}+C.$$

3) $b^2-4ac>0$. Квадратный трехчлен разлагается на множители:

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_1$ и $x_2$ — действительные корни квадратного трехчлена.

Подынтегральная функция разлагается на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{(x_2-x_1)(x-x_1)}+\frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right).$$

Интеграл распадается на разность двух интегралов:

$$\int\frac{dx}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\int\frac{dx}{x-x_1}-\int\frac{dx}{x-x_2}\right]=$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|.$$

5. *Интеграл от алгебраической дроби.* Используя разложение алгебраической дроби на простейшие (см. п. 14.14, случай 1), можно преобразовать интеграл от алгебраической дроби $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ к сумме интегралов от простейших дробей.

**Пример 1** (см. пример в 4.14, случай 1). Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}dx.$$

Так как

$$\frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{1}{3(x-1)}-$$
$$-\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-2)},$$

то

$$\int\frac{x^2+x+2}{x^4-5x+4}\,dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-$$
$$-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{3}\left[2\ln|x+1|-\right.$$
$$\left.-\ln|x-1|-2\ln|x+2|+\ln|x-2|\right]+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}\right|+C.$$

**Пример 2** (см. п. 4.14, случай 2). Вычислить интеграл $\int\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}\,dx$.

Разлагая подынтегральную функцию на простейшие, получим

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}.$$

Интегрируя, найдем

$$\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}=\int\frac{dx}{x+1}-4\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=\ln|x+1|+\frac{4}{x+2}+C.$$

**Пример 3** (см. п. 4.14, случай 3). Вычислить интеграл $\int\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx$.

Дробь разлагается на сумму простейших

$$\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Поэтому

$$\int\frac{x^3+4x^2+6}{(x+1)^2(x^2+2)}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+3\int\frac{dx}{(x+1)^2}+$$
$$+\frac{1}{3}\int\frac{2xdx}{x^2+2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-$$
$$-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{3}\ln(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

(Интеграл от $\frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}$ разбит на два.)

**Пример 4** (см. п. 4.14, случай 4). Вычислить интеграл $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx$.

Используя разложение дроби на простейшие:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2},$$

получим

$$\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{(x-3)dx}{(1+x^2)^2}.$$

Первые два интеграла берутся легко:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|; \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Вычислим третий интеграл, разбив его на три:

$$\int \frac{(x-3)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{(1+x^2-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} - 3\int \frac{dx}{1+x^2} + 3\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{3x+1}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - C.$$

Последний интеграл берется по частям (см. с. 271). Складывая все интегралы, получим

$$\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

**30.3. Таблица неопределенных интегралов.** Интегралы от рациональных функций*

1. $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{ax+b} + \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C = \frac{1}{a}\ln|C_1(ax+b)|.$

3. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln|ax+b| + C.$

4. $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C \quad (ab>0).$

5. $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx}\right| + C \quad (ab>0).$

6. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C \quad (a \neq b).$

---

* Везде в этом пункте предполагается, что параметры удовлетворяют необходимым ограничениям для существования соответствующих математических выражений. Некоторые из таких ограничений указаны в скобках.

7. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \times \\ \times \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4}} \right| + C_1 \\ (\text{если } 4ac-b^2<0); \\ -\frac{2}{2ax+b} + C_2 \\ (\text{если } 4ac-b^2=0); \\ \\ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C_3 \\ (\text{если } 4ac-b^2>0). \end{cases}$$

8. $$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{M}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
(см. № 7).

9. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad (n \neq 1).$$ *

10. $$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx = -\frac{M}{2(n-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2aN-bM}{2a} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (n \neq 1, \text{ см. № 9}).$$

Интегралы от иррациональных функций.

11. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

12. $$\int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{(m+n)a} (ax+b)^{\frac{m+n}{n}} + C.$$

13. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C.$$

14. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{3a^2}(3Na - 2Mb + Max) \sqrt{ax+b} + C.$$

---

* К последнему интегралу следует применять эту же формулу до тех пор, пока не придем к интегралу 7. Такая формула носит название *рекуррентной.*

15. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C & (a<0); \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bc+c}| + C & (a>0). \end{cases}$$

16. $$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ (см. № 15).

17. $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ (см. № 15).

18. $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

19. $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C.$$

20. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + C.$$

21. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

22. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C.$$

23. $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C.$$

24. $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C.$$

25. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C.$$

26. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{|a|} + C.$$

27. $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln|\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}| + C.$$

28. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$

29. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$

Интегралы от тригонометрических функций (здесь $m$ и $n$ — целые положительные числа).

31. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

32. $\int \sin^2 ax\,dx = -\frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

33. $\int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx.$

34. $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right| + C.$

35. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$

36. $\int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)}\frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax}$ $(n>1).$

37. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

38. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{2}x + C.$

39. $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$

40. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

41. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$

42. $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n>1).$

43. $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+C.$

44. $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+C.$

45. $\int \frac{dx}{b+c\sin ax} =$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)\right]+C & (b^2>c^2); \\ -\frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\sin ax+\sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}\right|+C_1 & (b^2<c^2). \end{cases}$$

46. $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}+C.$

47. $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}+C.$

48. $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right]+C & (b^2>c^2); \\ \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\cos ax+\sqrt{c^2-b^2}\sin ax}{b+c\cos ax}\right|+C_1 & (b^2<c^2). \end{cases}$$

49. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C$
($m\neq n$; при $m=n$ см. № 32).

50. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+C$
($m\neq n$; при $m=n$ см. № 38).

51. $\int \sin mx \cos nx\,dx =$

$$= \begin{cases} -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C_1 & (m\neq n); \\ \frac{1}{2m}\sin^2 mx+C_2 & (m=n). \end{cases}$$

52. $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|+C.$

53. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x + C.$

54. $\int \operatorname{tg}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\,dx \quad (n>1).$

55. $\int \operatorname{ctg} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|+C.$

56. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x + C.$

57. $\int \operatorname{ctg}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\,dx \quad (n > 1).$

**Интегралы от некоторых трансцендентных функций.**

58. $\int x \sin ax\,dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + C.$

59. $\int x \cos ax\,dx = \frac{1}{a} x \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax + C.$

60. $\int x^n \sin ax\,dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\,dx.$

61. $\int x^n \cos ax\,dx = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\,dx.$

62. $\int \sin \ln |x|\,dx = \frac{x}{2}(\sin \ln |x| - \cos \ln |x|) + C.$

63. $\int \cos \ln |x|\,dx = \frac{x}{2}(\sin \ln |x| + \cos \ln |x|) + C.$

64. $\int \arcsin \frac{x}{a}\,dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

65. $\int \arccos \frac{x}{a}\,dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

66. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C.$

67. $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\,dx = x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C.$

68. $\int x \arcsin \frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad a > 0.$

69. $\int x \arccos \frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad a > 0.$

70. $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C.$

71. $\int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C.$

72. $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C.$

73. $\int \ln^n x\,dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x\,dx.$

74. $\int x^n \ln x\,dx = x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C \quad (n \neq -1).$

75. $\int \frac{\ln x\,dx}{x} = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

76. $\int \frac{\ln^n x\,dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} + C.$

77. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C.$

78. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$

79. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C.$

80. $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\,dx.$

81. $\int e^{ax}\sin(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}[a\sin(\alpha x+\beta) - \alpha\cos(\alpha x+\beta)] + C.$

82. $\int e^{ax}\cos(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}[a\cos(\alpha x+\beta) + \alpha\sin(\alpha x+\beta)] + C.$

**30.4. Определенный интеграл.** Определение. Пусть дана ограниченная функция $y=f(x)$, определенная на замкнутом интервале $[a, b]$ $(a<b)$. Разобьем интервал $[a, b]$ на $n$ частей (не обязательно равных) точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ (рис. 111). На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выбираем произвольную точку $\xi_i$. Обозначив теперь длины отрезков

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_2, \ \ldots,$$
$$\ldots, x_i - x_{i-1} = \Delta x_i, \ \ldots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n,$$

составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой*, где $f(\xi_i)$ — значение данной функции в точке $\xi_i$.

Предел интегральной суммы (если он существует и не зависит от способа разбиения и от выбора точек $\xi_i$) при условии, что наибольшая из величин $\Delta x_i$ стремится к нулю (при выполнении этого условия число $n$ точек деления будет стремиться к бесконечности), называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от $a$ до $b$:

$$\lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Число $a$ называется *нижним пределом* определенного интеграла, число $b$ — его *верхним пределом*. Интервал $[a, b]$ называется *интерва-*

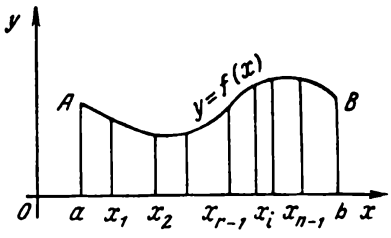



Рис. 111

*лом интегрирования*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\mathrm{d}x$ — *подынтегральным выражением*, переменная $x$ — *переменной интегрирования*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел в левой части равенства (1) существует и не зависит ни от выбора точек $x_i$ деления отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $\xi_i$.

Значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ зависит только от вида функции $f$ и от пределов интегрирования $a$ и $b$, но не зависит от обозначения переменной интегрирования, которая может быть обозначена любой буквой. Так, например,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Геометрический смысл определенного интеграла. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и внутри этого отрезка всюду неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ представляет собой в декартовой системе координат площадь *криволинейной трапеции* $aABb$ (см. рис. 111), ограниченной графиком подынтегральной функции $y=f(x)$, осью $Ox$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$. При этом $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, если $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $(a, b]$, и $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$, если $f(x)\leqslant 0$.

Вычисление определенного интеграла. Если $F(x)$ — первообразная функция от $f(x)$, т. е. если $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a), \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, надо сначала найти первообразную $F(x)$ или неопределенный интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+S$, а затем вычислить разность $F(b)-F(a)$ значений первообразной.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$

2. Перестановка пределов интеграла по определению приводит к перемене знака:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (a<b).$$

3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

4. Имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. Если $c$ постоянная, то

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

6. $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Способы интегрирования.

1. *Интегрирование подстановкой (замена переменной в определенном интеграле)*. Если $x=\varphi(t)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,$$

где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

**Пример 1.** Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$.

Полагаем $2x-1=z$. Дифференцируя это соотношение, находим $2dx=dz$, откуда $dx=dz/2$. Находим теперь новые пределы интеграла. Для этого из соотношения $2x-1=z$ определяем значения $z_1$ при $x_1=1$ и $z_2$ при $x_2=5$:

$$z_1 = 2\cdot 1 - 1 = 1;\ z_2 = 2\cdot 5 - 1 = 9.$$

Итак, имеем

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx = \int_1^9 \frac{\sqrt{z}\,dz}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_1^9 =$$

$$= \frac{9^{3/2}}{3} - \frac{1^{3/2}}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

**Пример 2.** Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Полагаем $x=\sin t$, тогда $dx=\cos t\,dt$. Находим новые пределы интеграла:

$$0=\sin t_1, \text{ откуда } t_1=0;$$

$$1=\sin t_2, \text{ откуда } t_2=\pi/2.$$

Итак, имеем

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos t\cos t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt=$$

$$=\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

В отличие от неопределенного интеграла при вычислении определенного интеграла способом замены переменной нет надобности возвращаться к первоначальной переменной.

2. *Интегрирование по частям.* Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx,$$

где $u$ и $v$ — функции от $x$.

Приложения определенного интеграла к геометрии и физике (здесь всюду рассматривается график функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$).

1. *Площадь криволинейной трапеции aABb*, органиченной графиком знакопостоянной* $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x=a$ и $x=b$ (см. рис. 103), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Площадь фигуры $ABCD$, заключенной на интервале $[a, b]$ между графиками функций $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ $(f_1(x)\geqslant f_2(x))$ (рис. 112), вычисляется так:

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

---

* Если на отрезке $[a, b]$ функция $y=f(x)$ знакопеременна, то формулу (2) следует применять отдельно к частям отрезка, где $f(x)>0$ и $f(x)<0$, а затем сложить абсолютные величины полученных интегралов.

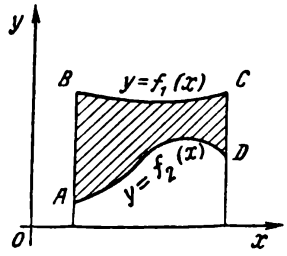



Рис. 112

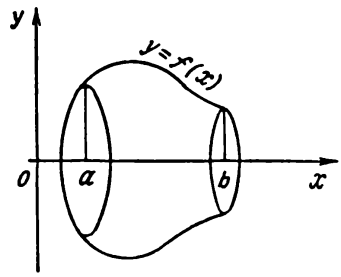



Рис. 113

2. *Длина дуги AB плоской кривой* $y=f(x)$ вычисляется по формуле

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

3. *Площадь поверхности тела вращения.* Площадь поверхности тела, образованного вращением графика функции $y=f(x)$ вокруг оси $Ox$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 113), вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Первая теорема Гюльдена. Если дуга плоской кривой длины $L$ вращается около оси, не пересекающей эту дугу и лежащей с ней в одной плоскости, то площадь поверхности тела вращения вычисляется по формуле

$$S=2\pi d\cdot L,$$

где $d$ — расстояние центра тяжести дуги от оси вращения.

4. *Объем тела вращения.* Объем тела, образованного вращением графика функции $y=f(x)$ вокруг оси $Ox$ на отрезке $[a, b]$ (см. рис. 113), вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Вторая теорема Гюльдена. Если пластинка площади $S$ вращается около оси, не пересекающей ее и лежащей с ней в одной плоскости, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=2\pi d\cdot S,$$

где $d$ — расстояние центра тяжести пластинки от оси вращения.

5. *Длина пути,* пройденного материальной точкой, движущейся со скоростью $v=f(t)$ за время от $t_1$ до $t_2$, равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

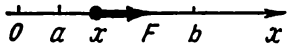



Рис. 114

6. *Работа силы.* Если материальная точка перемещается вдоль оси $Ox$ от точки $x=a$ до точки $x=b$ под действием переменной силы $F$, направленной вдоль оси $Ox$ и являющейся функцией $f(x)$, расстояния $x$ этой материальной точки от некоторой фиксированной точки $O$ оси $Ox$ (рис. 114), то работа $A$ силы $F$ на участке $[a, b]$ равна

$$A=\int_a^b F\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

7. *Статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции для дуги однородной кривой и для однородной пластинки:*

| Название | Формула | |
|---|---|---|
| | для дуги (рис. 115) | для пластинки (рис. 116) |
| *Статический момент:* | | |
| относительно оси $Ox$ | $S_x=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ | $S_x=\int_\alpha^\beta yx\,dy$* |
| относительно оси $Oy$ | $S_y=\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ | $S_y=\int_a^b xy\,dx$** |
| *Координаты центра тяжести* | $x_C=\frac{S_y}{L}$, $y_C=\frac{S_x}{L}$ ($L$ — длина дуги $AB$) | $x_C=\frac{S_y}{S}$, $y_C=\frac{S_x}{S}$ ($S$ — площадь пластинки) |
| *Момент инерции:* | | |
| относительно оси $Ox$ | $J_x=\int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ | $J_x=\int_\alpha^\beta y^2x\,dy$* |
| относительно оси $Oy$ | $J_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ | $J_y=\int_a^b x^2y\,dx$** |
| относительно начала координат | $J_0=J_x+J_y$ | $J_0=J_x+J_y$ |

* Здесь $x=\varphi(y)$ — длина сечения, параллельного оси $Ox$, проведенного на расстоянии $y$ от нее (рис. 117).

** Здесь $y=F(x)$ — длина сечения, параллельного оси $Oy$, проведенного на расстоянии $x$ от нее (см. рис. 117).

8. *Давление жидкости на вертикальную пластинку.* Давление жидкости с удельным весом $\gamma$ на погруженную в нее вертикальную пластинку вычисляется по формуле

$$F=\int_a^b xy\,dx,$$

где $y$ — длина горизонтального сечения пластинки на расстоянии $x$ от поверхности жидкости $[y=f(x)]$; $a$ — глубина самой верхней точки пластинки; $b$ — глубина самой нижней ее точки (см. рис. 116).

**30.5. Простейшие дифференциальные уравнения.** Определение и общие понятия. Обыкновенным *дифференциальным уравнением* называется уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n)=0$, связывающее между собой независимую переменную $x$, функцию $y$ и производные (или дифференциалы) различных порядков от функции $y$.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала). Например, уравнение

$$y''+y=0 \qquad (1)$$

является дифференциальным уравнением *второго порядка*, а уравнение

$$x\,dy+y\,dx=0 \qquad (2)$$

— дифференциальным уравнением *первого порядка*.

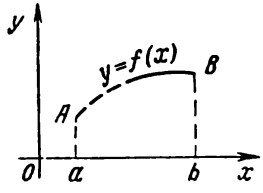



Рис. 115

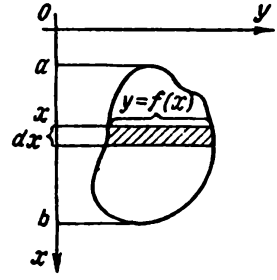



Рис. 116

Всякая функция, которая, будучи подставленной в дифференциальное уравнение вместе с ее производными вместо искомой функции и ее производных, обращает это уравнение в тождество (удовлетворяет уравнению), называется *решением* или *интегралом дифференциального уравнения*.

Чтобы определить конкретное решение дифференциального уравнения, обычно задают начальные условия, причем их количество равно порядку уравнения. Тогда соот-

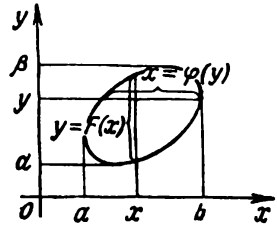



Рис. 117

ветствующая задача, например, для уравнения (1) ставится так: найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{3}$$

Решение такой задачи зависит от двух постоянных: $y_0$ и $y_0'$. В связи с этим общим решением уравнения (1) называется функция $y(x, C_1, C_2)$, зависящая от произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, обращающая (1) в тождество и удовлетворяющая (3) при соответствующим образом подобранных значениях $C_1$ и $C_2$. Например, общим решением для уравнения (1) будет

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \tag{4}$$

для которого $y'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$, и, следовательно, $y'' + y = 0$.

Если должно быть $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, то это значит, что

$$C_1 \sin x_0 + C_2 \cos x_0 = y_0;$$

$$C_1 \cos x_0 - C_2 \sin x_0 = y_0',$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1 &= y_0 \sin x_0 + y_0' \cos x_0; \\ C_2 &= y_0 \cos x_0 - y_0' \sin x_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив $C_1$ и $C_2$ из (5) в (4), получим решение, удовлетворяющее уравнению (1) и начальным условиям (3).

Так как отыскание такого решения возможно при любых заданных $y_0$ и $y_0'$, то это означает, что функция (4) есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется его решение, получающееся из общего решения при каких-нибудь определенных значениях произвольных постоянных.

Дифференциальное уравнение может, кроме частных решений, иметь и решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольных постоянных. Такие решения называются *особыми*.

Геометрический смысл. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка изображается семейством интегральных кривых, зависящих от одного параметра (см. геометрический смысл неопределенного интеграла, п. 30.1).

Простейшие типы дифференциальных уравнений первого порядка.

1. *Уравнения с разделяющимися переменными.* Уравнения, приводящиеся к виду

$$f_1(x) f_2(y) dx + \varphi_1(x) \varphi_2(y) dy = 0,$$

называются *дифференциальными уравнениями с разделяющимися пе-*

*ременными.* Решается такое уравнение методом *разделения переменных,* т. е. преобразованием его к виду

$$\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy+\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx=0.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dx+\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx=C.$$

2. *Однородные уравнения.* Уравнения, приводящиеся к виду

$$y=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

называются *однородными.* Подстановка $y=ux$, $y'=u'x+u$, где $u$ — новая неизвестная функция от $x$, сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

3. *Линейные уравнения.* Уравнения, приводящиеся к виду

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

называются *линейными.* Подстановка $y=uv$, $y'=u'v+v'u$, где $u$ и $v$ — две новые неизвестные функции от $x$, сводит решение линейного уравнения к решению двух уравнений с разделяющимися переменными. Общее решение линейного уравнения находится по формуле

$$y=e^{\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right].$$

## 31. РЯДЫ

**31.1. Числовые ряды.** Основные понятия и определения. Сходимость ряда. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots, \tag{1}$$

в котором $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$, ... (называемые членами ряда) — элементы числовой последовательности, для которых задан закон, позволяющий определить каждый из $a_n$ по его номеру $n$.

Выражение для $n$-го члена ряда (т. е. для $a_n$) при произвольном $n$ называется *общим членом* ряда.

Суммы

$$S_1=a_1;\ S_2=a_1+a_2;\ S_3=a_1+a_2+a_3;\ \ldots;\ S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

называются *частичными суммами ряда*; сумма $S_n$ (т. е. сумма $n$ первых членов ряда) называется $n$-й *частичной суммой ряда.*

Ряд называется *сходящимся*, если существует предел его $n$-й частичной суммы при $n$, стремящемся к бесконечности, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S. \tag{2}$$

Число $S$ называют *суммой ряда*:

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

Такую запись заменяют часто следующей сокращенной записью:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Разность $R_n$ между суммой ряда $S$ и его $n$-й частичной суммой $S_n$ называется *остатком* сходящегося ряда:

$$R_n=S-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}+\ldots$$

Если же предел (2) не существует, то ряд (1) называется *расходящимся*.

Примером бесконечного ряда может служить сумма членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q$:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$$

Этот ряд, как известно, сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geqslant 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна (см. п. 7.3):

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-aq^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}=0$ при $|q|<1$.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то его общий член $a_n$ при неограниченном возрастании его номера $n$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

Этот признак называется *необходимым* (см. п. 10.6). Обратное утверждение неверно, т. е. если для некоторого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, то отсюда не вытекает, что данный ряд сходится. Так, $n$-й член ряда

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

стремится к нулю при $n$, стремящемся к бесконечности. Между тем этот ряд расходится, так как

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

и, следовательно, последовательность частичных сумм предела не имеет.

Ряды с положительными членами. Признаки сходимости.

1. *Признак сравнения рядов.* Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots;$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

Если каждый член второго ряда не больше соответствующего члена первого ряда

$$b_n \leqslant a_n$$

и известно, что первый ряд сходится, то второй ряд тоже сходится.

Если же

$$b_n \geqslant a_n$$

и известно, что первый ряд расходится, то второй ряд тоже расходится.

2. *Признак Даламбера (достаточный признак сходимости).* Если при $n \to \infty$ существует предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, равный $\rho$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ ряд расходится, при $\rho = 1$ признак определенного ответа не дает: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

*Знакопеременные ряды* содержат как положительные, так и отрицательные члены. Если же каждый следующий член имеет знак, противоположный предыдущему, то ряд называется *знакочередующимся.*

**Пример.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$

3. *Признак сходимости Лейбница.* Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда убывают с возрастанием их номера $n$ и общий член $a_n$ ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд сходится, причем остаток $R_n$ ряда не превосходит по абсолютной величине первого из отбрасываемых членов.

4. *Абсолютная сходимость ряда.* Если ряд, составленный из абсолютных величин членов данного знакопеременного ряда, сходится, то сходится и данный ряд.

Знакопеременный ряд, абсолютные величины членов которого образуют сходящийся ряд, называется *абсолютно сходящимся.*

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный ряд называется *условно сходящимся.*

Конечные суммы. Суммы бесконечных числовых рядов.

*Конечные суммы*

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

4. $1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

5. $1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$,

6. $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

7. $1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

*Ряды*

1. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=2$.

2. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{2^n}+\ldots=\dfrac{2}{3}$.

3. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}+\ldots=\ln 2$.

4. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}+\ldots=\dfrac{\pi}{4}$.

5. $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}+\ldots=\dfrac{\pi^2}{6}$.

6. $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\ldots=e$.

7. $1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{n!}+\ldots=\dfrac{1}{e}$.

8. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{2}{5!}+\dfrac{3}{7!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\ldots=\dfrac{1}{2e}$.

9. $1+2^3+\dfrac{3^3}{2!}+\ldots+\dfrac{n^3}{(n-1)!}+\ldots=15e$.

**31.2. Функциональные ряды.** Определения. Ряд вида

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого являются функциями от некоторой переменной $x$, называется *функциональным рядом.*

При каком-нибудь определенном численном значении $x_0$ аргумента $x$ функциональный ряд обращается в числовой:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+u_n(x_0)+\ldots$$

При одних значениях аргумента $x$ могут получиться сходящиеся числовые ряды, а при других — расходящиеся. Совокупность всех значений аргумента $x$, при которых данный функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Сумма функционального ряда является некоторой функцией от $x$, определенной в области сходимости. Обозначение:

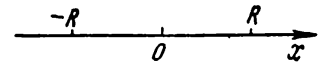



Рис. 118

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x).$$

В этом случае говорят, что данный ряд сходится к функции $f(x)$.

Степенные ряды. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_nx^n + \ldots, \qquad (1)$$

где $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$,... — постоянные коэффициенты.

Областью сходимости степенного ряда (1) всегда является некоторый интервал $(-R, R)$ с центром в точке $x=0$ (рис. 118), называемый *интервалом сходимости* степенного ряда. Число $R$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Во всех внутренних точках своего интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно. На концах же этого интервала ряд может либо сходиться, либо расходиться. Если радиус сходимости степенного ряда $R$ равен нулю, то этот ряд сходится только в одной точке $x=0$; если радиус сходимости бесконечен, то ряд сходится при всех значениях аргумента $x(-\infty < x < +\infty)$.

Разложение функций в степенные ряды. Ряд Маклорена. Функцию $y = f(x)$, непрерывную и имеющую производные всех порядков в промежутке $(-R, R)$, можно представить как сумму степенного ряда вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (2)$$

называемого *рядом Маклорена* для данной функции $f(x)$. В таком случае говорят, что функция $y=f(x)$ разложена в ряд Маклорена. В формуле (2)

$$f(0),\ f'(0), f''(0),\ f'''(0), \ldots,\ f^{(n)}(0), \ldots$$

представляют собой значения функции и ее производных при $x=0$.

**31.3. Таблица разложения некоторых функций в ряд Маклорена.**

| Функция и ее ряд Маклорена | Область сходимости ряда |
|---|---|
| $(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots$ $\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot a^{m-n}x^n + \ldots,$ | $-a \leqslant x \leqslant a$ при $m > 0$ |
| $(a-x)^m = a^m - ma^{m-1}x + \ldots +$ $+ (-1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} a^{m-n}x^n + \ldots,$ | $-a < x < a$ при $m < 0$ |

$a > 0$

| Функция и ее ряд Маклорена | Область сходимости ряда |
|---|---|
| $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \ldots + \frac{x^n \ln^n a}{n!} + \ldots,$ | $a > 0$<br>$-\infty < x < +\infty$ |
| $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots,$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots,$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots,$ | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \ldots\right],$ | $\begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 < x < \pi \end{cases}$ |
| $\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$<br>$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} + \ldots,$ | $-1 < x < 1$ |
| $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$<br>$\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots^*,$ | $-1 < x < 1$ |
| $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \ldots,$ | $-1 < x \leqslant 1$ |
| $\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right]$ | $-1 \leqslant x < 1$ |
| $\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots$<br>$\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \pm \ldots,$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| $\int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \cdots$<br>$\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) n!} \pm \cdots$ | $-\infty < x < +\infty$ |

* Формулы для разложения в ряд Маклорена функций $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ легко получить, если воспользоваться соотношениями $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

**31.4. Ряды Фурье.** *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots, \qquad (1)$$

где $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$,... — постоянные величины, называемые коэффициентами тригонометрического ряда. Тригонометрический ряд (1) короче записывают так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (1')$$

Если тригонометрический ряд (1) сходится для всех значений $x$ к некоторой функции $f(x)$, то коэффициенты этого ряда связаны с функцией $f(x)$ следующими соотношениями Эйлера—Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \ (n = 0, 1, 2, \ldots); \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Имеет большое практическое значение следующая задача: по заданной периодической функции $f(x)$ с периодом $2\pi$ найти всюду сходящийся тригонометрический ряд (1), имеющий сумму $f(x)$.

Оказывается, что для всех практически важных непрерывных функций такая задача имеет решение, причем коэффициенты искомого ряда (1) находятся по формулам (2) Эйлера—Фурье.

Тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого определяются по формулам (2), где $f(x)$ — заданная функция, называется *рядом Фурье для функции* $f(x)$.

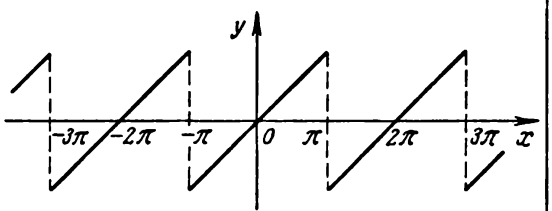
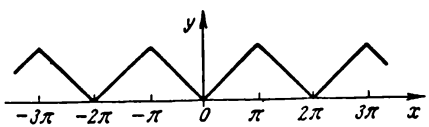
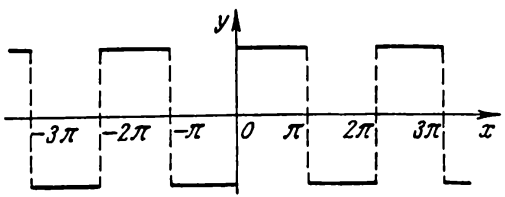
Задача, о которой шла речь, называется иначе разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье.

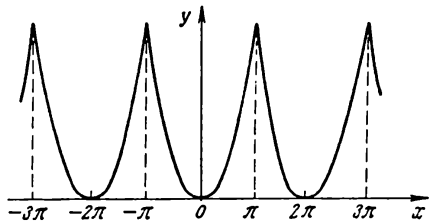
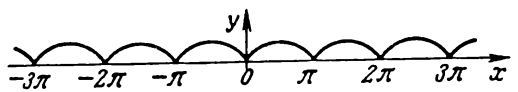
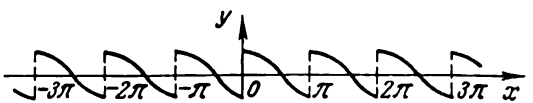
В ряд Фурье можно разложить и непериодическую функцию $f(x)$. Такой ряд будет сходиться к заданной функции $f(x)$ только на интервале $(-\pi, \pi)$. Вне этого интервала и на его концах сумма ряда будет отличаться от соответствующего значения самой функции $f(x)$.

Достаточное условие разложения функции в ряд Фурье. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем конечное число экстремумов, то ряд Фурье для этой функции сходится всюду, причем для любого значения $x$ внутри отрезка $[-\pi, \pi]$ его сумма равна $f(x)$, на концах же этого отрезка его сумма равна

$$\frac{1}{2} [f(-\pi) + f(\pi)],$$

## Разложение некоторых функций в ряд Фурье

| Функция | Разложение в ряд Фурье | Интервал сходимости ряда к данной функции | График суммы ряда Фурье |
|---|---|---|---|
| $y=x$ | $2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right)$ | $-\pi<x<\pi$ |   |
| $y=x$ | $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$ | $0<x<\pi$ |   |
| $y=a$ | $\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$ | $0<x<\pi$ |   |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y=x^2$ | $\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$ | $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ |   |
| $y=\sin x$ | $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$ | $0\leqslant x\leqslant\pi$ |   |
| $y=\cos x$ | $\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{3\sin 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$ | $0\leqslant x\leqslant\pi$ |   |

т. е. среднему арифметическому значений $f(-\pi)$ и $f(\pi)$.

Ряд Фурье для четной и нечетной функций. Для четной (см. п. 27.6) функции $f(x)$ коэффициенты Эйлера — Фурье равны

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos n x\,\mathrm{d}x,\quad b_n = 0;$$

для нечетной же функции $f(x)$

$$a_n = 0;\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin n x\,\mathrm{d}x.$$

Если функция $f(x)$ задана лишь на интервале $(0, \pi)$, то ее можно разложить в ряд Фурье либо только по косинусам, если доопределить эту функцию на интервале $(-\pi, 0)$ как четную, либо только по синусам, если доопределить ее на интервале $(-\pi, 0)$ как нечетную.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

# VIII. МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

## 32. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

**32.1. Определение.** При вычислениях пользуются не только точными, но и приближенными числами, отличающимися от первых погрешностями (ошибками), основными источниками которых являются:

1) погрешности округлений чисел (см. п. 32.4), используемых в вычислениях: для уменьшения такой погрешности промежуточные результаты записывают с дополнительными знаками;

2) погрешности исходных данных, например результатов измерений или используемых коэффициентов, постоянных величин и др.;

3) погрешности формул, так как многие из них сами являются приближенными, например получаемые в результате разложения функции в ряд с ограниченным числом членов;

4) погрешности от перевода чисел из одной системы счисления в другую, например при замене простых дробей десятичными.

Пусть $A$ — точное значение некоторой величины. Число $a$ называется *приближенным значением* $A$ с ошибкой $|\Delta|$, если $A - a = \Delta$. Если $\Delta > 0$, то $a$ — приближенное значение $A$ с *недостатком*; если $\Delta < 0$, то $a$ — приближенное значение $A$ *с избытком*. Например, если $A = 1{,}317$, то $a = 1{,}31$ — приближенное значение $A$ с недостатком, а $a = 1{,}32$ — приближенное значение $A$ с избытком.

*Абсолютной погрешностью* данного приближенного числа $a$ называется абсолютная величина разности между точным числом $A$ и его приближенным значением, т. е.

$$\Delta = |A - a|.$$

То обстоятельство, что $a$ есть приближенное значение $A$, кратко записывают так: $a \approx A$; например $\pi \approx 3{,}14$ или $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70998$.

*Примечание.* Если $A$ неизвестно, но известна граница $\delta$, за которую безусловно не выходит $|\Delta|$, т. е. $|\Delta| \leqslant \delta$, то в этом случае $\delta$ называется *абсолютной погрешностью* приближенного значения $a$, т. е.

$$|A - a| \leqslant \delta, \text{ или } -\delta \leqslant A - a \leqslant \delta \ (\delta > 0).$$

*Относительной погрешностью* $\varepsilon$ называется отношение абсолютной погрешности $\Delta$ к приближенному значению $a$, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a}.$$

Относительной погрешностью пользуются для характеристики точности приближений (например, результата измерений или вычислений), ее число вычисляют в процентах или в промилях; она является отвлеченным (безразмерным) числом. Чем меньше относительная ошибка, тем точнее приближенный результат. Например:

$$\text{для } \pi = 3{,}14\ldots \ \varepsilon = \frac{0{,}00159}{3{,}14} \approx \frac{1}{1970} \text{ или } 0{,}056\%,$$

$$\text{для } \pi = 3{,}142\ldots \ \varepsilon = \frac{0{,}00041}{3{,}142} \approx \frac{1}{7660}, \text{ или } 0{,}013\%.$$

**32.2. Значащие цифры и верные знаки.** *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, за исключением нулей, стоящих впереди первой цифры, отличной от нуля, и тех нулей справа, которые заменяют отброшенные или неизвестные цифры.

Например, число 3,141 имеет четыре значащих цифры; число 0,00217 имеет три значащих цифры; первая из них 2.

Нули, стоящие впереди, позволяют определять разряд первой, отличной от нуля цифры в данном числе.

Каждое число характеризуется своим порядком. *Порядком числа, равного или большего единицы,* называют число цифр, стоящих в его целой части, а *порядком числа, меньшего единицы,* называют число нулей, стоящих после запятой до его первой значащей цифры: такой порядок считают отрицательным. Например:

| | | | |
|---|---|---|---|
| для числа | 467,39 | порядок равен | 3 |
| » | 1,07 | » » | 1 |
| » | 0,64 | » » | 0 |
| » | 0,00810 | » » | —2 |

Число десятичных знаков в приближенном числе характеризует его абсолютную точность, а число значащих цифр — его относительную точность.

Если абсолютная погрешность десятичного числа $a$ равна единице разряда, который занимает $n$-я значащая цифра, то это значит, что $a$ имеет $n$ *верных знаков* (цифр). Например: если число 0,0817 —

приближенное значение $A$ с точностью до 0,0001, то оно имеет три верных знака.

В записи приближенного числа с помощью десятичной дроби оставляют только верные знаки. В этом случае по виду записи можно сразу определить точность приближения. Например, если дано число 4,796, то приближенным значением с точностью до 0,01 будет 4,80 (но ни в коем случае не 4,8).

Если написано число $7{,}6 \cdot 10^3$, то погрешность его равна $0{,}1 \cdot 10^3 = 100$; если же дано число $76{,}0 \cdot 10^2$, то погрешность равна $0{,}1 \cdot 10^2 = 10$; если, наконец, дано число 7600, погрешность равна 1.

**32.3. Оценка точности приближенных чисел.** Точность приближенного числа $a$ можно оценить:

1) вычислением границ — чисел, между которыми содержится данное число $a$, т. е.

$$l_1 < a < l_2.$$

Здесь число $l_1$ — низшая граница $a$; число $l_2$ — высшая его граница.

2) числом верных цифр;

3) вычислением предельной абсолютной и предельной относительной ошибок числа $a$;

4) средней квадратичной ошибкой числа $a$ (см. с. 308).

**32.4. Округление чисел.** *Округлением* числа до $n$ знаков является сохранение в этом числе первых $n$ значащих цифр.

*Простое округление* заключается в том, что при округлении чисел во всех случаях в них отбрасывают справа от $n$-й цифры ненужные разряды цифр без изменения оставляемой $n$-й цифры в округленном числе. Например, числа 18,964 и 0,8958 после округления их соответственно до четырех и трех значащих цифр будут 18,96 и 0,895.

При *механическом округлении* во всех случаях отбрасывают в округленном числе справа от $n$-й цифры ненужные разряды цифр, увеличивая при этом $n$-ю цифру в числе на единицу. Например: числа 18,964 и 0,8958 после округления их соответственно до четырех и трех значащих цифр будут 18,97 и 0,896.

Для уменьшения погрешности округления пользуются *округлением с поправкой* или *по дополнению*. При этом способе округления числа в нем отбрасывают все цифры, стоящие справа от $n$-й цифры, оставляя последнюю без изменения, если следующая за ней цифра меньше 5, и увеличивая $n$-ю цифру на 1, если следующая за ней цифра больше 5. Например, число 131,29 853 после округления его до шести и пяти значащих цифр соответственно будет 131,299 или 131,30, а число 87,8242 после округления его до пяти и четырех значащих цифр будет 87,824 или 87,82.

*Примечание.* Если в *точном числе* последней цифрой является цифра пять (5), то предшествующая ей цифра увеличивается на единицу только в том случае, когда она нечетная. Например, точные

числа 35,965 и 49,875 после округления до 0,01 соответственно будут 35,96 и 49,88.

**32.5. Правила действий с приближенными числами.**

1. Сложение. Для того чтобы при сложении приближенных чисел получить сумму с $n$ верными десятичными знаками, нужно каждое слагаемое округлить до $(n+1)$-го десятичного знака.

2. Вычитание. В случае, когда уменьшаемое значительно превосходит вычитаемое, к числу верных знаков разности применяют те же правила, что и для числа верных знаков суммы.

В случае вычитания близких чисел может быть потеря точности. Поэтому следует избегать действия вычитания близких чисел. Часто в таких случаях удобно использовать дифференциал функции (см. п. 29.4).

При сложении или вычитании приближенных чисел в результате (в сумме или разности) необходимо оставлять столько десятичных знаков, сколько их дано в компоненте с наименьшим числом этих знаков. Например:

$$233{,}78 + 52{,}308 + 3{,}9313 \approx 233{,}78 + 52{,}31 + 3{,}93 = 290{,}02;$$

$$2529{,}37 - 2{,}1462 \approx 2529{,}37 - 2{,}15 = 2527{,}22.$$

3. Умножение. При умножении двух приближенных чисел, имеющих поровну значащих цифр, в произведении следует сохранить столько значащих цифр, сколько их было в каждом из сомножителей. Например:

$$95{,}6 \cdot 21{,}8 = 2084{,}08 \approx 20{,}8 \cdot 10^2.$$

При умножении приближенных чисел с равным числом значащих цифр в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет менее точное данное, причем менее точным считается то число, у которого меньше значащих цифр. Например:

$$2{,}143 \cdot 0{,}45 = 0{,}96435 \approx 0{,}96.$$

Для получения произведения с $n$ верными знаками необходимо сомножители взять с $n+1$ или $n+2$ верными знаками.

*Правило для вычисления произведения с n верными знаками способом сокращенного умножения:*

1) Сомножители округляют до $n+2$ верных знаков.

2) Под множимым подписывают написанный в обратном порядке множитель так, чтобы его последняя цифра находилась под $(n+2)$-й цифрой множимого.

3) Каждую цифру множителя умножают на часть множимого от первой его цифры до той (включительно), которая находится под соответствующей цифрой множителя, и т. д. Все полученные таким способом частные произведения пишут в виде столбца так, чтобы последние цифры их находились на одной вертикали, и складывают:

в полученном результате будут верны по меньшей мере первые $n$ значащих цифр.

4) Если произведение первых значащих цифр сомножителей больше десяти, то сомножители можно взять с $n+1$ знаками.

5) При выполнении указанных выше операций запятых в сомножителях не ставят, а место запятой в произведении определяют перемножением в уме грубо округленных сомножителей.

**Пример.** Вычислим произведение $x = 2{,}5284 \cdot 64{,}38$ с тремя верными знаками, так как наименьшее количество верных знаков в сомножителях равно четырем. Округлим множимое до четырех знаков и подпишем под ним цифры множителя в обратном порядке:

$$\begin{array}{r} 2528 \\ 8346 \\ \hline 15168 \\ +\ 1008 \\ 75 \\ 16 \\ \hline 162{,}67 \end{array}$$

Нахождение произведений:

1) $2528 \times 6 = 15\,168$;

2) $252 \times 4 = 1008$;
$25 \times 3 = 75$;
$2 \times 8 = 16$.

Итак, $2{,}5284 \times 64{,}38 \approx 163$.

4. Деление. При делении двух приближенных чисел, имеющих одинаковое число значащих цифр, в частном сохраняют столько значащих цифр, сколько их в каждом из данных. Например:

$$2{,}667 : 3{,}143 = 0{,}848552 \ldots \approx 0{,}8486.$$

При делении двух приближенных чисел, имеющих различное количество значащих цифр, в частном сохраняют столько значащих цифр, сколько их в менее точном данном, причем менее точным считается число, имеющее меньше значащих цифр. Например:

$$654{,}8 : 2{,}6 = 251{,}8 \approx 2{,}5 \cdot 10^2.$$

5. Возведение в степень. При возведении приближенных чисел в квадрат и в куб в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет основание степени; однако при этом последняя цифра и особенно при возведении в куб будет все же менее надежна, чем последняя цифра основания. Например:

$$14{,}81^2 \approx 219{,}3; \quad 1{,}27^3 \approx 2{,}05.$$

6. Извлечение корня. При извлечении квадратного или кубического корня из приближенного числа в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеет подкоренное число; при этом последняя цифра квадратного и особенно кубического корня будет получаться более надежной, чем последняя цифра подкоренного числа Например:

$$\sqrt{40{,}5} \approx 6{,}36; \quad \sqrt[3]{180{,}9} \approx 5{,}656.$$

7. Логарифмирование. Вычисления однозначных выражений с помощью логарифмов следует производить по таблицам логарифмов с числом десятичных знаков на один больше наименьшего числа значащих цифр, содержащихся в приближенном данном. В окончательном результате последнюю значащую цифру отбрасывают.

По данному логарифму, содержащему $n$ верных знаков в мантиссе (погрешность ее не превышает 0,5 единиц $n$-го знака), можно найти число, в котором будет не более $n$ верных цифр.

*Примечания:* 1. Если для вычисления искомой величины требуется произвести ряд разных действий, то в этом случае во всех промежуточных результатах следует сохранять лишь на одну цифру больше, чем это указано в правилах 1—5, отбрасывая эту лишнюю цифру только в окончательном результате.

2. Если некоторые величины, участвующие в вычислении, имеют десятичных знаков (при сложении и вычитании) или значащих цифр (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня) больше, чем другие, то их предварительно округляют (по способу с поправкой), сохраняя лишь одну лишнюю цифру против числа, заданного с наименьшим числом значащих цифр.

3. Для получения результата с $n$ цифрами исходные данные для вычисления следует брать с таким числом цифр, какое согласно правилам 3—6 дают $n+1$ цифр результата.

**32.6. Приближенные формулы.** Ниже приведены некоторые приближенные формулы с указанием наибольших значений переменных $h$, при которых можно получать результаты вычислений с $n$ верными десятичными знаками.

| Формулы | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|---|---|---|---|
| $(1+h)^2 \approx 1+2h$ | 0,07 | 0,022 | 0,007 |
| $(1+h)^3 \approx 1+3h$ | 0,04 | 0,012 | 0,004 |
| $\frac{1}{1+h} \approx 1-h$ | 0,06 | 0,022 | 0,007 |
| $\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h$ | 0,19 | 0,063 | 0,020 |
| $\sqrt[3]{1+h} \approx 1+\frac{1}{3}h$ | 0,20 | 0,068 | 0,021 |
| $\lg(1+h) \approx 0{,}4343h$ | 0,14 | 0,047 | 0,015 |
| $\lg\frac{1+h}{1-h} \approx 0{,}869h$ | 0,25 | 0,119 | 0,055 |
| $\ln\frac{1+h}{1-h} \approx 2h$ | 0,19 | 0,090 | 0,042 |
| $10^h \approx 1+2{,}30h$ | 0,04 | 0,014 | 0,004 |

| Формулы | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ |
|---|---|---|---|
| $e^h \approx 1+h$ | 0,09 | 0,031 | 0,010 |
| $\sin h \approx h$ | 17° | 8°15′ | 3°50′ |
| $\sin h \approx h-\frac{1}{6}h^3$ | 51° | 32° | 20° |
| $\cos h \approx 1$ | 5°43′ | 1°48′ | 0°34′ |
| $\cos h \approx 1-\frac{1}{2}h^2$ | 33° | 18° | 10° |
| $\operatorname{tg} h \approx h$ | 14° | 6°25′ | 3°02′ |
| $\operatorname{tg} h \approx h+\frac{1}{3}h^3$ | 20° | 18° | 11° |

В ряде случаев для малых значений $h$, $q$ и $z$ можно пользоваться следующими сокращенными формулами:

$$(1+h)^n \approx 1+nh;$$

$$(1+h)(1\pm q)\approx 1+h\pm q;$$

$$(1+h)(1\pm q)(1+z)\approx 1+h\pm q+z;$$

$$\frac{1}{1+h}\approx 1\mp h;$$

$$\frac{1+h}{1+q}\approx 1+h-q;$$

$$(a\pm h)^n \approx a^n \pm na^{n-1}h;$$

$$\frac{a}{1\pm h}\approx a\mp ah;$$

$$\operatorname{ctg} h\approx 1:h;$$

$$\sqrt{a^2+h}\approx a+\frac{h}{2a};$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+h}}\approx \frac{1}{a}-\frac{h}{2a^3};$$

$$\frac{1}{a+h}\approx \frac{1}{a}-\frac{h}{a^2}.$$

Если угол $\alpha$ мал и $\alpha<\varphi<\pi/2$, то

$$\sin(\varphi \pm \alpha) \approx \sin\varphi \pm \alpha\cos\varphi;$$

$$\cos(\varphi \pm \alpha) \approx \cos\varphi \mp \alpha\sin\varphi;$$

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm \alpha) \approx \operatorname{tg}\varphi \pm \frac{\alpha}{\cos^2\varphi}.$$

Вычисление тригонометрических функций малых углов можно производить по приближенным формулам, используя степенные ряды:

$$\sin\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \ldots; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{45} - \cdots\right);$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \cdots; \quad \sec\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \cdots;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \cdots; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{7\alpha^4}{360} + \cdots\right.$$

Здесь $\alpha$ — значение угла, выраженного в радианах; углы, выраженные в градусной мере, должны предварительно быть переведены в радианы.

## 33. ОШИБКИ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

**33.1. Методы и ошибки измерений.** Измерения бывают *непосредственные* и *косвенные*.

*Непосредственными* называют такие методы измерения, при которых определяемые величины получают в результате непосредственного сравнения их с единицей измерений, например измерение отрезков линий рулеткой.

*Косвенными* называют такие методы измерения, при которых определяемые величины получают как функции других непосредственно измеренных величин, например сторону треугольника получают по измеренным другой стороне и двум углам треугольника.

Измерения подразделяют также на *равноточные*, когда одну и ту же величину многократно измеряют при одинаковых условиях, и *неравноточные*, когда одну и ту же величину многократно измеряют при различных условиях (такие результаты нельзя считать одинаково надежными).

Если $x$ — истинное значение; $l$ — результат измерения, то

$$|x - l| = \Delta$$

будет *абсолютной* (истинной) ошибкой измерения. Ошибки измерений по своему характеру и свойствам бывают *грубые, систематические* и *случайные*.

*Грубыми ошибками* (промахами) называют такие уклонения результатов измерений от точного значения, которые совершенно недопустимы для данных условий измерений (инструмента и метода работ).

*Систематическими* называют ошибки, входящие в результаты измерения по определенному закону.

*Случайными* называют ошибки, для которых неизвестен закон их появления в каждом конкретном случае.

Случайные ошибки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ многократных равноточных измерений одной и той же величины обладают следующими свойствами:

1. Ошибки по абсолютному значению не могут превышать известного предела (свойство ограниченности).

2. Меньшие по абсолютному значению ошибки появляются чаще больших (свойство унимодальности).

3. Положительные и отрицательные ошибки, равные по абсолютному значению, одинаково возможны (свойство симметричности).

4. Среднее арифметическое из всех случайных ошибок ряда равноточных измерений стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_1+\Delta_2+\ldots.+\Delta_n}{n}=0$$

(свойство компенсации).

**33.2. Среднее арифметическое (арифметическая середина).** Если $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений одной и той же величины, истинное значение которой $x$, то

$$L=\frac{l_1+l_2+\ldots+l_n}{n}=\frac{[l]}{n}$$

есть *арифметическая середина,* т. е. среднее арифметическое данных величин; $[l]$ — сумма однородных величин.

Так как $\Delta_1 = x - l_1$, $\Delta_2 = x - l_2, \ldots, \Delta_n = x - l_n$, то

$$x=\frac{[l]}{n}+\frac{[\Delta]}{n}.$$

Разности

$$l_1 - L = v_1, \quad l_2 - L = v_2, \ldots, l_n - L = v_n$$

называют *поправками к результатам измерений* или *уклонениями* от арифметической середины:

$$nL - [l] = [v]; \quad [v] = 0.$$

**Пример.** $l_1 = 184{,}05$, $l_2 = 184{,}17$, $l_3 = 183{,}96$.

$$L = 180 + \frac{4{,}05 + 4{,}17 + 3{,}96}{2} = 184{,}06,$$

или

$$L = 183 + \frac{1{,}05 + 1{,}17 + 0{,}96}{3} = 184{,}06,$$

$$[v] = -0{,}01 + 0{,}11 - 0{,}10 = 0$$

**33.3. Оценка точности результатов непосредственных измерений.** Для оценки точности результатов многократных непосредственных измерений одной и той же величины пользуются различными способами.

Обозначения.

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — истинные ошибки непосредственных измерений;

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ — поправки к результатам измерений (разности между результатами непосредственных измерений и средними арифметическими);

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты равноточных измерений;

$L = [l]/n$ — среднее арифметическое;

$l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ — результаты неравноточных измерений;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ — их вес (степень доверия к результату измерения, выраженная числом, называется весом этого результата);

$д_1, д_2, \ldots, д_n$ — разности двойных измерений, свободные от систематических ошибок.

Равноточные измерения.

$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$,

или $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ — средняя квадратичная ошибка отдельного измерения;

$\nu = \frac{[|\Delta|]}{n}$

при $n \to \infty$ $\nu = \frac{4}{5} m$ — средняя ошибка;

$\rho = 0{,}6745m$ — вероятная ошибка;

$\Delta_{\lim} = 3m$ или $\Delta_{\lim} = 2m$ — предельная ошибка измерения;

$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ — средняя квадратичная ошибка арифметической середины

*Средняя квадратичная ошибка арифметической середины равноточных измерений в $\sqrt{n}$ раз меньше средней квадратичной ошибки отдельного измерения.*

**Пример.** Результаты 4-кратного измерения рулеткой расстояния между точками $A$ и $B$ помещены в таблице. Определить $L$, $m$, $M$ и $\Delta_{\lim}$.

| Измерения | Результаты измерения $l$, м | $v = l - L$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 317,81 | —0,01 | 0,0001 |
| 2 | 317,75 | —0,07 | 0,0049 |
| 3 | 317,87 | +0,05 | 0,0025 |
| 4 | 317,85 | +0,03 | 0,0009 |
| $n = 4$ | $L = 317{,}82$ | $[v] = 0$ | $[v^2] = 0{,}0084$ |

$$L = 317 + \frac{0{,}81 + 0{,}75 + 0{,}87 + 0{,}85}{4} \text{ м} = 317{,}82 \text{ м};$$

$$m = \sqrt{\frac{0{,}0084}{3}} \text{ м} \approx \pm 0{,}05 \text{ м}; \quad M = \frac{0{,}05}{\sqrt{4}} \text{ м} \approx \pm 0{,}03 \text{ м};$$

$$\Delta_{\lim} = \pm 0{,}15 \text{ м}.$$

Если одна и та же величина измерена дважды и получен ряд двойных равноточных измерений

$$l'_1 \text{ и } l''_1,\ l'_2 \text{ и } l''_2,\ \ldots,\ l'_n \text{ и } l''_n,$$

где $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$ — результаты первых измерений; $l''_1, l''_2, \ldots, l''_n$ — результаты вторых измерений, то

$$m = \sqrt{\frac{[\partial^2]}{2n}},$$

где $\partial_1 = l'_1 - l''_1$, $\partial_2 = l'_2 - l''_2$, ..., $\partial_n = l'_n - l''_n$ при $n \to \infty$ $[\partial] = 0$.

**Пример.** Каждый из трех отрезков измеряли дважды; в прямом и обратном направлениях (см. таблицу); определить $m$.

| Отрезки | Результаты измерений, м | | $\partial$, см | $\partial^2$, см$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| | прямо | обратно | | |
| 1 | 127,64 | 127,59 | +5 | 25 |
| 2 | 93,89 | 93,95 | —6 | 36 |
| 3 | 141,17 | 141,14 | +3 | 9 |
| $n = 3$ | | | $[\partial] = +2$ | $[\partial^2] = 70$ |

$$m = \sqrt{\frac{70}{6}} \text{ см} \approx \pm 3 \text{ см}.$$

Если в разностях двойных измерений содержатся не только случайные, но и систематические ошибки $\Delta\partial$, то в этом случае

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{2(n-1)}},$$

где $v_1 = \partial_1 - \Delta\partial$, $v_2 = \partial_2 - \Delta\partial$, ..., $v_n = \partial_n - \Delta\partial$, $\Delta\partial = [\partial]/n$.

**Пример.** Результаты двукратного измерения каждого из трех углов показаны ниже в таблице; определить $m$.

| Углы | Результаты измерений | | $\partial$ | $v$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $l'$ | $l''$ | | | |
| 1 | 84°43′19″ | 84°43′23″ | −4″ | −1″ | 1″ |
| 2 | 64°54′45″ | 64°54′48″ | −3″ | 0 | 0 |
| 3 | 78°29′43″ | 78°29′45″ | −2″ | +1″ | 1″ |
| $n = 3$ | | | $[\partial] = -9$ | $[v] = 0$ | $[v^2] = 2$ |

$$\Delta\partial = \frac{-9''}{3} = -3''; \quad m = \sqrt{\frac{2''}{2(3-1)}} \approx \pm 0'',7.$$

Неравноточные измерения. Степень доверия к результату, выраженному числом, называют *весом* этого результата. В частности, за вес может быть принято число измерений одной и той же величины.

$L_0 = \frac{[l'p]}{[p]}$ — вероятнейшее значение измеряемой величины (общая арифметическая середина);

$\mu = \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$ — средняя квадратичная ошибка единицы веса;

$p = \frac{\mu^2}{m^2}$ (если $\mu = 1$, то $p = \frac{1}{m^2}$) — зависимость между весом и средней квадратичной ошибкой результата измерений;

$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}}$ — средняя квадратичная ошибка вероятнейшего значения (средней арифметической величины);

$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}}$ — средняя квадратичная ошибка единицы веса из ряда двойных неравноточных измерений.

**Пример.** Средние результаты измерения угла $L$ плоского треугольника и их веса приведены ниже в таблице; определить $L_0$, $\mu$ и $M_0$.

| Группы измерений | Средние значения | Вес группы, $p$ | $v_0$ | $pv_0$ | $pv_0^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 83°19′41″ | 4 | −1 | −4 | 4 |
| 2 | 83°19′35″ | 2 | +5 | +10 | 50 |
| 3 | 83°19′42″ | 3 | −2 | −6 | 12 |
| $L_0 = 83°19'40''$ | | $[p] = 9$ | | 0 | $[pv_0^2] = 66$ |

$$L_0 = 83°19'30'' + \frac{11'' \cdot 4 + 5'' \cdot 2 + 12'' \cdot 3}{4 + 2 + 3} = 83°19'40'';$$

$$\mu = \sqrt{\frac{66''}{3 - 1}} \approx +5'',7; \quad M_0 = \frac{5'',7}{\sqrt{9}} \approx \pm 1'',9.$$

**33.4. Ошибки функций измеренных величин.** Результаты действий над приближенными числами являются также приближенными. Приближенные числа получаются и в результате действий над точными числами, за исключением лишь сложений, вычитаний и некоторых случаев умножения и возведения в степень.

Обозначения.

$l_1, l_2, \ldots, l_n$ — результаты однородных непосредственных измерений;
$\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ — их случайные абсолютные ошибки;
$L$ — функция;
$\Delta L$ — случайная абсолютная ошибка функции;
$\varepsilon$ — относительная ошибка функции;
$k_1, k_2, \ldots, k_n$ — постоянные (коэффициенты);
$m_1, m_2, \ldots, m_n$ — средние квадратичные ошибки результатов из многократных равноточных измерений;
$m_z$ — средняя квадратичная ошибка функции.

| Функции | Ошибки функций |
|---|---|
| $L = l_1 \pm l_2 \pm \ldots \pm l_n$ | $\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n$<br>$\varepsilon$ равна наибольшей из относительных ошибок слагаемых<br>$m_z = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}$.<br>При $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$<br>$m_z = m\sqrt{n}$ |
| $L = kl$ | $\Delta L = k\Delta l; \ \varepsilon = k\frac{\Delta l}{l}; \ m_z = km$ |
| $L = k_1 l_1 \pm k_2 l_2 \pm \pm \ldots \pm k_n l_n$ | $\Delta l = k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 + \ldots + k_n \Delta l_n;$<br>$m_z = \sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \ldots + k_n^2 m_n^2}.$ |

*Продолжение*

| Функции | Ошибки функций |
|---|---|
| | При $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = k$ и $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$ $m_z = km\sqrt{n}$ |
| $L = l_1 l_2 \ldots l_n$ | $\Delta L = l_2 l_3 \ldots l_n \Delta l_1 + l_1 l_3 \ldots l_n \Delta l_2 + \ldots + l_1 l_2 \ldots l_{n-2} l_{n-1} \Delta l_n = L \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\Delta l_i}{l_i} \right\|$; $\varepsilon = \left\| \frac{\Delta l_1}{l_1} \right\| + \left\| \frac{\Delta l_2}{l_2} \right\| + \cdots + \left\| \frac{\Delta l_n}{l_n} \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\Delta l_i}{l_i} \right\|$; $m_z = L \sqrt{\frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} + \ldots + \frac{m_n^2}{l_n^2}}$ |
| $L = \frac{l_1}{l_2}$ | $\Delta L \approx L\left(\frac{\Delta l_1}{l_1} - \frac{\Delta l_2}{l_2}\right)$; $\varepsilon = \left\|\frac{\Delta l_1}{l_1}\right\| + \left\|\frac{\Delta l_2}{l_2}\right\|$; $m_z = \frac{1}{l_2}\sqrt{m_1^2 + (Lm_2)^2}$ |
| $l = \frac{k}{l}$ | $\Delta L = -\frac{k\,\Delta l}{l^2}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ |
| $l = \frac{1}{k}$ | $\Delta L = -\frac{\Delta l}{k}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ |
| $L = l^n$ ($n$ — точное число) | $\Delta L = Ln\frac{\Delta l}{l}$; $\varepsilon = n\frac{\Delta l}{l}$; $m_z = n\,l^{n-1}\,m^2$ |
| $L = \sqrt[n]{l}$ | $\Delta L = L\frac{\Delta l}{nl}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{nl}$ |
| $L = \lg l$ | $\Delta L = M\frac{\Delta l}{l}$ $(M = 0{,}43429\ldots)$; $m_z = \frac{M}{l}m$ |
| $L = f(l_1, \ldots, l_n)$ | $\Delta L = \frac{\partial f}{\partial l_1}\Delta l_1 + \frac{\partial f}{\partial l_2}\Delta l_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial l_n}\Delta l_n$; $m_z \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}m_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}m_n\right)^2}$ |

**Примеры. 1.** Найти число верных знаков в выражении $(0{,}3862)^4$. Поскольку относительная ошибка данного числа равна

$$0{,}00005 : 0{,}3862 < 0{,}00013,$$

то относительная ошибка степени меньше, чем

$$4 \cdot 0{,}00013 = 0{,}00052.$$

Следовательно, требуемое число с пятью знаками будет

$$(0{,}3862)^4 \approx 0{,}022246;$$
$$\Delta L = 0{,}022246 \cdot 0{,}00052 \approx 0{,}000012.$$

Эта ошибка уменьшает четвертую цифру результата, поэтому получим

$$(0{,}3862)^4 \approx 0{,}02225,$$

причем последняя цифра может быть не верна на единицу.

**2.** Отрезок $L = MN$ измерен по частям: отрезок $l_1 = MP$ с ошибкой $m_1 = 0{,}09$ м и отрезок $l_2 = PN$ с ошибкой $m_2 = 0{,}17$. Определить $m_z$:

$$m_z = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{0{,}09^2 + 0{,}17^2}\ \text{м} \approx \pm 0{,}20\ \text{м}.$$

**3.** Каждый из трех углов измерен с ошибкой $m_1 = 15''$. Определить $m_z$ — ошибку суммы трех углов:

$$m_z = m\sqrt{n} = \pm 15''\sqrt{3}.$$

**4.** Принимая скорость движения Земли вокруг Солнца равной 30 км/с, определенную с $\Delta l = \pm 0{,}1$ км, вычислить путь $l$, который пройдет Земля за один час, и $\Delta L$:

$$L = 3600\ \text{с} \cdot 30\ \text{км/с} = 108\,000\ \text{км};$$
$$\Delta L = k\Delta l = 3\,600\ \text{с} \cdot 0{,}1\ \text{км/с} = 360\ \text{км}.$$

## 34. СПОСОБЫ И СРЕДСТВА ВЫЧИСЛЕНИЙ

**34.1. Формула, алгоритм, схема.** *Формула* показывает, какие действия следует произвести над данными числами для получения значения определенной величины. Практические вычисления производят главным образом по некоторой формуле.

Каждая формула перед ее использованием должна быть преобразована так, чтобы при данных средствах вычислений (см. п. 34.3) определение искомой величины выполнялось с минимальной затратой времени и по возможности без записи промежуточных результатов.

*Алгоритм* — последовательность действий, ведущих к решению задач данного класса.

*Схема.* Числовой материал, используемый при вычислениях, следует располагать в определенной последовательности. Для этой цели

при массовых вычислениях одних и тех же величин пользуются специально разрабатываемыми схемами (бланками, формулярами с соответствующей разграфкой), позволяющими каждое участвующее в вычислении число разместить в отведенном для него месте. В заголовке схем часто приводят формулы, для которых они составлены.

Каждая схема должна: 1) определять последовательность вычислений, исключая всякие лишние действия; 2) обеспечивать контроль вычислений в процессе выполнения и при полном окончании его; 3) быть по возможности стандартной.

**34.2. Выражение углов в разных мерах.** Углы на плоскости измеряют в градусной мере (см. п. 11.2), радианной (см. п. 11.3), а также в градовой и часовой мерах.

Градовая мера углов.

Град ($g$) — 1/400 часть полного оборота.

Градовая (метрическая) минута (') — 1/100 часть града.

Градовая (метрическая) секунда ('') — 1/10 000 часть града, 1/100 часть метрической минуты.

Полный оборот составляет $400^g$.

Запись $87^g45'38'' = 87^g45'38''$ означает 87 град 45 градовых минут 38 градовых секунд.

$$1^g = 54',\ 1' = 32'',4\ \ 1'' = 0'',324;$$

$$1^g = \frac{\pi}{200}\ \text{рад} \approx 0{,}015708;$$

$$1' = \frac{\pi}{20000}\ \text{рад} \approx 0{,}00015708;$$

$$1'' = \frac{\pi}{20\,000\,000}\ \text{рад} \approx 0{,}0000015708;$$

$$1\ \text{рад} = \frac{200^g}{\pi} \approx 69^g{,}662.$$

Часовая мера углов.

Час ($h$) — 1/24 часть полного оборота.

Часовая минута ($m$) — 1/60 часть часа.

Часовая секунда ($s$) — 1/3600 часть часа, 1/60 часть часовой минуты.

Полный оборот составляет 24 часа.

Запись: $7^h32^m59^s$ означает 7 часов 32 часовые минуты 59 часовых секунд.

$$1^h = 15^\circ,\ 1^m = 15',\ 1^s = 15'';$$

$$1^h = \frac{\pi}{12}\ \text{рад} \approx 0{,}26180;$$

$$1^m = \frac{\pi}{720}\ \text{рад} \approx 0{,}0043633;$$

$$1^s = \frac{\pi}{43200} \text{ рад} \approx 0{,}000072722;$$

$$1 \text{ рад} = \frac{12^h}{\pi} \approx 3^h{,}8197.$$

**34.3. Средства вычислений.** В зависимости от точности исходных данных и характера самих вычислений пользуются разными средствами — *таблицами, счетными машинами и приборами* (механические средства), *графиками и номограммами.*

Таблицы содержат значения определенных функций с соответственно установленной точностью (см. п. 34.4).

Счетные машины могут быть *непрерывного действия и дискретного счета.* В машинах непрерывного действия, позволяющих получать результаты сравнительно ограниченной точности, математические величины изображают в виде конкретных физических величин, например длин отрезков, углов поворота, электрических сигналов и др. Примером устройства непрерывного действия является логарифмическая линейка (см. с. 323), планиметр.

На машинах дискретного счета, являющихся счетно-цифровыми, можно в принципе получать результаты с неограниченной точностью. Решение задачи на них сводится к последовательному выполнению отдельных арифметических действий; их называют *клавишными вычислительными машинами* — КВМ. Они бывают с ручным вводом исходных данных (чисел) путем нажатия на соответствующие клавиши и с автоматическим вводом данных в машину.

КВМ с ручным вводом исходных данных разделяются на *суммирующие,* предназначенные преимущественно для сложения и вычитания (на них можно производить умножение и деление) и на *вычислительные.* Последние могут быть *механические, электромеханические, релейные и электронные* — ЭКВМ.

Машины с автоматической установкой исходных данных, отличающиеся высокой производительностью вычислительных операций, разделяются на *перфорационные* (счетно-аналитические) *вычислительные машины* — ПВМ и *электронные цифровые быстродействующие вычислительные машины* с программным управлением — ЭВМ.

Перфорационные машины, состоящие из комплекта машин (перфоратора, контрольников, сортировщика и табулятора), предназначены для выполнения различных действий в механизации счета. Они основаны на применении перфорационного метода, при котором исходные данные пробивкой отверстий наносят на перфорационные карты, которые соответственно обрабатывают*.

---

* См.: Механизация вычислительных работ / Под редакцией Л. С. Хренова. — М.: Высшая школа, 1975; *Аверьянов Р. В., Лосев Б. Ф.* Хозяйственные вычисления и вычислительные машины. — М.: Экономика, 1979.

Электронные машины бывают универсальными или специального назначения. Преимущество ЭВМ перед ПВМ и ЭКВМ проявляется не только в скорости выполнения операций, но и в создании автоматизированных систем управления — АСУ, основанных на применении научно обоснованных методов управления, экономико-математических методов и моделей, использовании технических средств преобразования информации. Современная тенденция в конструировании ЭВМ состоит в создании малогабаритных машин, обладающих большой емкостью памяти, высокой скоростью выполнения операций, надежным хранением информации, быстрым вводом исходных данных и выводом результатов вычислений, надежностью в эксплуатации и простотой обслуживания.

*Графики* и *номограммы* представляют графическое изображение соответствующих функциональных зависимостей.

При выборе средств вычислений следует пользоваться теми, при которых искомые результаты можно получить в кратчайший срок и с необходимой точностью.

**34.4. Таблицы.** *Таблицы* — совокупность числовых значений данной функции, соответствующих определенным, последовательно расположенным значениям аргумента (переменным).

Таблицы делят на *общие* и *специальные*. К общим относят таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций (см. табл. 14, 16—18 в конце книги), таблицы умножения и деления, таблицы элементарных функций — квадратов, кубов, корней квадратных и кубических, обратных величин (см. табл. 1 в конце книги), таблицы натуральных и обратных значений тригонометрических функций (см. табл. 20—23 в конце книги) и др.

Наибольшее применение имеют таблицы десятичных логарифмов чисел, их сумм и разностей, некоторых выражений и антилогарифмов, а также логарифмов тригонометрических функций.

Таблицы десятичных логарифмов целых чисел и тригонометрических функций известны с разным числом (от 3 до 102) десятичных знаков в мантиссе (наибольшее применение имеют от 4 до 8).

Абсолютная погрешность десятичного логарифма числа равна

$$\Delta_{\lg x} = (\Delta x/x)M,$$

где $M = \lg e$ — модуль; $\Delta x/x$ — относительная погрешность логарифмируемого числа $x$. При $M \approx 0{,}43$ абсолютная погрешность десятичного логарифма примерно равна 0,5 $(\Delta x/x)$.

Относительная погрешность числа, определенная по его логарифму, не зависит от величины логарифмируемого числа, что следует из выражения $\Delta_{\lg x}/M = \Delta x/x$, получаемого из предыдущей формулы.

**Пример 1.** Определить, с каким числом десятичных знаков в мантиссе необходимы таблицы логарифмов для нахождения десятичных логарифмов чисел $x_1 \approx 0{,}4632$ и $x_2 = 5816{,}98$, содержащих по-

грешности, соответственно равные 0,00005 и 0,005. Согласно приведенной формуле при $M \approx 0{,}43$

$$\Delta_{\lg x_1} = (0{,}0005/0{,}4632)0{,}43 \approx 0{,}00005;$$
$$\Delta_{\lg x_2} = (0{,}05/5816{,}98)0{,}43 \approx 0{,}0000004.$$

Следовательно, для логарифмирования чисел следует пользоваться таблицами десятичных логарифмов с таким числом десятичных знаков в их мантиссах, сколько верных значащих цифр в логарифмируемом числе. При выборе таблиц, содержащих логарифмы тригонометрических функций, следует исходить из равенств:

$$\lg \sin \alpha = M \ln \sin \alpha;\ \lg \cos \alpha = M \ln \cos \alpha;$$
$$\lg \operatorname{tg} \alpha = M \ln \operatorname{tg} \alpha;\ \lg \operatorname{ctg} \alpha = M \ln \operatorname{ctg} \alpha.$$

После дифференцирования этих выражений и замены дифференциалов погрешностями получим формулы для определения абсолютных погрешностей логарифмов соответствующих функций:

$$\Delta_{\lg \sin \alpha} = M \operatorname{ctg} \alpha (\Delta \alpha/\rho);\ \Delta_{\lg \cos \alpha} = -M \operatorname{tg} \alpha (\Delta \alpha/\rho);$$
$$\Delta_{\lg \operatorname{tg} \alpha} = (2M/\sin 2\alpha)(\Delta \alpha/\rho),\ \Delta_{\lg \operatorname{ctg} \alpha} = -(2M/\sin \alpha)(\Delta \alpha/\rho),$$

где $\Delta\alpha$ — погрешности в значении угла $\alpha$, $\rho$ — радиан; $M = \lg 1$.

Из этих формул следует, что погрешность $\Delta\alpha$ угла $\alpha$, вычисляемого по таблицам логарифмов тригонометрических функций,

$$\Delta \alpha'' = (\Delta_{\lg \sin \alpha} \rho'') M \operatorname{ctg} \alpha.$$

**Пример 2.** Пусть $\operatorname{ctg} \alpha \approx 2{,}7$, $\rho'' = 206\,000$ и $M \approx 0{,}43$. Пользуясь шестизначными таблицами логарифмов тригонометрических функций, для которых погрешность логарифма любой тригонометрической функции угла, например, $\Delta_{\lg \sin \alpha} = 0{,}5^{-6}$, определить погрешность $\Delta\alpha''$.

$$\Delta \alpha'' = (0{,}5^{-6} \cdot 206\,000)/(0{,}43 \cdot 2{,}7) \approx \pm 0'',1.$$

Следовательно, по шестизначным таблицам логарифмов тригонометрических функций можно углы определять с точностью $0'',1$.

Для углов $\alpha < 3°$ даже при шаге аргумента $h = 1''$ дуги табличные разности между двумя соседними мантиссами сравнительно велики. В этих случаях логарифмы соответствующих функций для малых углов $\alpha$ следует вычислять по формулам:

$$\lg \sin \alpha = \lg \operatorname{arc} \alpha'' + S;\ \lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \operatorname{arc} x'' + T,$$

где $S = \lg (\sin \alpha/\alpha)$; $T = \lg (\operatorname{tg} \alpha/\alpha)$. Величины $S$ и $T$ приводятся внизу таблиц логарифмов тригонометрических функций.

Для определения угла (обратная задача) по логарифмам тригонометрических функций нужно пользоваться формулами:

$$\lg \operatorname{arc} \alpha'' = \lg \sin \alpha - S, \text{ или } \lg \operatorname{arc} \alpha'' = \lg \operatorname{tg} \alpha - T.$$

Для определения $\lg \sin \alpha$ и $\lg \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha \leqslant 5°$ нужно пользоваться формулами:

$$\lg \sin \alpha = \lg \operatorname{arc} \alpha'' + \lg \sin 1'' - b^2;$$

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \operatorname{arc} \alpha'' + \lg \sin 1'' + 2b,$$

где $b = M\operatorname{arc}^2 1''(x''/6)$.

По этим формулам предварительно определяют логарифмы угла (дуги), выраженного в секундах, а затем по этому логарифму, пользуясь таблицами логарифмов чисел, определяют число, которое будет равно числу секунд искомого угла.

*Примечания:* 1. При одной и той же погрешности в логарифме тригонометрической функции значение угла $\alpha$ получают с большей точностью, если отыскивать их по $\lg \operatorname{tg} \alpha$ или $\lg \operatorname{ctg} \alpha$, чем по $\lg \sin \alpha$ и $\lg \cos \alpha$.

2. При малых значениях угла $\alpha$ следует пользоваться $\lg \sin \alpha$, а при углах, близких к 90°, вычисления следует производить, пользуясь $\lg \cos \alpha$.

Таблицы натуральных значений для всех тригонометрических функций и их аргументов составляются в двух вариантах:

1) с сохранением одинакового числа десятичных знаков;

2) с сохранением одинакового числа значащих цифр.

В таблицах первого варианта абсолютная погрешность значений тригонометрических функций для всех значений углов не превзойдет $0{,}5 \cdot 10^{-n}$, где $n$ — число десятичных знаков в таблицах. А относительная погрешность значений в этих таблицах будет резко меняться. Так, например, в пятизначных таблицах для $\sin 0°01' = 0{,}00029$ относительная погрешность равна $0{,}5 \cdot 10^{-3}$, а значение синуса угла, близкого к 90°, порядка $0{,}5 \cdot 10^{-5}$, т. е. в 100 раз большую. Вычисления с фуикциями от малых углов по таким таблицам приводят к потере точности результатов; такими таблицами не всегда можно пользоваться.

В таблицах, составленных по второму варианту, абсолютная погрешность значений тригонометрических функций для всех аргументов будет меняться, но относительная погрешность практически будет одного порядка. Например, пятизначные таблицы для всех аргументов содержат относительную погрешность $0{,}5 \cdot 10^{-5} \leqslant \delta \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Так, число с пятью значащими цифрами 0,99999 будет иметь предельную погрешность $0{,}5 \cdot 10^{-5}$, а число 1,00000 иметь погрешность $0{,}5 \cdot 10^{-4}$. В таких таблицах значения $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ для малых углов и значения $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ для углов $\alpha$, близких к 90°, даются с большим числом десятичных знаков (знаков после запятой), т. е. с большей точностью (см. табл. 20 в конце книги).

**Пример 3.** Приращения прямоугольных координат $\Delta x = d \sin \alpha$, $\Delta y = d \cos \alpha$, а $\operatorname{tg} \alpha = \Delta x/\Delta y$; $\alpha = 0°15'$, следовательно, $d = \Delta/\sin \alpha = \Delta y/\cos \alpha$.

Если условно допустить, что $\Delta x = 0{,}45$ м, а $\Delta y = 103{,}13$ м, являются точными величинами, то, пользуясь таблицами натуральных зна-

чений тригонометрических функций, составленных по первому варианту, получим:

$$d = \Delta x/\sin\alpha = 103{,}15 \text{ м}/0{,}99999 = 103{,}13 \text{ м};$$

$$d = \Delta y/\cos\alpha = 0{,}45 \text{ м}/0{,}00436 = 103{,}21 \text{ м},$$

т. е. полученная разница в значениях $d$ равна 0,08 м.

Если пользоваться таблицами натуральных значений тригонометрических функций, составленных по второму варианту, то

$$d = \Delta x/\sin\alpha = 0{,}45 \text{ м}/0{,}0043633 = 103{,}13 \text{ м},$$

т. е. разницы не будет.

Для вычисления погрешностей углов, определяемых по заданным контрольным значениям соответствующих тригонометрических функций, следует пользоваться формулами:

$$\Delta_n\sin\alpha = 10^n(1/\rho'')\cos\alpha\Delta\alpha''; \quad \Delta_n\cos\alpha = -10^n(1/\rho'')\sin\alpha\Delta\alpha'';$$

$$\Delta_n\operatorname{tg}\alpha = 10^n(1/\rho'')(\Delta\alpha/\cos^2\alpha); \quad \Delta_n\operatorname{ctg}\alpha = -10^n(1/\rho'')(\Delta x''/\sin^2\alpha),$$

где $\Delta_n$ — приращения функции в единицах $n$-го (последнего) десятичного знака соответствующей функции; $1/\rho'' \approx 0{,}00000485$; $\Delta\alpha''$— погрешности углов.

Для определения погрешностей углов $\Delta\alpha''$ в зависимости от погрешностей соответствующих тригонометрических функций следует пользоваться формулами:

$$\Delta\alpha'' = \Delta_{\sin\alpha}\sec\alpha\rho''; \quad \Delta\alpha'' = -\Delta_{\cos\alpha}\operatorname{cosec}\alpha\rho'';$$

$$\Delta\alpha'' = \Delta_{\operatorname{tg}\alpha}\cos^2\alpha\rho''; \quad \Delta\alpha'' = -\Delta_{\operatorname{ctg}\alpha}\sin^2\alpha\rho''.$$

**Пример 4.** Определить, с какой точностью можно вычислить угол $\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}33037645$. Подставляя в формулу $\Delta\alpha'' = \Delta_{\sin\alpha}\sec\alpha\rho''$ значения $\Delta_{\sin\alpha} = 0{,}5^{-8}$, $\sec\alpha \approx 1{,}06$ (см. табл. 20 в конце книги) и $\rho'' \approx 260000$, получим

$$\Delta\alpha'' = 0{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 1{,}06\cdot 2{,}6\cdot 10^5 \approx \pm 0{,}001.$$

К специальным относят таблицы, составленные для функций, употребляющихся, например, в различных инженерных расчетах, и т. п.

Таблицы характеризуются *степенью точности* (числом десятичных знаков или значащих цифр), *пределами изменения аргумента, шагом* (ступенью — разностью между соседними табличными значениями аргумента).

По системе расположения материала в таблицах их различают с *двумя, тремя и четырьмя* входами в них, что часто связано с числом аргументов функции, для которой составлены таблицы.

Таблицы с одним входом содержат два рядом расположенных столбца: один для аргумента, а второй для значения функции. Однако для сокращения объема таблиц их составляют с двумя входами, как, например, табл. 14 в конце книги, содержащую мантиссы десятичных

логарифмов чисел. Здесь десятки аргумента размещены в левом крайнем столбце, а единицы его — в верхней и нижней горизонтальных строках.

**Пример.** $\lg 144 = 2{,}1584$ (см. табл. 14). В этих таблицах для сокращения их формата первые цифры мантисс помещены лишь в столбце, озаглавленном 0.

Табл. 1 в конце книги является примером таблицы с одним входом. Для отыскания по ней необходимого значения (функции) заданного числа в крайней левой колонке находят это число (аргумент) и против него в столбце, соответствующем заданной функции, прочитывают искомое значение. Например: $23^3 = 12167$.

Если требуется определить численную величину функции для значения аргумента, находящегося между двумя рядом стоящими табличными его значениями, то прибегают к *интерполированию* («чтение таблиц между строк»), пользуясь табличными разностями.

Первая табличная разность — разность между значениями функции, соответствующими двум соседним значениям аргумента; вторая табличная разность — разность между двумя первыми соседними табличными разностями; третья табличная разность — разность между вторыми соседними табличными разностями и т. д.

Если вторые табличные разности получаются м е н ь ш е четырех единиц последнего приведенного в таблицах знака, то ими можно пренебречь и пользоваться *линейным* интерполированием, применяя формулу

$$y = y_0 + \frac{n - n_0}{h}\Delta' = y_0 + t\Delta'.$$

Здесь $y$ — искомое значение функции; $y_0$ — значение функции, данное в таблицах и соответствующее табличному аргументу $n_0$; $n$ — заданное значение аргумента, находящееся между двумя рядом стоящими табличными аргументами $n_0$ и $n_1$; $h = (n_1 - n_0)$ — шаг таблиц; $\Delta'$ — первая табличная разность (разность первого порядка); $t = (n - n_0)/h$.

**Пример 1.** Определить $\sqrt{4282}$.

Заданное значение аргумента 4282 находится между табличными аргументами 4280 и 4290 (см. с. 362), следовательно (см. колонку $\sqrt{10n}$),

$$y_0 = 65{,}42 + \frac{82-80}{10}\cdot 8 \approx 65{,}44.$$

**Пример 2.** Найти $\lg 9032$.

В табл. 14 в конце книги числу 903 соответствует мантисса 9557. Здесь же находим первую табличную разность $\Delta' = 562 - 557 = 5$ и замечаем, что с возрастанием аргумента мантисса логарифма возрастает. В табличке пропорциональных частей на этой же странице

находим в левом крайнем столбце разность 5 и против нее в столбике, озаглавленном сверху 2, читаем $\Delta' = 1{,}0$.

Итак,

$$\lg 9032 = 3{,}9557 + 1 = 3{,}9558.$$

С двумя входами составлена и табл. 15. Как ею пользоваться, разъяснено в следующем примере.

**Пример 3.** Дано $\lg x = 0{,}2418$. Найти $x$.

Так как табл. 15 составлена только для мантисс с тремя значащими цифрами, то выпишем значения чисел для мантисс 0,241 и 0,242. Они находятся на пересечении строки 24 и столбцов, озаглавленных сверху 1 и 2; 1,742; 1,746.

Воспользуемся таблицей пропорциональных частей:

$$\Delta = (1{,}746 - 1{,}742) \cdot 1000 = 4.$$

Этому значению $\Delta$ для 8 единиц в последнем знаке $\lg x$ соответствует поправка 3,2 (единиц последнего знака $x$).

Так как $\lg x$ — функция возрастающая, то $x = 1{,}742 + 0{,}003 = 1{,}745$.

**Пример 4.** Найти $\lg \operatorname{tg} 42°28'$.

В табл. 16 в конце книги находим значение $\lg \operatorname{tg} 42°20' = 9{,}9595$; здесь же, правее и ниже этого числа, находим табличную разность 26 и замечаем, что с возрастанием аргумента $\lg \operatorname{tg} \alpha$ возрастает. В табличке пропорциональных частей на этой же странице находим $\Delta' = 26$ (левый крайний столбец) и в столбике, озаглавленном сверху 8, читаем 20,8. Итак,

$$\lg \operatorname{tg} 42°28' = 9{,}9595 + 21 = 9{,}9616.$$

Для более точного определения угла по таблицам натуральных значений тригонометрических функций следует использовать ту функцию, которая быстрее изменяется при небольшом изменении отыскиваемого угла.

*Примечание.* При интерполировании по таблицам следует сохранять одну лишнюю цифру, чтобы ошибка результата не вышла за пределы 0,5 единицы последнего знака числа, данного в таблицах.

При округлении найденного путем интерполирования по таблицам числа до количества знаков, с которым даны значения в используемых при этом таблицах, результат может иметь ошибку, превышающую 0,5 единицы последнего знака, но она не превысит одной единицы последнего знака числа, данного в таблицах.

Наиболее употребительные таблицы (общие)

1. *Милн-Томсон Л. М., Комри Л. Дж.* Четырехзначные математические таблицы / Под ред. К. А. Семендяева. 2-е изд. — М.: Наука, 1964.

2. *Комри Л. Дж.* Шестизначные математические таблицы Чемберса / Под ред. К. А. Семендяева. — М.: Наука, 1964.

3. Таблицы Барлоу — квадратов кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел до 15000 / Под ред. Л. С. Хренова. — М.: Наука, 1974.

4. *Бремикер К.* Логарифмо-тригонометрические таблицы с шестью десятичными знаками / Под ред. Л. С. Хренова. — М.: Физматгиз, 1962.

5. *Вега Г.* Таблицы семизначных логарифмов. 4-е изд. — М.: Недра, 1984.

6. *Хренов Л. С.* Четырехзначные математические таблицы. 2-е изд. — М.: Просвещение, 1974.

7. *Хренов Л. С.* Пятизначные таблицы тригонометрических функций. 5-е изд. — М.: Наука, 1975.

8. *Хренов Л. С.* Шестизначные таблицы тригонометрических функций. 3-е изд. — М.: Наука, 1978.

9. *Хренов Л. С.* Семизначные таблицы тригонометрических функций. 3-е изд. — М.: Наука, 1971.

10. *Хренов Л. С.* Восьмизначные таблицы тригонометрических функций. 2-е изд. — М.: Наука, 1973.

*Примечание.* В описаниях таблиц приводятся правила пользования ими.

Таблицы для вычислений следует выбирать лишь с необходимой и достаточной точностью, что зависит от точности исходных данных и результатов вычислений.

**34.5. Счеты.** Русские *счеты* устроены по принципу десятичной системы счисления, главным образом механизируют выполнение действий сложения и вычитания (на них можно производить и другие арифметические действия, но с меньшей производительностью).

На счетах ряды косточек, начиная с 5-го и выше, служат для откладывания единиц, десятков (6-й ряд), сотен 7-й ряд и т. д.; здесь каждый последующий ряд косточек служит для счета единиц смежного высшего разряда. А косточки 2-го и 3-го рядов, отделенных от верхних неполным рядом (4-м), предназначены для действия с десятичными дробями, например при подсчете расстояний или площадей.

При вычислениях с угловыми единицами нижние ряды косточек — 3-й и 2-й — служат для откладывания соответственно десятков и единиц, минут или секунд; если эти ряды используют для минут, то единицы градусов откладывают на 5-м ряду косточек, а если на 2-м и 3-м рядах откладывают секунды, то минутам отводят ряды 5-й и 6-й, а единицы градусов откладывают на 7-м ряду. Используя соответствующие ряды косточек для десятков минут или десятков секунд, следует помнить, что в этих случаях каждые шесть десятков минут соответствуют одному градусу, а шесть десятков секунд — одной минуте.

Неполный ряд косточек (4-й) может быть использован для подсчета четвертных долей соответственно минут и градусов.

Для удобства отсчета и особенно при вычислениях с угловыми единицами в каждом ряду две косточки (5-я и 6-я) и первые косточки ря-

дов, на которых откладывают целые тысячи (8-й ряд) и миллионы (11-й ряд), окрашены в более темный против остальных косточек цвет.

На счетах действие сложения и вычитания начинается всегда с единиц высшего разряда. При этом может оказаться, что сумма двух однозначных слагаемых будет больше 10. В этом случае вместо второго слагаемого откладывают (передвигают по проволоке справа налево) одну единицу (одну косточку) следующего высшего разряда, а разницу между этой единицей и вторым слагаемым (т. е. дополнение второго слагаемого до 10) сбрасывают (передвигают слева направо) с отложенного на счетах первого слагаемого.

При сложении на счетах многозначных чисел вначале полностью откладывают первое слагаемое (с учетом соответствующих разрядов косточек), затем, пользуясь правилом сложения однозначных чисел к одноименным разрядам первого слагаемого последовательно, начиная с единиц высшего разряда, прибавляют числа каждого разряда второго слагаемого.

При вычитании пользуются приемами, обратными тем, какими пользуются при сложении.

Умножение на счетах, которое сводится к повторному сложению множимого, целесообразно производить только в том случае, если один из сомножителей имеет не более 2—3 значащих цифр и сумма их небольшая.

Деление чисел на счетах выгодно производить, если делитель равен 2 или $2^n$. Деление числа всегда начинают с его младших разрядов, сбрасывая (переводя слева направо) половину отложенных косточек (делимого). При этом если на каком-либо разряде делимого будет нечетное число (нечетное число косточек), то в этом разряде сбрасывают число косточек больше половины их на одну, а на соседнем нижнем разряде прибавляют пять косточек.

**34.6. Логарифмические линейки.** Они позволяют с минимальной затратой времени производить различные вычисления, где достаточны результаты с тремя значащими цифрами. Их широко используют при вычислении поправок, процентов и особенно при инженерно-технических, экономических расчетах, производят вычисления без записи промежуточных результатов по самым различным формулам.

Нормальная логарифмическая (счетная) линейка. Она служит для вычисления механическим путем различных действий (умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, определения натуральных значений тригонометрических функций заданных углов, и, наоборот, по заданным натуральным значениям функций можно находить соответствующие им углы, определять логарифмы и антилогарифмы чисел и тригонометрических функций и производить различные комбинированные вычисления)*.

---

* Подробнее см.: *Панов Д. Ю.* Счетная линейка. — М.: Наука, 1981; *Хренов Л. С., Визиров Ю. В.* Логарифмическая линейка/Под ред. Л. С. Хренова. — М.: — Высшая школа, 1983.

Точность вычислений на логарифмической линейке зависит от длины ее шкал: на обычной линейке длиной в 25 см можно получать результаты с 4—3 значащими цифрами с ошибкой не более единицы последнего знака.

Логарифмическая линейка (рис. 119) состоит из трех частей: 1) корпуса *M*, имеющего продольный паз; 2) движка *Q*, перемещающегося в пазу корпуса; 3) бегунка *Б*, удерживаемого на линейке, соприкасающейся с ее корпусом пружинкой и состоящего из прямоугольной металлической рамки со стеклом, на середине которого нанесена тонкая черта — указатель (визир).

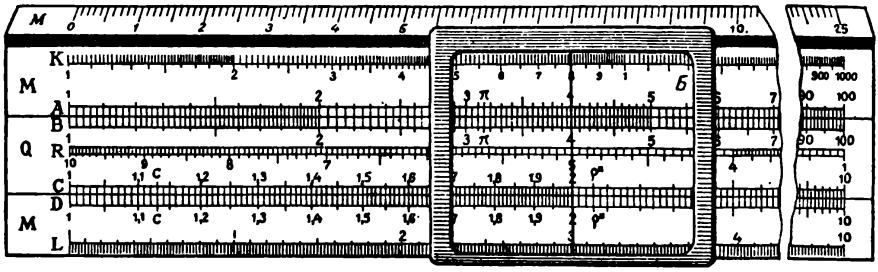



Рис. 119. Лицевая сторона нормальной логарифмической линейки

Сверху на корпусе линейки, покрытом белым целлулоидом, нанесены четыре шкалы; кроме того, на вертикальном и на скошенном боках линейки нанесены две измерительные шкалы.

На движке нанесено шесть шкал, по три на каждой стороне.

Все шкалы на лицевой стороне, на скошенном крае и на движке имеют одинаковую длину в 250 мм.

На лицевой стороне корпуса линейки верхняя шкала *K* (кубическая) и следующая за ней шкала *A* (квадратичная) служат для вычисления соответственно кубов и квадратов чисел, нанесенных на третьей сверху шкале *D*. Мантиссы логарифмов чисел шкалы *D* нанесены на нижней шкале линейки *L*, которая заменяет собой трехзначную таблицу мантисс логарифмов чисел и является единственной из четырех на лицевой стороне равномерной шкалой на линейке, разделенной на полумиллиметры; остальные шкалы неравномерные — логарифмические.

На шкале *L* наименьшее деление соответствует 0,002, а метки, обозначенные на этой шкале цифрами 2, 3, 4, ..., читаются как 0,2, 0,3, 0,4 и т. д.

Шкала *D* на корпусе линейки и шкала *C* на движке, называемые осиовными шкалами линейки, состоят каждая из трех участков, на концах которых стоят 1 и 2; 2 и 4; 4 и 10. Каждый такой участок разделен неравномерно, пропорционально логарифмам ($m \lg a$) соответствующих чисел, но уменьшенным в четыре раза, так как длина всей шкалы равна 0,25 м, а не 1 м (т. е. $m \lg a = 250 \lg a$ при $a$ от 1 до 10).

Поэтому на этих шкалах каждое наименьшее деление на участке 1—2 означает 0,01 (сотые доли) на участке 2—4—0,02, а на участке 4—10 — уже 0,05.

На линейке шкала кубов $K$, являясь также логарифмической ($m \lg a$), построена с модулем $m = (250:3)$ мм и для $d$ от 1 до 1000; она состоит из трех участков, на концах которых поставлены цифры 1. На ее первом участке (левый крайний) наименьшее деление (цена одного деления) в интервале 1—2 равно 0,02, в интервале 2—5 равно 0,05 и в интервале 5—1 (10) равно 0,1. На ее втором участке (среднем) 1(10)—2(20), 2(20)—5(50)—1(100) наименьшее деление в интервалах равно соответственно 0,2, 0,5 и 1. На третьем участке (правом крайнем) в интервалах 1(100)—2(200), 2(200)—5(500) и 5(500)—1(1000) наименьшие деления соответственно равны 2, 5 и 10.

Шкала квадратов $A$ на линейке и точно такая же шкала логарифмов $B$ ($m \lg c$), верхняя на движке $Q$, построены каждая с модулем $m = (250:2)$ мм для значений $c$ от 1 до 100 и состоят из двух одинаковых частей, оцифрованных по концам 1—10 и 10—100. На этих шкалах цена одного деления в интервале 1—2 равна 0,02, в интервале 2—5 равна 0,05 и в интервале 5—10 равна 0,1, а на втором участке в интервалах 10—20, 20—50 и 50—100 равна соответственно 0,2 и 0,5 и 1.

На лицевой стороне движка между двумя шкалами делений $B$ и $C$ нанесена средняя шкала $R$ (см. рис. 119) — шкала обратных значений. Она представляет собой ту же шкалу $C$ ($D$), но только в перевернутом виде, т. е. метка 10 поставлена на ее левом, а метка 1 на правом конце; на этой шкале отрезок от ее левого конца до любой метки, например до метки $p$, равен

$$250 - 250 \lg p = 250 \lg \quad (1:p).$$

На обратной стороне движка нанесены три логарифмические шкалы (рис. 120), предназначенные для вычислений с тригонометрическими функциями.

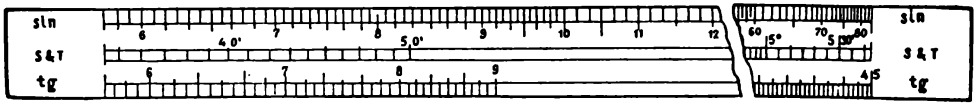



Рис. 120. Обратная сторона движка нормальной логарифмической линейки

Уравнения этих шкал следующие:

для шкалы sin ... $y = K\ (\lg \sin \alpha_s + 1)$;

для шкалы $S$ и $T$ ... $y = K\left[\lg \frac{1}{2}(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha) + 2\right]$;

для шкалы tg ... $y = K\ (\lg \operatorname{tg} \alpha_t + 1)$,

где $\alpha_s$ и $\alpha_t$ обозначают пометки углов, соответствующие шкалам. Из них на верхней шкале «sin» нанесены от начальной точки в масштабе основ-

ной шкалы логарифмы синусов углов от 5°43′,77 до 90° и надписаны соответствующие им углы.

На нижней шкале «tg» нанесены, как и на верхней, но только логарифмы тангенсов углов от 5°43′,77 до 45°, а подписаны соответствующие им углы.

На средней шкале «*S* и *T*» — шкале синусов и тангенсов нанесены от начальной точки, как и на крайних шкалах, логарифмы этих функций для значений малых углов от 0°34′,38 до 5°43′,77 и подписаны значения соответствующих им углов.

Для каждой из этих шкал значения углов выбраны так, что значение функции крайнего правого отсчета в десять раз больше значения той же функции для начального левого отсчета. Действительно:

$$\sin 0°34',38 \approx \operatorname{tg} 0°34',38 \approx 0{,}01000;$$

$$\sin 5°43',77 \approx \operatorname{tg} 5°43',77 \approx 0{,}1000;$$

$$\sin 90° = 1{,}000, \quad \operatorname{tg} 45° = 1{,}000.$$

Следовательно, шкалы «sin» и «tg» содержат углы, синусы и тангенсы которых меняются в пределах от 0,1 до 1, а средняя шкала «*S* и *T*» — углы, синусы (тангенсы) которых меняются в пределах от 0,01 до 0,1.

На шкале «sin» на участке от ее начала до 10° наименьшее деление соответствует 5′, на участке 10—20° оно равно 10′ и на участке 20—90° оно равно 20′.

На шкале «tg» наименьшие деления в 5 и 10′ имеют участки ее, соответствующие углам в пределах 0—20° и 20—45°.

На средней шкале («*S* и *T*») наименьшее деление на участке до 3° соответствует 1′, а от 3° и дальше — 2′.

Такое сочетание шкал, нанесенных на лицевой стороне линейки и на двух сторонах движка, позволяет, пользуясь ими, производить самые различные вычисления.

И наконец, на некоторых шкалах лицевой стороны линейки и на одноименных шкалах движка особыми штрихами отмечены константы:

$$\pi,\ M = 1:\pi,\ C = \sqrt{4:\pi},\ C_1 = \sqrt{40:\pi},\ \rho°,\ \rho',\ \rho''\ \text{и}\ e'',$$

часто встречающиеся при различных расчетах.

Пользуясь шкалами лицевой стороны линейки (для удобства следует выдвинуть движок из пазов линейки), можно с помощью одной установки указателя бегунка получить сразу четыре результата: число на основной шкале *D*, мантиссу его логарифма на нижней шкале *L* и соответственно на шкалах *A* и *K* квадрат и куб этого числа.

Если установить указатель бегунка, например, на шкале кубов или квадратов, то можно по этому указателю прочитать на шкалах кубический или квадратный корень на основной шкале и логарифм этого корня на нижней шкале линейки.

**Примеры. 1.** Вычислить $x = 32{,}4 \cdot 23$.

В этом случае необходимо на линейке сложить два данных числа (32,4 и 23), пользуясь шкалами $D$ и $C$.

Для этого указатель бегунка устанавливают на шкале $D$ на деление 32,4, а передвижением движка вправо подводят левую крайнюю цифру 1, написанную на его шкале $C$, под указатель. Затем бегунок переводят вправо, устанавливая его указатель на деление 23 шкалы $C$ и после этого по указателю прочитывают на основной шкале линейки $D$ ответ — число 745, т. е. $x \approx 745$.

**2.** Вычислить $y = 6{,}44 : 2{,}19$.

Для этого ставят указатель бегунка на деление 6,44 основной шкалы $D$ линейки и, перемещая движок влево, подводят под указатель деление 219 шкалы $C$ движка. После этого совмещают указатель бегунка с левой крайней цифрой 1, нанесенной на шкале $C$ движка. Теперь остается прочитать на основной шкале ($D$) линейки искомый ответ; в нашем случае $y \approx 2{,}94$.

**3.** Вычислить $z = \dfrac{2{,}17 \cdot 3{,}81}{4{,}35}$.

Указателем бегунка левую крайнюю цифру 1 на шкале $C$ совмещают с делением 2,17 на шкале $D$. Указатель бегунка ставят на деление 381 шкалы $C$ и подводят под указатель штрих 4,35 шкалы $C$. Против левой крайней цифры 1 шкалы $C$ прочитывают на шкале $D$ ответ:

$$z = 1{,}90.$$

Логарифмическая линейка «Ленинград». Она имеет двойные логарифмические шкалы, позволяющие производить расчеты с натуральными логарифмами и показательными функциями, решать показательные и логарифмические уравнения и вычислять степени с дробными показателями.

Линейка «Ленинград» состоит из *корпуса* с десятью шкалами на двух сторонах, *движка* и несъемного *бегунка*.

На лицевой стороне корпуса линейки «Ленинград» (рис. 121) нанесены четыре шкалы: $K(x^3)$, $A(x^2)$, $D(x)$ и $DI(1:x)$ и пять шкал: $B(x^2)$, $S(\sin x)$, $ST(\sin$ и $\operatorname{tg})$, $T(\operatorname{tg} x)$ и $C(x)$ — на обратной стороне движка. С помощью этих шкал производятся те же вычисления, что и по аналогичным шкалам нормальной логарифмической линейки.

На лицевой стороне бегунка кроме основного визира (длинная черта в его средней части) нанесены два коротких штриха (красного цвета) так, что расстояние между основным визиром и каждой из крайних линеек соответствует на шкале $A$ отношению $\pi/4 \approx 0{,}785$.

**Примеры. 1.** Вычислить площадь круга $S = \pi d^2/4$ для $d = 17{,}3$ ед.

Совмещаем основной визир (или правый нижний — красный) лицевой стороны бегунка со штрихом, соответствующим числу 17,3 на шкале $D$ лицевой стороны корпуса линейки, и по короткому левому

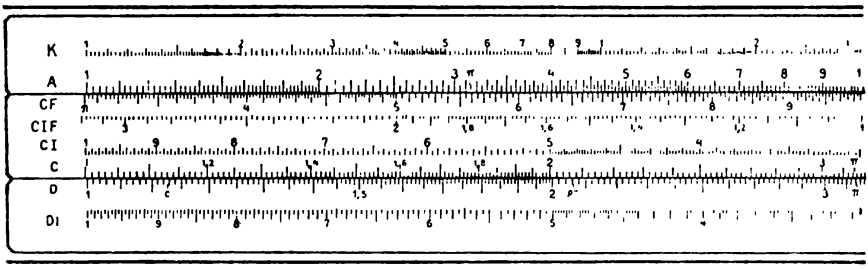



Рис. 121. Лицевые стороны корпуса и движка линейки «Ленинград»

(красному) штриху (или по основному) читаем на шкале квадратов $A$ значение $S \approx 237{,}8$ ед$^2$.

На обратной стороне стеклянного бегунка нанесена в его центре только одна линия — визир.

На обратной стороне корпуса последовательно нанесено шесть шкал: $L(\lg x)$, $LL_1(e^{0{,}01x})$, $DF(\pi \lg x)$, $D(x)$, $LL_3(e^x)$ и $LL_2(e^{0{,}1x})$ и четыре шкалы — на обратной стороне движка — $CF(\pi \lg x)$, $CIF(1 : \pi x)$, $CI(1 : x)$ и $C(x)$ (рис. 122).

Три двойные логарифмические шкалы значений основания (e) натурального логарифма в различных степенях $LL_3$, $LL_2$ и $LL_1$ являются продолжением (влево) одна другой. Началом шкалы $LL_2$ является конец шкалы $LL_1$, а шкала $LL_3$ начинается со штриха, соответствующего конечному штриху шкалы $LL_2$.

При работе с этими шкалами следует учитывать, что длина соответствующего отрезка на шкале $D$, равная $m \lg x$, на двойной логарифмической шкале будет

$$m \lg x = m\ (\lg \lg N - \lg \lg e),$$

$$\lg x = \lg (\lg N / \lg e),$$

откуда

$$\lg N = x \lg e, \text{ или } N = e^x,$$

где $m$ — модуль двойной логарифмической шкалы; e = 2,718... — основание натуральных логарифмов.

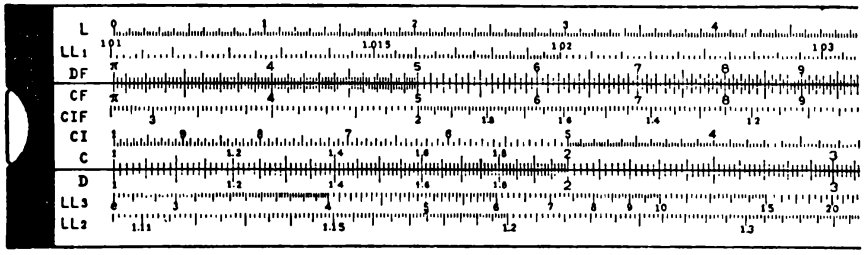
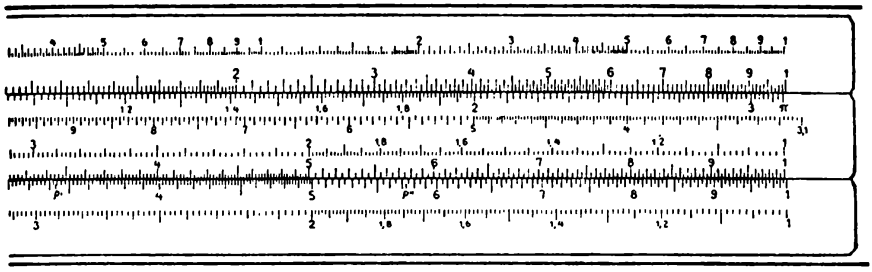



Рис. 122. Обратные стороны корпуса и движка линейки «Ленинград»



Двойные логарифмические шкалы $LL_1$, $LL_2$ и $LL_3$, являясь неравномерными, состоят каждая из отдельных участков с нанесенными на них различными наименьшими делениями, значения которых показаны в табл. 1.

Шкалами $LL_1$, $LL_2$ и $LL_3$ пользуются для вычислений натуральных логарифмов, для определения значений показательных функций ($e^x$), для вычислений степеней с дробными показателями и для решения показательных и логарифмических уравнений.

Для определения результатов на этих шкалах значение степени основания находят на шкале $D$ корпуса и, совместив с ним основной визир, читают под ним значение величины $e^x$ на соответствующей шкале $LL_1$, $LL_2$ или $LL_3$.

**2.** Определить $y = e^{0,6}$.

Совмещая визир обратной стороны бегунка со штрихом, отмеченным цифрой 6 на шкале $D$ обратной стороны корпуса линейки, прочитывают под этим визиром на шкале $LL_2$. Ответ: $y \approx 1,822$.

**3.** Вычислить $y_1 = e^{0,08}$ и $y_2 = e^{1,25}$.

Визир бегунка устанавливают над чертой, отмеченной числом 8 на шкале $D$ обратной стороны корпуса линейки, и читают под ним значение $y_1 = 1,0833$ на шкале $LL_1$. Значение $y_2 = 3,490$ читают на шкале $LL_3$ под визиром, установленным над штрихом, соответствующим числу 1,25 на шкале $D$ (в ее левом конце) обратной стороны корпуса линейки.

Для вычисления $y = e^x$ при $x > 10$ показатель степени разбивают

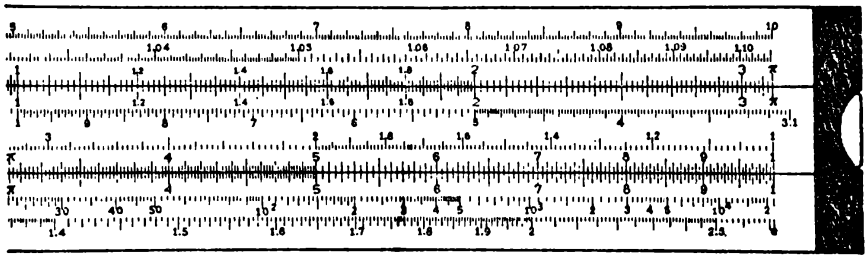


Таблица 1

| Участки шкал | Значение наименьшего деления | Участки шкал | Значение наименьшего деления |
|---|---|---|---|
| Шкала $LL_1$ | | Шкала $LL_3$ | |
| 1,01—1,02 | 0,001 | 6—10 | 1 |
| 1,02—1,05 | 0,002 | 10—15 | 0,2 |
| 1,05—1,105 | 0,005 | 15—30 | 0,5 |
| Шкала $LL_2$ | | 30—50 | 1 |
| 1,05—1,2 | 0,001 | 50—$10^2$ (100) | 2 |
| 1,2—1,4 | 0,002 | $10^2$—2 (200) | 5 |
| 1,4—2,0 | 0,005 | 2 (200) —5 (500) | 10 |
| 2,0—2,5 | 0,01 | 5 (500) —$10^3$ (1000) | 50 |
| 2,5— e(2,718) | 0,02 | $10^3$ (1000) —2 (2000) | 100 |
| Шкала $LL_3$ | | 2 (2000) —5 (5000) | 200 |
| e(2,718) —4 | 0,02 | 5 (5000) —$10^4$ (10000) | 500 |
| 4—6 | 0,05 | $10^4$ (10000) —22026 | 1000 |

на несколько частей, каждая из которых должна быть меньше 10, т. е. выражение $y = e^x$ представляют в виде произведения

$$y = e^{\Delta x_1} e^{\Delta x_2} \dots e^{\Delta x_n},$$

где $\Delta x$ — составная часть показателя степени. Затем для каждого члена произведения определяют значение $e^{\Delta x} = y$. Таким образом, выражение $e^x$ при $x > 10$ можно представить в виде произведения $y = \Delta y_1 \Delta y_2 \dots \Delta y_n$; здесь $y_i = e^{\Delta x_i}$.

**4.** Вычислить $y = e^{28}$.

В данном случае наименьшее количество частей, на которое разбивают показатель степени, — 3. Значит, это выражение можно представить в виде

$$y = e^{10+10+8} = e^{10} e^{10} e^{8}.$$

После этого определяют, как указано в предыдущем примере, значения $y_1 = e^{10} = 2{,}2 \cdot 10^4$ и $y_2 = e^8 = 3 \cdot 10^3$.

Следовательно,

$$y = 2{,}2 \cdot 10^4 \cdot 2{,}2 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^3 = 14{,}52 \cdot 10^{11}$$

Шкалы *DF* и *CF* на обратных сторонах корпуса и движка линейки представляют собой обыкновенные логарифмические шкалы, но только сдвинутые каждая на величину $\pi$. Следовательно, числу $x$ на шкале *C* движка соответствует число $\pi x$ на его шкале *CF* или числу $x$ на шкале *D* корпуса соответствует число $\pi x$ на его шкале *DF*.

**5.** Определить $y = \pi x$ для $x = 137$.

Установив визир обратной стороны бегунка на штрих, соответствующий числу 137 на шкале *D* корпуса (или на шкале *C* движка), под

этим визиром находим число $y = 430$ на шкале $DF$ корпуса (или на шкале $CF$ движка) линейки.

Вторая снизу шкала $CI$ на обратной стороне движка, как и шкала $R$ на нормальной линейке, являясь «обратной» шкалой, предназначена для вычисления значения $1/x$ (обратных значений чисел $x$, нанесенных на шкале $C$ обратной стороны движка).

**6.** Определить $y = 1/x$ для $x = 26{,}4$.

Совмещают визир обратной стороны бегунка со штрихом, соответствующим числу 26,4 на шкале $C$ обратной стороны движка, а на шкале $CI$ под этим визиром читают $y = 0{,}0379$.

Шкала $CIF$ на обратной стороне движка служит для вычисления значений величин $1/\pi x$.

**7.** Вычислить $y = 1/\pi x$ для $x = 2{,}61$.

Совмещают на обратной стороне движка линейки визир бегунка со штрихом, соответствующим числу 2,61 на его шкале $C$ и на шкале $CIF$, пользуясь визиром, читают число $y = 0{,}122$.

Для вычисления с использованием постоянных коэффициентов пользуются значками $c$, $\rho''$, $\pi$, $\rho'$ и $\rho^0$, нанесенными на шкалах $D$ и $C$ лицевой стороны корпуса и движка так же, как и аналогичными на нормальной линейке.

Если результат вычисления оказывается больше или меньше чисел, нанесенных на двойных логарифмических шкалах линейки, то в этом случае вычисляемые выражения предварительно преобразовывают так, чтобы искомый результат можно было получить по частям.

*Примечание.* Вычисления на логарифмической линейке следует производить при минимальном передвижении ее движка. Для этого формулы должны быть предварительно соответственно преобразованы. Например, проценты следует вычислять при одном или двух передвижениях движка по формуле $A_i, \% = Ka_i$, где коэффициент $K = 100/\sum_{i=1}^{i=n} a_i$, который при этом не записывается и не читается.

**34.7. Малые электронно-клавишные вычислительные машины — ЭКВМ.** Развитие микроэлектроники привело к созданию переносных и карманных малогабаритных ЭКВМ для индивидуального пользования.

Из настольных ЭКВМ наибольшее распространение получили машины семейства «Искра» (см. табл. 2), построенные на интегральных схемах — ИС без программного управления. Все ЭКВМ семейства «Искра», имеющие некоторые между собой различия, работают от однофазной сети переменного тока с частотой $50 \pm 1$ Гц, напряжением 220 В $\pm$ 22 $\div$ 33 В, в сухих отапливаемых помещениях при температуре 10—35°С и относительной влажности 30—80%.

На ЭКВМ семейства «Искра» в зависимости от числа регистров и других устройств можно кроме четырех арифметических действий автоматически или полуавтоматически производить возведение в степень и извлечение квадратных корней, а, например, на машине «Искра-123»

Таблица 2

**Технико-эксплуатационные характеристики ЭКВМ «Искра»**

| Модель ЭКВМ | Число регистров | Разрядность чисел | Число клавиш управления | Скорость выполнения отдельных операций, с | | | | Потребляемая мощность, Вт/ч | Масса, кг | Габариты, см |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ± | × | − | $\sqrt{}$ | | | |
| Искра-11 | 4 | 15 | 10 | 0,1 | 0,3 | 0,3 | — | 60 | 20 | 50×44,4×24,2 |
| Искра-12 | 5 | 16 | 19 | 0,05 | 0,5 | 0,5 | 1,5 | 80 | 26,5 | 51×44,5×25 |
| Искра-12М | 6 | 16 | 19 | 0,05 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 45 | 15 | |
| Искра-13 | 5 | 16 | | 0,06 | 1,0 | | | 90 | 25 | |
| Искра-22 | 5 | 16 | 19 | 0,05 | 0,5 | 0,7 | — | 100 | 35 | 55×49,5×22,5 |
| Искра-110 | 3 | 8 | 8 | 0,05 | 0,35 | 0,3 | — | 15 | 3,5 | 27× 26 × 10,8 |
| Искра-111 | 1 | 12 | 16 | 0,05 | 0,35 | 0,35 | — | 30 | 8 | 34,5 × 30 × 11,5 |
| Искра-112 | 2 | 12 | 20 | 0,03 | 0,3 | | | 35 | 8 | 36,5×30,5×12 |
| Искра-121 | 3 | 16 | 13 | 0,03 | 0,3 | | | 30 | 12 | 40,5×38,5×12,7 |
| Искра-122 | 5 | 16 | 23 | 0,02 | 0,2 | 0,3 | 0,5 | 30 | 15 | 44×33×12 |
| Искра-122—1 | 5 | 16 | 20 | 0,02 | 0,15 | | | 20 | | 30,5×36,5×12 |
| Искра-1122 | 6 | 12 | 19 | 0,03 | 0,3 | 0,3 | — | 30 | 12 | 41×40×13,5 |

вычислять значения величин $e^x$ и натуральные значения тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{th}\alpha$ и $\mathrm{arcth}\alpha$ и выполнять различные комбинированные вычисления.

Настольная ЭКВМ «Искра-110». На рис. 123 показана клавиатура машины «Искра-110». На ней можно выполнять с учетом знака и запятой четыре арифметических действия, умножение и деление чисел на константу и цепное накопление.

Для подготовки ЭКВМ «Искра-110» к работе необходимо после включения питания через 2—3 мин поставить кнопку (2) в крайнее нижнее положение, и после нажатия клавиши (*C*) на индикаторе во всех разрядах должны появиться нули. После этого проверяются все положения переключателя запятой (1); для этого следует установить его последовательно в положения 0, 2, 4 и 6 и он должен точно фиксироваться в каждом из этих четырех положений, а соответствующая цифра высвечивается в середине окна. После этого для контроля производится решение задачи, ответ которой известен.

При работе на ЭКВМ набор чисел производится последовательно по разрядам начиная со старшего; после набора целой части числа нажимают клавишу (,) и затем набирают его дробную часть.

**Примеры. 1.** Определнть $A = 131{,}4 + 89{,}9 - 0{,}21 = 221{,}09$.

При исходном положении машины:

1) устанавливают переключатель запятой (1) в положение (2);

2) на клавиатуре набирают первое слагаемое 131,4;

3) нажимают клавишу (+) и на клавиатуре набирают второе слагаемое 89,9 и после нажатия клавиши (=) на индикаторе будет высвечена сумма 221,3;

4) нажимают клавишу (—), на клавиатуре набирают вычитаемое 0,21 и, нажав клавишу (=), на индикаторе читают ответ 221,09.

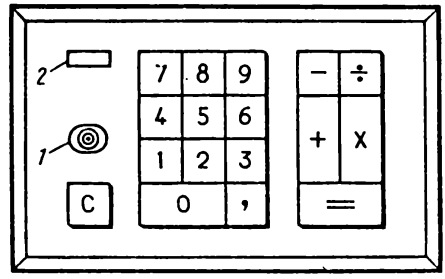



Рис. 123. Клавиатура настольной ЭКВМ семейства «Искра-110»:

*1* — клавиша переключения установки положения запятой; *2* — кнопка включения — выключения; 0, 1, 2, ... , 9 — десятичная наборная клавиатура; —— — клавиша ввода операции вычитания; ÷ — клавиша ввода операции деления; × — клавиша ввода операции умножения; = — клавиша результата введенной ранее операции; + — клавиша ввода операции сложения; , — клавиша установки запятой; С — клавиша общего сброса

**2.** Вычислить $A=[(17{,}21\times\times 3{,}204)/3{,}11]-0{,}9\approx 17{,}730$.

При исходном положении машины, установив переключатель запятой (1):

1) на клавиатуре набирают первый сомножитель 17,21 и нажимают клавишу (×);

2) на клавиатуре набирают второй сомножитель 3,204 и нажимают на клавишу (÷);

3) на клавиатуре набирают делитель 3,11 и после нажатия на клавишу (—) набирают вычитаемое 0,9; на индикаторе читают результат 17,730.

Настольная ЭКВМ «Искра-12М». На рис. 124 показана клавиатура ЭКВМ «Искра-12М». На ней можно кроме четырех арифметических действий производить и более сложные вычисления, встречающиеся в инженерно-технических и различных статистических расчетах.

При сложных вычислениях чисел на ЭКВМ семейства «Искра» следует учитывать, что каждая операция в машине от нажатия предыдущей клавиши выполняется только в том случае, если ранг операции от нажатия следующей клавиши равен или меньше ранга этой операции. Например, ранг таких операций, как сложение и вычитание, считается ниже ранга операций деления и умножения. Если ранг последующей операции выше ранга предыдущей операции, то первая операция в машине не выполняется.

Для накопления в машинах семейства «Искра» результатов (с учетом знаков алгебраического накопления) нескольких независимых вычислений следует нажимать клавишу накопления суммы (+) каждый раз после нажатия клавиши окончательного результата (=). При этом

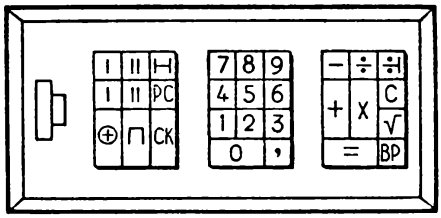



Рис. 124. Клавиатура настольной ЭКВМ семейства «Искра-12М»:

↓ — клавиша вызова числа из регистра;

↑ — клавиша передачи числа в регистр I;

⇑ — клавиша передачи числа в регистр II;

Н — клавиша перемены знака числа в регистре клавиатуры; РС — клавиша разрядного сброса; 0, 1, 2, ... , 9 — десятичная наборная клавиатура; − — клавиша ввода операции вычитания; ÷ — клавиша ввода операции деления; ÷Н — клавиша ввода операции обратного деления; С — клавиша общего сброса; √ — клавиша ввода операции извлечения корня квадратного; ВР — клавиша вызова содержимого регистра I; × — клавиша ввода операции умножения; = — клавиша вызова результата на индикатор; + — клавиша ввода операции сложения; , — клавиша установки запятой; СК — клавиша сброса регистра клавиатуры; П — клавиша ввода операции умножения на постоянную величину; + — клавиша ввода операции наполнения суммы; ⇓ — клавиша вызова числа из регистра П; ⊡ — прерыватель установки запятой

накапливаемый результат будет автоматически появляться в окнах цифрового индикатора.

**Примеры. 1.** Вычислить $A=(3003{,}4^2+3406{,}6^2-2835{,}8^2)/$ $/6813{,}2\approx 1846{,}94$.

Включив машину в электросеть, спустя 3 мин приступают к вычислению:

1) на клавиатуре набирают число 3003,4 и последовательно нажимают на клавиши (×), (=) и (+);

2) на клавиатуре набирают число 3406,6 и последовательно нажимают на клавиши (×), (=) и (−);

3) на клавиатуре 6 набирают вычитаемое 2835,8 и последовательно нажимают клавиши (÷), (=) и (↓);

4) на клавиатуре набирают делитель 6813,2 и последовательно нажимают клавиши (=), (↑), (↓) и (=).

После этих действий на индикаторе читают значение величины $A = 1846{,}94$.

2. Вычислить $q =$

$$= \sqrt{3003{,}4^2+1846{,}94^2} \approx 2368{,}38 .$$

Включив машину в электросеть, спустя 3 мин приступают к вычислению:

1) на клавиатуре набирают первое слагаемое 3003,4 и последовательно нажимают клавиши (×), (=) и (+);

2) на клавиатуре набирают второе слагаемое 1846,94 и последовательно нажимают клавиши (×), (=) и (√); на индикаторе прочитывают значение величины $q \approx 2368{,}38$.

Микрокалькуляторы. Карманные электронные вычислительные машины получили название микрокалькуляторов — МК. Они по своим функциональным свойствам делятся на *простые, инженерные* и *программированные*.

*Простые МК,* основные характеристики которых показаны в табл. 3, предназначены преимущественно для выполнения четырех арифметических действий и вычислений с константами, а модели, имеющие дополнительные регистры памяти, позволяют извлекать корни четной степени,

находить число, обратное заданному, а некоторые из них позволяют автоматически выполнять процентные вычисления.

*Инженерные МК* (см. табл. 4), кроме действий, выполняемых на простых МК, позволяют, располагая соответствующими подпрограммами, вычислять различные элементарные функции — показательные, логарифмические, прямые и обратные тригонометрические функции для аргументов (углов), выраженных в градусной или радианной мерах, и ряд других функций. На МК моделей Б3-36 и Б3-38 можно автоматически производить перевод градусов в радианы и наоборот.

*МК «Электроника»*, рассчитанные преимущественно на использование их при температуре от +10 до +35°С, работают неограниченное время от блока питания БП2-3, подключаемого непосредственно в розетку электросети переменного тока в 220 В или в течение двух часов при питании их встроенной батареей аккумуляторов Д-0,55С. И только МК

Таблица 3

**Технико-эксплуатационные характеристики простых МК «Электроника»**

| Модель МК | Тип индикатора | Число клавиш | Наличие клавиш | | | | | Дополнительные регистры памяти | Источник питания | Потребляемая мощность, Вт/ч | Масса, кг | Габариты, см |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | % | $\sqrt{}$ | $^1/_x$ | \|−\| | ↔ | | | | | |
| Б3-04 | ЖК | 17 | — | — | — | — | — | — | Б | 0,03 | 0,2 | 12×8×2 |
| Б3-09М | КЛИ | 20 | + | — | + | — | — | — | Б,С | 0,4 | 0,3 | 16×9×6 |
| Б3-14 | КЛИ | 20 | — | + | + | — | — | — | Б,С | 0,4 | 0,3 | 13×7×3 |
| Б3-14М | КЛИ | 20 | — | + | + | — | — | — | Б,С | 0,4 | 0,3 | 13×7×3 |
| Б3-14К | КЛИ | 21 | — | + | + | — | — | — | Б,С | 0,35 | 0,3 | 13×7×3 |
| Б3-23 | СИД | 18 | + | — | — | — | — | — | Б,С | 0,45 | 0,2 | 16×8×3 |
| Б3-24Г | СИД | 20 | — | — | — | — | — | П+ | Б,С | 0,45 | 0,2 | 16×8×3 |
| Б3-25А | КЛИ | 19 | — | — | — | — | — | — | Б,С | 0,7 | 0,3 | 14×8×3 |
| Б3-26 | КЛИ | 25 | + | + | + | + | + | П+, П− | Б,С | 0,7 | 0,3 | 14×8×3 |
| Б3-30 | ЖК | 20 | + | + | + | — | — | — | Ак | 0,01 | 0,1 | 11×7×2 |
| Б3-39 | ЖК | 20 | + | + | + | — | — | — | Б,С | 0,01 | 0,1 | 11×7×1 |
| С3-27 | КЛИ | 18 | — | — | — | — | — | — | Б,С | 0,4 | 0,2 | 17×8×2 |
| С3-33 | СИД | 25 | + | — | + | + | + | П+, П− | С,Ак | 0,5 | 0,2 | 16×9×4 |
| МК-53 | ЖК | 26 | + | + | + | + | + | П+, П− | Б | 0,05 | 0,06 | 10×6×1 |
| МК-57 | СИД | 25 | + | + | + | + | + | П+, П− | Б,С | 0,15 | 0,06 | 16×8×3 |
| МК-60 | ЖК | 25 | + | + | — | + | — | П+, П− П Х | Б | 0,06 | 0,03 | 12×7×1 |

*Примечание.* ЖК — индикатор на жестких кристаллах; КЛИ — катодолюминесцентный индикатор; СИД — светоизлучающие диоды; Б — сухие элементы питания; С — внешняя сеть; Ак — аккумулятор Д-0,1.

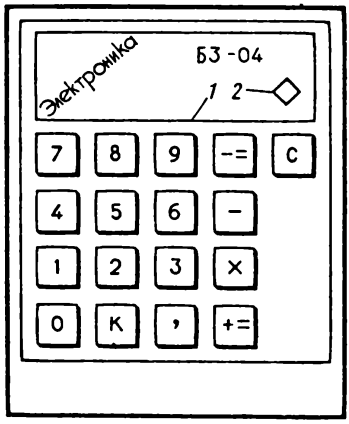



Рис. 125. Общий вид простого микрокалькулятора «Электроника Б3-04»:

*1* — штора, закрывающая окна индикатора; *2* — место нажатия (кнопка) для включения МК; С — клавиша общего сброса и установки МК в исходное положение; + — клавиша ввода операции деления; × — клавиша ввода операции умножения; + = — клавиша ввода операции сложения и выполнения операции; , — клавиша установки запятой при вводе дробных и смешанных чисел; К — клавиша установки режима вычисления с константой

«Электроника» В3-36 и Б3-37 работают от батареи аккумулятора, соответственно Д-05 и А-316. Подзарядка таких батарей производится от блока питания; сигналом к этому служит появление запятых во всех девяти разрядах вакуумного люминесцентного индикатора.

*Простой МК «Электроника* Б3-04». Этот МК, как и все другие модели простых МК, имеют восьмиразрядный индикатор, позволяющий производить вычисления с 7—8 значащими цифрами.

На МК «Электроника Б3-04», клавиатура которого показана на рис. 125, можно производить четыре арифметических действия во всех комбинациях с положительными и отрицательными целыми и дробными числами.

**Примеры 1.** Вычислить $A = (164/3) + 16{,}75 \approx 71{,}42$.

После нажатия места (2) и клавиши (С):

1) на клавиатуре набирают делимое 164 и нажимают клавишу (—);

2) на клавиатуре набирают делитель 3 и нажимают на клавишу (+=);

3) на клавиатуре набирают целую часть слагаемого 16, нажимают на клавишу (,) и набирают дробную часть слагаемого 75. После нажатия на клавишу (+=) на индикаторе читают результат, округляя его до сотых долей: 71,42.

2. Вычислить $A = 12^2 + \frac{211}{4} - 11{,}31 \approx 185{,}44$.

После нажатия места (2) и клавиши (5):

1) на клавиатуре набирают слагаемое 12 и нажимают клавишу (×);

2) нажимают клавишу (+=) и набирают делитель 211;

3) нажимают на клавишу (÷) и, набрав делитель 4, нажимают на клавишу (+=);

4) нажимают на клавишу (—=) и набирают вычитаемое 11,31.

На индикаторе прочитывают результат, округленный до сотых долей: 185,44.

*Инженерный восьмиразрядный МК «Электроника* Б3-18М». При

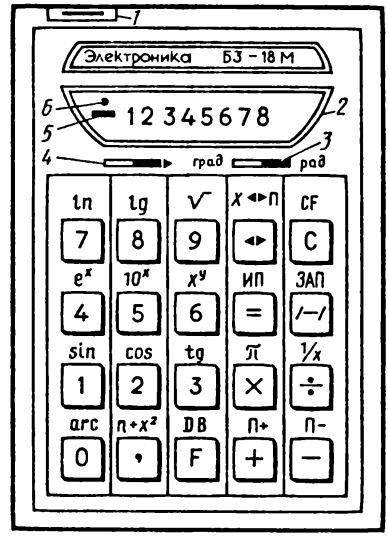



Рис. 126. Общий вид инженерного микрокалькулятора «Электроника БЗ-18М»:

*1* — место (разъем) для подключения сетевого блока питания БП2-3М; *2* — индикатор; *3* — переключатель на градусы и радианы; *4* — переключатель питания; *5* — индикация знака числа; *6* — признак переполнения или некорректно выполненной операции; , — клавиша установки запятой; 0, 1, 2, ... , 9 — десятичная наборная клавиатура; ↔ — клавиша перестановки числа, находящегося в рабочем положении, или числа, записанного на индикаторе; С — клавиша сброса чисел, совмещенной функции и переполнения; = — клавиша выдачи результата действий и установки режима константы; |——| — клавиша изменения знака числа, ×, ÷, + — — клавиши ввода операций соответственно умножения, деления, сложения и вычитания; F — клавиша перевода МК в режим каждой из совмещенных функций, записанных над клавишами; ln и lg — клавиши ввода операции нахождения натурального десятичного логарифмов числа; $\sqrt{\ }$ — клавиша ввода операции извлечения корня квадратного; $x \leftrightarrow П$ — клавиша перестановки числа, высвеченного на индикаторе, и числа, записанного в регистре памяти; CF — клавиша устранения режима совмещенной функции; $e^x$, $10^x$, $x^y$ — клавиши ввода операций возведения чисел в степень; ИП — клавиша извлечения числа из регистра памяти; ЗАП — клавиша записи числа, высвеченного на индикаторе, в регистр памяти; sin, cos, $tg_i$ — клавиши ввода операции нахождения соответствующей тригонометрической функции; π — клавиша извлечения из памяти числа π; $1/x$ — клавиша ввода операции нахождения обратной величины; arc — клавиша ввода операции нахождения обратных тригонометрических функций; $n + x^2$ — клавиша ввода операции добавления к содержимому в памяти квадрата числа, записанного на индикаторе; DB — клавиша исправления ошибочной последней цифры; П+ — клавиша ввода операции прибавления числа, высвеченного на индикаторе, к числу, записанному в памяти; П — — клавиша ввода операции вычитания числа, высвеченного на индикаторе, из числа, записанного в памяти

работе на этом МК ввод данных и команд осуществляется, как и на всех других МК (табл. 4), вручную 20 клавишами (рис. 126), расположенными на пульте управления; из них каждая выполняет две функции: для хранения в нем данных и накопления результатов служит регистр памяти, а для хранения промежуточных результатов вычислений, что избавляет от записи их, — рабочий регистр. На этом МК можно производить четыре арифметических действия, возведение в степень и извлечение корней, вычисление обратных величин, десятичных логарифмов и натуральных значений тригонометрических функций с предварительным переводом градусов и минут в секунды и производить ряд других операций.

Для подготовки МК к вычислениям необходимо переключатель (4) (см. рис. 126) отвести в сторону стрелки, если он получает питание от аккумулятора Д-0,55С, а если от блока БП2-3М, переключатель последнего должен быть отведен в сторону Р (работа). После этого необходимо произвести освобождение регистров индикации, констант и памяти путем последовательного нажатия на клавиши (С) (два раза) и «ЗАП». После этих действий в первом разряде индикатора 2 должен появиться 0, что укажет на готовность микрокалькулятора к работе.

Таблица 4

**Технико-эксплуатационные характеристики инженерных МК «Электроника»**

| Модель МК | Тип индикатора* | Аргументы тригонометрических функций | Перевод градусов в радианы и наоборот | Вычисления со скобками | Статистические функции | Источник питания | Потребляемая мощность, Вт/ч | Масса, кг | Габариты, см |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Б3-18 | ВЛД | град<br>рад | — | — | — | С, Ак | 1,0 | 0,4 | 16×9×5 |
| Б3-18А | ВЛД | град<br>рад | — | — | — | С, АК, Б | 1,0 | 0,4 | 16×9×3 |
| Б3-18М | ВЛД | град<br>рад | — | — | — | С, АК, Б | 1,0 | 0,3 | 17×8×3 |
| Б3-19М | СИД | град | — | — | — | С, Ак | 0,8 | 0,4 | 17×9×4 |
| Б3-32 | ВЛД | град<br>рад | — | + | — | С, Б | 0,3 | 0,3 | 12×7×3 |
| Б3-35 | ВЛД | град | — | + | — | С, Ак | 0,3 | 0,25 | 14×8×2 |
| Б3-36 | ВЛД | град<br>рад | + | + | — | С, Ак | 0,35 | 0,20 | 15×8×2 |
| Б3-37 | СИД | град<br>рад | — | + | — | С, Б | 0,3 | 0,20 | 16×8×9 |
| Б3-38 | ЖК | град<br>рад | — | + | + | Б | 0,6 | 0,05 | 6×9×6 |
| С3-15 | СИД | рад | — | + | + | С, Ак | 1,2 | 0,4 | 17×9×32 |
| МК-51 | ЖК | град<br>рад | — | | — | Б | 0,6 | 0,1 | 13×7×8 |

* См. табл. 3.

Для решения задач с тригонометрическими функциями МК семейства «Электроника» должен быть исследован на определение точности результатов и диапазона углов. Так, например, на МК «Электроника Б3-18М» нельзя производить вычисления, если встречается $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{arctg}\,\alpha$ в диапазоне $\alpha = 86{-}94°$, а для МК «Электроника Б3-18А» — в диапазоне $\alpha = 89{,}9{-}90°$.

Перед началом вычислений машина должна быть приведена в рабочее состояние. Для этого необходимо включить электропитание, а затем, нажимая на клавишу (С) три раза, снять режим переполнения машины, показания ее индикатора и регистра и освободить память машины, для чего последовательно нажать по одному разу на клавиши (С), (F) и (ЗАП); после этого в памяти запишется нуль.

Ввод в машину дробного числа начинается с нажатия клавиши (,),

а смешанного — с ввода целой его части; перед набором дробной части нажимается клавиша (,).

Регистр и память машины может содержать не более восьми цифр, а ошибочно набранная лишняя цифра на индикаторе не высвечивается.

**Пример. 1.** Определить $A = [(8{,}318 + 0{,}216 - 2{,}112)\cdot 4]/7{,}1 \approx 3{,}618$.

Порядок действий приведен в таблице:

| Последовательность набора чисел и нажатия клавиш | Показатель индикатора | Последовательность набора чисел и нажатия клавиш | Показатель индикатора |
|---|---|---|---|
| 1) 8,318(+)0,216(−);<br>2) 2,112 (×) | 8,534<br>6,422 | 3) 4 (÷)<br>4) 7,1 (=) | 25,688<br>3,618 |

2. Определить $A = (214{,}9 + 131{,}3)/(41{,}5 - 3\sqrt{79}) \approx 23{,}34$.

Порядок действий приведен в таблице:

| Последовательность набора чисел и нажатия клавиш | Показатель индикатора |
|---|---|
| 79(F)(√)(×)3(−)41,5(=)(F) (ЗАП)<br>214,9(+)131,3(÷)(F) (ИП) (=) | 14,8354<br>23,33608 |

*Примечания:* 1. В заводских инструкциях, прилагаемых к ЭКВМ и МК, приводятся правила работы с ними.

2. При вычислениях на ЭКВМ и МК следует руководствоваться правилами приближенных вычислений.

Вычисления степенных функций ($e^x$, $10^x$, $x^y$), натуральных (ln) и десятичных (lg) логарифмов и тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$) следует начинать с набора на клавиатуре МК значения аргумента, затем нажатия клавиши (F) и после нажатия клавиши соответствующей функции на индикаторе высвечивается результат вычисления.

Вычисление тригонометрических функций можно производить для аргументов, выраженных в радианах или градусах. В соответствии с этим и устанавливается переключатель (3) (см. рис. 126), а знак вычисляемой функции будет иметь соответствующий значению заданного аргумента.

При вычислении обратных тригонометрических функций вначале набирается значение аргумента, а затем последовательно нажимаются клавиши (F), (arc) и клавиши соответствующей функции: (sin), (cos) или (tg).

Вычисление антилогарифмов производят, пользуясь выражениями $e^{\ln x} = x$ и $10^{\lg x} = x$. При этом вначале набирают на клавиатуре МК значение логарифмов, затем последовательно нажимают клавиши (F) и ($e^x$), если вычисляются натуральные антилогарифмы, а при вычислении десятичных логарифмов нажимают клавиши (F) и ($10^x$). После этих операций на индикаторе высвечивается значение $x$.

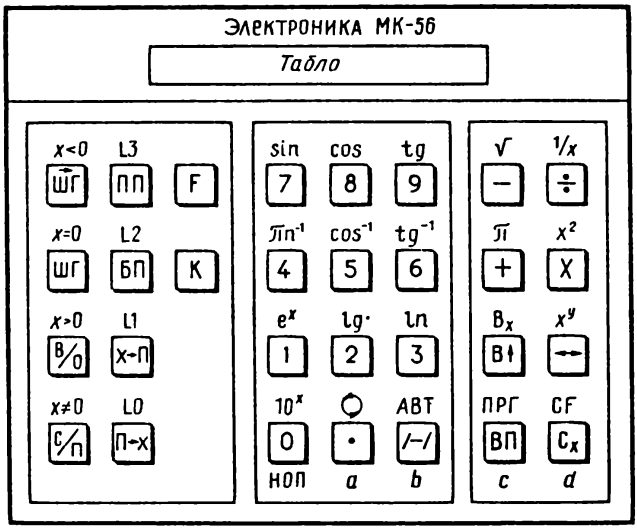



Рис. 127

Кроме простых и инженерных калькуляторов широкое применение имеют программируемые микрокалькуляторы, предназначенные для автоматизации вычислений при решении научно-технических, статистических, инженерных и других задач для различных отраслей народного хозяйства. Они позволяют производить вычисления в автоматическом режиме, по заранее заданной программе объемом в несколько десятков шагов; их составляет сам вычислитель или используются уже существующие.

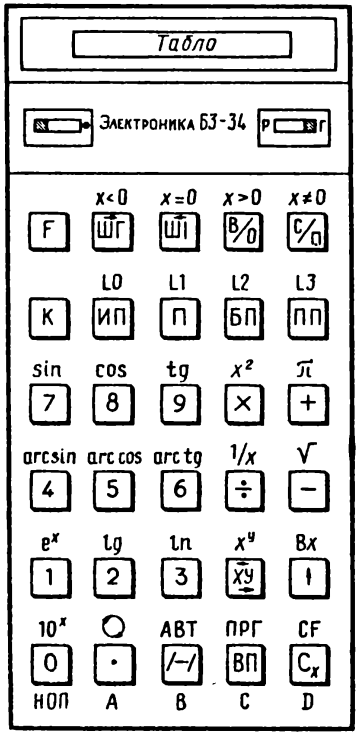



Рис. 128

Из отечественных программируемых МК теперь наиболее производительными являются МК типа «Электроника Б3-34 и МК-56». Они имеют по 98 шагов программы, поэтому составление программы для них требует разбиения ее на отдельные блоки и решение конкретной задачи по частям.

На рис. 127 показано расположение и символика клавиш МК-56, а на рис. 128 — МК Б3-34. Они работают в двоично-десятичном ходе и позволяют производить вычисления с восьмиразрядными десятичными числами, а так как запятая занимает место одного

разряда, то максимальное число разрядов не превышает семи.

Если вычисление производится с приближенными значениями, то в этом случае необходимо пользоваться правилами приближенных вычислений (см. п. 32.5).

Правила работы с указанными микрокалькуляторами приводятся в заводских инструкциях.

# IX. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

## 35. ПРИБЛИЖЕННОЕ ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

**35.1. Уравнение с одним неизвестным.** Иногда удается данное уравнение $f(x)=0$ представить в виде $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, и тогда решение уравнения сводится к отысканию абсцисс точек пересечения кривых

$$y=\varphi_1(x) \text{ и } y=\varphi_2(x).$$

**Пример.** Решить уравнение $2^x=4x$.

Строим кривую $y=2^x$ и прямую $y=4x$ и ищем точки их пересечения. На рис. 129 видно, что одним значением $x$ является 4, а другое находится между 0 и 1. На миллиметровой бумаге, выбрав соответственно масштабы, можно получить приближенное значение второго корня.

**35.2. Уравнение с двумя неизвестными.** Если даны два уравнения $f_1(x, y)=0$ и $f_2(x, y)=0$, то, рассматривая каждое из них как уравнение линий на плоскости, сводим задачу об отыскании $x$ и $y$ к нахождению абсцисс и ординат точек пересечения вышеуказанных линий.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=5; \\ x^2-y=1. \end{cases}$$

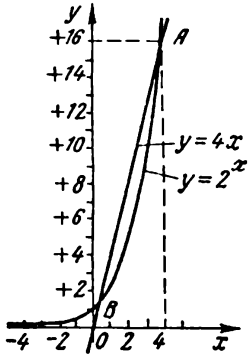



Рис. 129

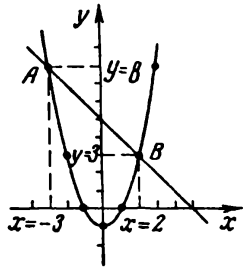



Рис. 130

Первое из этих уравнений есть уравнение прямой, второе — уравнение параболы. Построив эти линии на чертеже, находят их точки пересечения, а затем и координаты этих точек (рис. 130).

## 36. ГРАФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В ряде случаев функции могут быть заданы графически и требуется найти их производные или интегралы. Ниже указывается, как следует поступить для решения таких задач.

**36.1. Графическое дифференцирование.** Построение графика производной по заданному графику функции называется *графическим дифференцированием.*

а) Разобьем участок $AB$ графика функции $y=f(x)$ на несколько неравных частей прямыми $x=x_1$, $x=x_2$, ... (на рис. 131 на четыре части). Проведем касательные к кривой в точках $M_1M_2$... — серединах полученных участков кривой.

б) На оси $Ox$ влево от начала координат на расстоянии единицы масштаба строим точку $P$ (полюс) и из нее проводим прямые $PQ_1$, $PQ_2$, $PQ_3$, ..., соответственно параллельные касательным к кривой в точках $M_1$, $M_2$, $M_3$, ..., до пересечения с осью $Oy$.

в) Через полученные точки $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, ... проводим прямые, параллельные оси $Ox$. Точки $M_1'$, $M_2'$, $M_3'$, ... пересечения этих прямых с соответствующими перпендикулярами, опущенными из точек $M_1$, $M_2$, $M_3$, ... на ось $Ox$, и являются точками графика производной.

г) Кривая $M_1'M_2'M_3'M_4'$ является графиком функции $y=f'(x)$.

**36.2. Приближенное вычисление определенных интегралов.** Промежуток интегрирования $[a, b]$ разобьем на $n$ равных частей; обозначим точки деления через $x_0=a; x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}; x_n=b$; вычислим затем значения функции $y=f(x)$ в точках деления и обозначим эти значения функции соответственно так: $y_0; y_1; y_2; \ldots; y_{n-2}; y_{n-1}; y_n$. После выполнения указанной работы используем одну из следующих формул:

1. *Формула прямоугольников*

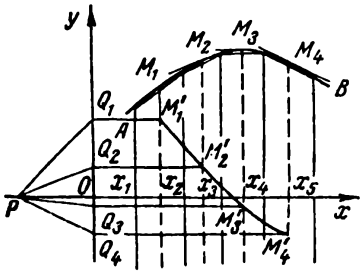



Рис. 131

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-2}+y_{n-1}).$$

2. *Формула трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n).$$

3. *Формула Симпсона (формула парабол)* (здесь $n$ обязательно число четное)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})+\right.$$
$$\left.+2(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})\right].$$

Все три формулы тем точнее, чем больше число $n$, на которое делится отрезок $[a, b]$. При одном и том же числе $n$ наименее точна формула прямоугольников и наиболее точна формула Симпсона. Погрешность формулы прямоугольников равна $\frac{\Delta x^2}{24}(b-a)\,M_2$, формулы трапеций равна $\frac{\Delta x^2}{12}(b-a)M_2$, формулы Симпсона равна $\frac{\Delta x^4}{180}(b-a)M_4$, где $M_2 \geqslant |f''(x)|$, а $M_4 \geqslant |f^{(IV)}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

**36.3. Графическое интегрирование.** Если функция $y=f(x)\geqslant 0$ задана графически на отрезке $[a, b]$ (кривая $MN$ на рис. 132), то можно найти графически и интеграл

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

который численно равен площади криволинейной трапеции $aMANb$ (см. п. 30.4). Для этого по оси $Ox$ влево от начала координат откладываем отрезок $OP=1$ ед. масштаба. Точка $P$ называется полюсом. Затем проводим прямую $FG$, параллельную оси $Ox$ и пересекающую кривую $y=f(x)$, так, чтобы площади заштрихованных на рис. 132 криволинейных фигур $AMF$ и $ANG$ над и под кривой были приближенно равны между собой. Продолжаем прямую $FG$ до пересечения с осью $Oy$ в точке $T$, соединяем прямой линией полюс $P$ с точкой $T$ и из точки $a$ проводим прямую, параллельную $PT$, до пересечения с прямой $x=b$ в точке $Q$. Длина отрезка $bQ$ будет численно равна величине $\int_a^b f(x)\,dx$.

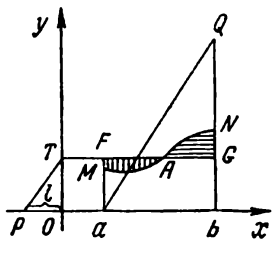



Рис. 132

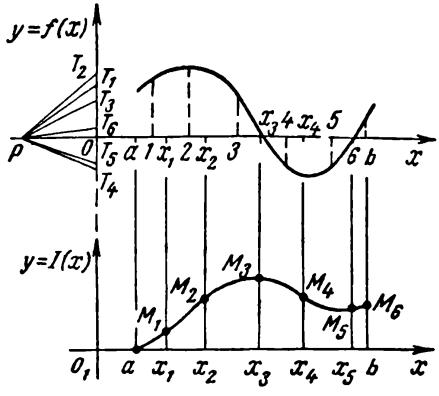



Рис. 133

Если отрезок $[a, b]$ не очень мал, то проведение на глаз прямой $FG$ может привести к значительной ошибке. Поэтому в целях уточнения построения поступают следующим образом.

1. Разбивают промежуток интегрирования $[a, b]$ на $n$ частичных промежутков (не обязательно равных) точками деления $x_1, x_2, x_3, \ldots, \ldots, x_{n-1}$. Причем эти точки деления стараются обычно выбрать так, чтобы на каждом частичном промежутке подынтегральная функция $f(x)$ была монотонной (рис. 133) и в число точек деления были включены все точки пересечения кривой $y=f(x)$ с осью $Ox$. Чем больше точек деления, тем точнее результат.

2. В середине каждого частичного промежутка (обозначим середины цифрами 1, 2, 3, ...) проводят перпендикуляры к оси $Ox$ и через точки их пересечения с кривой $y=f(x)$ проводят прямые, параллельные оси $Ox$, до пересечения с осью $Oy$ в точках $T_1, T_2, T_3, \ldots$ (цифры у буквы $T$ соответствуют номеру частичного промежутка). Точку $P$ (полюс) соединяют прямыми с точками $T_1, T_2, T_3, \ldots$ .

3. Для ясности построим новую систему координат, ось $O_1y$ которой совпадает со старой осью $Oy$, а ось $O_1x \| Ox$. Наносим на оси $O_1x$ точки $a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (см. рис. 123). Затем из точки $a$ проводим прямую, параллельную прямой $PT_1$, до пересечения с прямой $x=x_1$ в точке $M_1$, из точки $M_1$ проводим прямую, параллельную прямой $PT_2$, до пересечения с прямой $x=x_2$ в точке $M_2$ и т. д. В результате такого построения получим точки $a, M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n$, причем длина отрезка $x_1M_1$ будет численно равна интегралу $\int\limits_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$, длина отрезка $x_2M_2$ — интегралу $\int\limits_a^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$, длина отрезка $x_3M_3$ — интегралу $\int\limits_a^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x$, длина отрезка $bM_n$ — интегралу $\int\limits_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Соединяя плавной кривой точки $a, M_1, M_2, \ldots, M_n$, получим график одной из первообразных функций заданной функции $y=f(x)$, т. е. график так называемого интеграла с переменным верхним пределом:

$$I(x)=\int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 37. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

**37.1. Метод проб.** Если требуется найти корни уравнения $f(x)=0$, то эта задача может рассматриваться как нахождение точек пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс.

Если $f(x)$ — непрерывная на отрезке функция и имеет противоположные знаки в точках $x_1$ и $x_2$, то между этими точками лежит

точка $x_3$, в которой $f(x_3)=0$, т. е. $x_3$ есть один из искомых корней уравнения. Например, пусть имеем:

$$f(x)=x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0.$$

Замечаем, что $f(0)=-1{,}4$; $f(1)=1{,}6$. Следовательно, между нулем и единицей имеется корень уравнения. Если внутри отрезка $[x_1, x_2]$ находится единственный корень $x_3$ уравнения $f(x)=0$, то отрезок $[x_1, x_2]$ называется интервалом *изоляции* данного корня.

Далее производится «сужение» интервала изоляции корня.

Испытаем, например, значения $f(0{,}5)$ и $f(0{,}7)$:

$$f(0{,}5)=-0{,}55;\ f(0{,}7)=0{,}112.$$

Значит, корень лежит между 0,5 и 0,7. Таким образом, здесь можно приближенно принять за значение корня

$$x\approx\frac{0{,}5+0{,}7}{2}\approx 0{,}6.$$

Дальше это значение уточнится, получим $x=0{,}675$ и т. д.

**37.2. Метод хорд.** Если на интервале изоляции корня график функции $y=f(x)$ заменить ее хордой, то точка пересечения хорды с осью абсцисс дает приближенное значение корня.

Если интервал изоляции есть $[x_1, x_2]$, то хорда имеет уравнение

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

как уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Полагая $y=0$, находим абсциссу точки пересечения хорды с осью $Ox$:

$$x'=x_1-\frac{f(x_1)}{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}.$$

**Пример.** $f(x)=x^3+1{,}1x^2+0{,}9x-1{,}4=0$. Интервал изоляции $[0;\ 1]$, тогда

$$x'=1-\frac{f(1)}{\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}}=1-\frac{1{,}6}{1{,}6+1{,}4}\approx 0{,}467.$$

Если теперь взять интервал изоляции $[0{,}467;\ 1]$, то

$$x''=1-\frac{f(1)}{\dfrac{f(1)-f(0{,}467)}{1-0{,}467}}\approx 0{,}617.$$

Дальнейшие уточнения получаются аналогичным образом.

**37.3. Метод Ньютона (касательных).** Если на интервале изоляции заменить линию $y=f(x)$ ее касательной, то корень уравнения $f(x)=0$ приближенно находится как абсцисса точки пересечения касательной к линии $y=f(x)$ с осью абсцисс.

Этот и многие другие методы приближенного решения уравнения можно найти в курсах математического анализа.

# ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

## Степени, корни, длины окружностей, площади кругов и обратные величины*

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[4]{n}$ | $\sqrt[5]{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $\frac{\pi n^3}{6}$ | Сторона описанного многоугольника | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1000}{n^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 3,142 | 0,79 | 0,5 | — | — | 1000,000 | 1,0000 |
| 2 | 4 | 8 | 414 | 260 | 189 | 149 | 6,283 | 3,14 | 4,2 | — | 500,00 | 250,000 | 0,7071 |
| 3 | 9 | 27 | 732 | 442 | 316 | 246 | 9,42$\bar{5}$ | 7,07 | 14,1 | 1,73205 | 333,33 | 111,111 | 5774 |
| 4 | 16 | 64 | 2,000 | 587 | 414 | 320 | 12,566 | 12,57 | 33,5 | 1,00000 | 250,00 | 62,500 | 5000 |
| 5 | 25 | 125 | 236 | 710 | 495 | 380 | 15,708 | 19,63 | 65,4 | 0,72654 | 200,00 | 40,000 | 4472 |
| 6 | 36 | 216 | 2,449 | 1,817 | 1,565 | 1,431 | 18,85$\bar{0}$ | 28,27 | 113,1 | 0,57735 | 166,67 | 27,778 | 0,4082 |
| 7 | 49 | 343 | 646 | 913 | 627 | 476 | 21,991 | 38,48 | 179,6 | 48158 | 142,86 | 20,408 | 3780 |
| 8 | 64 | 512 | 828 | 2,000 | 682 | 516 | 25,133 | 50,27 | 268,1 | 41421 | 125,00 | 15,625 | 3536 |
| 9 | 81 | 729 | 3,000 | 080 | 732 | 55$\bar{2}$ | 28,274 | 63,62 | 381,7 | 36397 | 111,11 | 12,346 | 3333 |
| 10 | 100 | 1 000 | 162 | 154 | 778 | 58$\bar{5}$ | 31,416 | 78,54 | 523,6 | 32492 | 100,00 | 10,000 | 3162 |
| 11 | 121 | 1 331 | 3,317 | 2,224 | 1,821 | 1,615 | 34,558 | 95,03 | 696,9 | 0,29363 | 90,91 | 8,264 | 0,3015 |
| 12 | 144 | 1 728 | 464 | 289 | 861 | 644 | 37,699 | 113,10 | 904,8 | 26795 | 83,33 | 6,944 | 2887 |
| 13 | 169 | 2 197 | 606 | 351 | 899 | 670 | 40,841 | 132,73 | 1150,3 | 24639 | 76,92 | 5,917 | 2774 |
| 14 | 196 | 2 744 | 742 | 410 | 934 | 695 | 43,982 | 153,94 | 14,368 | 22824 | 71,43 | 5,102 | 2673 |
| 15 | 225 | 3 375 | 873 | 466 | 968 | 719 | 47,124 | 176,71 | 1767,1 | 21256 | 66,67 | 4,444 | 2582 |
| 16 | 256 | 4 096 | 4,000 | 2,520 | 2,000 | 1,741 | 50,265 | 201,06 | 2144,7 | 0,19891 | 62,50 | 3,906 | 0,2500 |
| 17 | 289 | 4 913 | 123 | 571 | 031 | 762 | 53,407 | 226,98 | 2572,4 | 18706 | 58,82 | 3,460 | 2425 |
| 18 | 324 | 5 832 | 243 | 621 | 060 | 783 | 56,549 | 254,47 | 3053,6 | 17633 | 55,56 | 3,086 | 2357 |
| 19 | 361 | 6 859 | 359 | 668 | 088 | 802 | 59,690 | 283,53 | 3591,4 | 16687 | 52,63 | 2,770 | 2294 |
| 20 | 400 | 8 000 | 472 | 714 | 11$\bar{5}$ | 821 | 62,832 | 314,16 | 4188,8 | 15838 | 50,00 | 2,500 | 2236 |

* Способ пользования табл. 1 см. с. 316.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 441 | 9 261 | 4,583 | 2,759 | 2,141 | 1,838 | 65,973 | 346,36 | 4849,0 | 0,15073 | 47,62 | 2,268 | 0,2182 |
| 22 | 484 | 10 648 | 690 | 802 | 166 | 856 | 69,115 | 380,13 | 5575,3 | 14378 | 45,45 | 2,066 | 2132 |
| 23 | 529 | 12 167 | 796 | 844 | 190 | 872 | 72,257 | 415,48 | 6370,6 | 13744 | 43,48 | 1,890 | 2085 |
| 24 | 576 | 13 824 | 899 | 884 | 213 | 888 | 75,398 | 452,39 | 7238,2 | 13165 | 41,67 | 1,736 | 2041 |
| 25 | 625 | 15 625 | 5,000 | 924 | 236 | 904 | 78,540 | 490,87 | 8181,2 | 12633 | 40,00 | 1,600 | 2000 |
| 26 | 676 | 17 576 | 5,099 | 2,962 | 2,258 | 1,919 | 81,68 | 530,9 | 9202,8 | 0,11991 | 38,46 | 1,479 | 0,1961 |
| 27 | 729 | 19 683 | 196 | 3,000 | 280 | 933 | 84,82 | 572,6 | 10306,0 | 11688 | 37,04 | 3717 | 1925 |
| 28 | 784 | 21 952 | 292 | 037 | 300 | 947 | 87,96 | 615,8 | 11494,0 | 11267 | 35,71 | 2755 | 1890 |
| 29 | 841 | 24 389 | 385 | 072 | 321 | 961 | 91,11 | 660,5 | 12770,1 | 10876 | 34,48 | 1891 | 1857 |
| 30 | 900 | 27 000 | 477 | 107 | 340 | 974 | 94,25 | 706,9 | 14137,2 | 10510 | 33,33 | 1111 | 1826 |
| 31 | 961 | 29 791 | 5,568 | 3,141 | 2,360 | 1,987 | 97,39 | 754,8 | 15598,5 | 0,10169 | 32,26 | 1,0406 | 0,1796 |
| 32 | 1024 | 32 768 | 657 | 175 | 378 | 2,000 | 100,53 | 804,2 | 17157,3 | 09849 | 31,25 | 0,9766 | 1768 |
| 33 | 1089 | 35 937 | 745 | 208 | 397 | 012 | 103,67 | 855,3 | 18816,6 | 09549 | 30,30 | 9183 | 1741 |
| 34 | 1156 | 39 304 | 831 | 240 | 415 | 024 | 106,81 | 907,9 | 20579,5 | 09266 | 29,41 | 8651 | 1715 |
| 35 | 1225 | 42 875 | 916 | 271 | 432 | 036 | 109,96 | 962,1 | 22449,3 | 09000 | 28,57 | 8163 | 1690 |
| 36 | 1296 | 46 656 | 6,000 | 3,302 | 2,449 | 2,048 | 113,10 | 1017,9 | 24429,0 | 0,08749 | 27,78 | 0,7716 | 0,1667 |
| 37 | 1369 | 50 653 | 083 | 332 | 466 | 059 | 116,24 | 1075,2 | 26521,8 | 08511 | 27,03 | 7305 | 1644 |
| 38 | 1444 | 54 872 | 164 | 362 | 483 | 070 | 119,38 | 1134,1 | 28730,9 | 08286 | 26,32 | 6925 | 1622 |
| 39 | 1521 | 59 319 | 245 | 391 | 499 | 081 | 122,52 | 1194,6 | 31059,4 | 08073 | 25,64 | 6575 | 1601 |
| 40 | 1600 | 64 000 | 325 | 420 | 515 | 091 | 125,66 | 1256,6 | 33510,3 | 07870 | 25,00 | 6250 | 1581 |
| 41 | 1681 | 68 921 | 6,403 | 3,448 | 2,530 | 2,102 | 128,81 | 1320,3 | 36087,0 | 0,07677 | 24,39 | 0,5949 | 0,1562 |
| 42 | 1764 | 74 088 | 481 | 476 | 546 | 112 | 131,95 | 1385,4 | 38792,4 | 07494 | 23,81 | 5669 | 1543 |
| 43 | 1849 | 79 507 | 557 | 503 | 561 | 122 | 135,09 | 1452,2 | 14629,8 | 07319 | 23,26 | 5408 | 1525 |
| 44 | 1936 | 85 184 | 633 | 530 | 576 | 132 | 138,23 | 1520,5 | 44602,2 | 07152 | 22,73 | 5165 | 1508 |
| 45 | 2025 | 91 125 | 708 | 557 | 590 | 141 | 141,37 | 1590,4 | 47712,9 | 06993 | 22,22 | 4938 | 1491 |
| 46 | 2116 | 97 336 | 6,782 | 3,583 | 2,604 | 2,145 | 144,51 | 1661,9 | 50965,0 | 0,06840 | 21,74 | 0,4726 | 0,1474 |
| 47 | 2209 | 103 823 | 856 | 609 | 618 | 160 | 147,65 | 1734,9 | 54361,6 | 06694 | 21,28 | 4527 | 1459 |
| 48 | 2304 | 110 592 | 928 | 634 | 632 | 169 | 150,80 | 1809,6 | 57905,8 | 06554 | 20,83 | 4340 | 1443 |
| 49 | 2401 | 117 649 | 7,000 | 659 | 646 | 178 | 153,94 | 1885,7 | 61600,9 | 06420 | 20,41 | 4165 | 1429 |
| 50 | 2500 | 125 000 | 071 | 684 | 659 | 187 | 157,08 | 1963,5 | 65449,9 | 06291 | 20,00 | 4000 | 1414 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\sqrt{n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1000}{n^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2601 | 132 651 | 7,141 | 22,58 | 3,708 | 7,990 | 17,213 | 2,672 | 160,2 | 2043 | 19,61 | 0,3845 | 0,1400 |
| 52 | 2704 | 140 608 | 211 | 22,80 | 733 | 8,041 | 32$\overline{5}$ | 685 | 163,4 | 2124 | 19,23 | 3698 | 1387 |
| 53 | 2809 | 148 877 | 280 | 23,02 | 756 | 093 | 435 | 698 | 166,5 | 2206 | 18,87 | 3560 | 1374 |
| 54 | 2916 | 157 464 | 348 | 23,24 | 780 | 143 | 544 | 711 | 169,6 | 2290 | 18,52 | 3429 | 1361 |
| 55 | 3025 | 166 375 | 416 | 23,45 | 803 | 193 | 652 | 723 | 172,8 | 2376 | 18,18 | 3306 | 1348 |
| 56 | 3136 | 175 616 | 7,483 | 23,66 | 3,826 | 8,243 | 17,758 | 2,736 | 175,9 | 2463 | 17,86 | 0,3189 | 0,1336 |
| 57 | 3249 | 185 193 | 55$\overline{0}$ | 23,87 | 849 | 291 | 863 | 748 | 179,1 | 2552 | 17,54 | 3078 | 1325 |
| 58 | 3364 | 195 112 | 616 | 24,08 | 871 | 340 | 967 | 760 | 182,2 | 2642 | 17,24 | 2973 | 1313 |
| 59 | 3481 | 205 379 | 681 | 24,29 | 893 | 387 | 18,070 | 771 | 185,4 | 2733 | 16,9$\overline{5}$ | 2873 | 1302 |
| 60 | 3600 | 216 000 | 746 | 24,49 | 91$\overline{5}$ | 434 | 171 | 783 | 188,5 | 2827 | 16,67 | 2778 | 1291 |
| 61 | 3721 | 226 981 | 7,810 | 24,70 | 3,936 | 8,481 | 18,272 | 2,79$\overline{5}$ | 191,6 | 2922 | 16,39 | 0,2687 | 0,1280 |
| 62 | 3844 | 238 328 | 874 | 24,90 | 958 | 527 | 371 | 806 | 194,8 | 3019 | 16,13 | 2601 | 1270 |
| 63 | 3969 | 250 047 | 937 | 25,10 | 979 | 573 | 469 | 817 | 197,9 | 3117 | 15,87 | 2520 | 1260 |
| 64 | 4096 | 262 144 | 8,000 | 25,30 | 4,000 | 618 | 566 | 828 | 201,1 | 3217 | 15,62 | 2441 | 1250 |
| 65 | 4225 | 274 625 | 062 | 25,$\overline{5}$0 | 021 | 662 | 663 | 839 | 204,2 | 3318 | 15,38 | 2367 | 1240 |
| 66 | 4356 | 287 496 | 8,124 | 25,69 | 4,041 | 8,707 | 18,758 | 2,850 | 207,3 | 3421 | 15,15 | 0,2296 | 0,1231 |
| 67 | 4489 | 300 763 | 185 | 25,88 | 062 | 750 | 852 | 861 | 210,$\overline{5}$ | 3526 | 14,93 | 2228 | 1222 |
| 68 | 4624 | 314 432 | 246 | 26,08 | 082 | 794 | 945 | 872 | 213,6 | 3632 | 14,71 | 2163 | 1213 |
| 69 | 4761 | 328 509 | 307 | 26,27 | 102 | 837 | 19,038 | 882 | 216,8 | 3739 | 14,49 | 2100 | 1204 |
| 70 | 4900 | 343 000 | 367 | 26,46 | 121 | 879 | 129 | 893 | 219,9 | 3848 | 14,29 | 2041 | 1195 |
| 71 | 5041 | 357 911 | 8,426 | 26,6$\overline{5}$ | 4,141 | 8,921 | 19,220 | 2,903 | 223,1 | 3959 | 14,08 | 0,1984 | 0,1187 |
| 72 | 5184 | 373 248 | 485 | 26,83 | 160 | 963 | 310 | 913 | 226,2 | 4072 | 13,89 | 1929 | 1179 |
| 73 | 5329 | 389 017 | 544 | 27,02 | 179 | 9,004 | 399 | 923 | 229,3 | 4185 | 13,70 | 1877 | 1170 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 74 | 5476 | 405 224 | 602 | 27,20 | 198 | 045 | 487 | 933 | 232,$\overline{5}$ | 4301 | 13,51 | 1826 | 1162 |
| 75 | 5625 | 421 875 | 660 | 27,39 | 217 | 086 | 574 | 943 | 235,6 | 4418 | 13,33 | 1778 | 115$\overline{5}$ |
| 76 | 5776 | 438 976 | 8,718 | 27,57 | 4,236 | 9,126 | 19,661 | 2,953 | 238,8 | 4536 | 13,16 | 0,1731 | 0,1147 |
| 77 | 5929 | 456 533 | 77$\overline{5}$ | 7$\overline{5}$ | 254 | 166 | 747 | 962 | 241,9 | 4657 | 12,99 | 1687 | 1140 |
| 78 | 6084 | 474 552 | 832 | 93 | 273 | 205 | 832 | 972 | 245,0 | 4778 | 12,82 | 1644 | 1132 |
| 79 | 6241 | 493 039 | 888 | 28,11 | 291 | 244 | 916 | 981 | 248,2 | 4902 | 12,66 | 1602 | 1125 |
| 80 | 6400 | 512 000 | 944 | 28 | 309 | 283 | 20,000 | 991 | 251,3 | 5027 | 12,50 | 1562 | 1118 |
| 81 | 6561 | 531 441 | 9,000 | 28,46 | 4,327 | 9,322 | 20,083 | 3,000 | 254,$\overline{5}$ | 5153 | 12,3$\overline{5}$ | 0,1524 | 0,1111 |
| 82 | 6724 | 551 368 | 055 | 64 | 344 | 360 | 165 | 009 | 257,6 | 5281 | 12,20 | 1487 | 1104 |
| 83 | 6889 | 571 787 | 110 | 81 | 362 | 398 | 247 | 018 | 260,8 | 5411 | 12,0$\overline{5}$ | 1452 | 1098 |
| 84 | 7056 | 592 704 | 165 | 98 | 380 | 435 | 328 | 027 | 263,9 | 5542 | 11,90 | 1417 | 1091 |
| 85 | 7225 | 614 125 | 220 | 29,15 | 397 | 473 | 408 | 036 | 267,0 | 567$\overline{5}$ | 11,76 | 1384 | 1085 |
| 86 | 7396 | 636 056 | 9,274 | 29,33 | 4,414 | 9,510 | 20,488 | 3,045 | 270,2 | 5809 | 11,63 | 0,1352 | 0,1078 |
| 87 | 7569 | 658 503 | 327 | 5$\overline{0}$ | 431 | 546 | 567 | 054 | 273,3 | 594$\overline{5}$ | 11,49 | 1321 | 1072 |
| 88 | 7744 | 681 472 | 381 | 66 | 448 | 583 | 646 | 063 | 276,$\overline{5}$ | 6082 | 11,36 | 1291 | 1066 |
| 89 | 7921 | 704 969 | 434 | 83 | 46$\overline{5}$ | 619 | 724 | 071 | 279,6 | 6221 | 11,24 | 1262 | 1060 |
| 90 | 8100 | 729 000 | 487 | 30,00 | 481 | 65$\overline{5}$ | 801 | 080 | 282,7 | 6362 | 11,11 | 123$\overline{5}$ | 1054 |
| 91 | 8281 | 753 571 | 9,539 | 30,17 | 4,498 | 9,691 | 20,878 | 3,089 | 285,9 | 6504 | 10,99 | 0,1208 | 0,1048 |
| 92 | 8464 | 778 688 | 592 | 33 | 514 | 726 | 954 | 097 | 289,0 | 6648 | 10,87 | 1181 | 1043 |
| 93 | 8649 | 804 357 | 644 | 5$\overline{0}$ | 531 | 761 | 21,029 | 105 | 292,2 | 6793 | 10,75 | 1156 | 1037 |
| 94 | 8836 | 830 584 | 695 | 66 | 547 | 796 | 10$\overline{5}$ | 114 | 295,3 | 6940 | 10,64 | 1132 | 1031 |
| 95 | 9025 | 857 375 | 747 | 82 | 563 | 830 | 179 | 122 | 298,5 | 7088 | 10,53 | 1108 | 1026 |
| 96 | 9216 | 884 736 | 9,798 | 30,98 | 4,579 | 9,86$\overline{5}$ | 21,253 | 3,130 | 301,6 | 7238 | 10,42 | 0,1085 | 0,1021 |
| 97 | 9409 | 912 673 | 849 | 31,14 | 59$\overline{5}$ | 899 | 327 | 138 | 304,7 | 7390 | 10,31 | 1063 | 1015 |
| 98 | 9604 | 941 192 | 899 | 30 | 610 | 933 | 400 | 146 | 307,9 | 7543 | 10,20 | 1041 | 1010 |
| 99 | 9801 | 970 299 | 950 | 46 | 626 | 967 | 472 | 154 | 311,0 | 7698 | 10,10 | 1020 | 1005 |
| 100 | 10 000 | 1000 000 | 10,000 | 62 | 642 | 10,000 | 544 | 162 | 314,2 | 7854 | 10,00 | 1000 | 1000 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 101 | 10 201 | 1 030 301 | 10,05$\overline{0}$ | 31,780 | 4,657 | 10,033 | 21,616 | 317,3 | 8 012 | 9,901 | 0,09950 | 0,03147 |
| 102 | 10 404 | 1 061 208 | 100 | 31,937 | 672 | 066 | 687 | 320,4 | 8 171 | 804 | 9901 | 3131 |
| 103 | 10 609 | 1 092 727 | 149 | 32,094 | 688 | 099 | 758 | 323,6 | 8 33$\overline{2}$ | 709 | 9853 | 3116 |
| 104 | 10 816 | 1 124 864 | 198 | 32,249 | 703 | 132 | 828 | 326,7 | 8 49$\overline{5}$ | 615 | 9806 | 3101 |
| 105 | 11 025 | 1 157 625 | 247 | 32,404 | 718 | 164 | 898 | 329,9 | 8 659 | 524 | 9759 | 3086 |
| 106 | 11 236 | 1 191 016 | 10,296 | 32,558 | 4,733 | 10,196 | 21,967 | 333,0 | 8 82$\overline{5}$ | 9,434 | 0,09713 | 0,03071 |
| 107 | 11 449 | 1 225 043 | 344 | 32,711 | 747 | 228 | 22,036 | 336,2 | 8 992 | 346 | 9667 | 3057 |
| 108 | 11 664 | 1 259 712 | 392 | 32,863 | 762 | 260 | 104 | 339,3 | 9 161 | 259 | 9623 | 3043 |
| 109 | 11 881 | 1 295 029 | 440 | 33,015 | 777 | 291 | 172 | 342,4 | 9 331 | 174 | 957$\overline{8}$ | 3029 |
| 110 | 12 100 | 1 331 000 | 488 | 33,166 | 791 | 323 | 240 | 345,6 | 9 503 | 091 | 953$\overline{5}$ | 3015 |
| 111 | 12 321 | 1 367 631 | 10,536 | 33,317 | 4,806 | 10,354 | 22,307 | 348,7 | 9 677 | 9,009 | 0,09492 | 0,03002 |
| 112 | 12 544 | 1 404 928 | 583 | 33,466 | 820 | 385 | 374 | 351,9 | 9 852 | 8,929 | 9449 | 2988 |
| 113 | 12 769 | 1 442 897 | 630 | 33,615 | 83$\overline{5}$ | 416 | 440 | 35$\overline{5}$,0 | 10 029 | 85$\overline{0}$ | 9407 | 297$\overline{5}$ |
| 114 | 12 996 | 1 481 544 | 677 | 33,764 | 849 | 446 | 506 | 358,1 | 10 207 | 772 | 9366 | 2962 |
| 115 | 13 225 | 1 520 875 | 724 | 33,912 | 863 | 477 | 572 | 361,3 | 10 387 | 696 | 9325 | 2949 |
| 116 | 13 456 | 1 560 896 | 10,770 | 34,059 | 4,877 | 10,507 | 22,637 | 364,4 | 10 568 | 8,621 | 0,0928$\overline{5}$ | 0,02936 |
| 117 | 13 689 | 1 601 613 | 817 | 34,205 | 891 | 537 | 702 | 367,6 | 10 751 | 54$\overline{7}$ | 9245 | 2924 |
| 118 | 13 924 | 1 643 032 | 863 | 34,351 | 90$\overline{5}$ | 567 | 766 | 370,7 | 10 936 | 47$\overline{5}$ | 9206 | 2911 |
| 119 | 14 161 | 1 685 159 | 909 | 34,496 | 919 | 597 | 831 | 373,8 | 11 122 | 403 | 9167 | 2899 |
| 120 | 14 400 | 1 728 000 | 954 | 34,641 | 932 | 627 | 894 | 377,0 | 11 310 | 333 | 9129 | 2887 |
| 121 | 14 641 | 1 771 561 | 11,000 | 34,785 | 4,946 | 10,656 | 22,958 | 380,1 | 11 499 | 8,264 | 0,09091 | 0,0287$\overline{5}$ |
| 122 | 14 884 | 1 815 848 | 045 | 34,928 | 960 | 685 | 23,021 | 383,3 | 11 690 | 197 | 9054 | 2863 |
| 123 | 15 129 | 1 860 867 | 091 | 35,071 | 973 | 714 | 084 | 386,4 | 11 882 | 130 | 9017 | 2851 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 124 | 15 376 | 1 906 624 | 136 | 35,214 | 987 | 743 | 146 | 389,6 | 12 076 | 06$\bar{5}$ | 8980 | 2840 |
| 125 | 15 625 | 1 953 125 | 180 | 35,355 | 5,000 | 772 | 208 | 392,7 | 12 272 | 000 | 8944 | 2828 |
| 126 | 15 876 | 2 000 376 | 11,22$\bar{5}$ | 35,496 | 5,013 | 10,801 | 23,270 | 395,8 | 12 469 | 7,937 | 0,08909 | 0,02817 |
| 127 | 16 129 | 2 048 383 | 269 | 637 | 027 | 829 | 331 | 399,0 | 12 668 | 874 | 8874 | 2806 |
| 128 | 16 384 | 2 097 152 | 314 | 777 | 040 | 858 | 392 | 402,1 | 12 868 | 812 | 883$\underline{9}$ | 2795 |
| 129 | 16 641 | 2 146 689 | 358 | 917 | 053 | 886 | 453 | 405,3 | 13 070 | 752 | 880$\bar{5}$ | 2784 |
| 130 | 16 900 | 2 197 000 | 402 | 36,056 | 066 | 914 | 513 | 408,4 | 13 273 | 692 | 8771 | 2774 |
| 131 | 17 161 | 2 248 091 | 11,446 | 36,194 | 5,079 | 10,942 | 23,573 | 411,5 | 13 47$\underline{8}$ | 7,634 | 0,08737 | 0,02763 |
| 132 | 17 424 | 2 299 968 | 489 | 332 | 092 | 970 | 633 | 414,7 | 13 68$\bar{5}$ | 576 | 8704 | 2752 |
| 133 | 17 689 | 2 352 637 | 533 | 469 | 104 | 997 | 693 | 417,8 | 13 893 | 519 | 8671 | 2742 |
| 134 | 17 956 | 2 406 104 | 576 | 606 | 117 | 11,02$\bar{5}$ | 752 | 421,0 | 14 103 | 463 | 8639 | 2732 |
| 135 | 18 225 | 2 460 375 | 619 | 742 | 130 | 052 | 811 | 424,1 | 14 314 | 407 | 8607 | 2722 |
| 136 | 18 496 | 2 515 456 | 11,66$\underline{2}$ | 36,878 | 5,143 | 11,079 | 23,870 | 427,3 | 14 527 | 7,353 | 0,0857$\bar{5}$ | 0,02712 |
| 137 | 18 769 | 2 571 353 | 70$\bar{5}$ | 37,014 | 155 | 106 | 928 | 430,4 | 14 741 | 299 | 8544 | 2702 |
| 138 | 19 044 | 2 628 072 | 747 | 148 | 168 | 133 | 986 | 433,5 | 14 957 | 246 | 8513 | 2692 |
| 139 | 19 321 | 2 685 619 | 790 | 283 | 180 | 160 | 24,044 | 436,7 | 15 17$\bar{5}$ | 194 | 8482 | 2682 |
| 140 | 19 600 | 2 744 000 | 832 | 417 | 192 | 187 | 101 | 439,8 | 15 394 | 143 | 8452 | 2673 |
| 141 | 19 881 | 2 803 221 | 11,874 | 37,5$\bar{5}$0 | 5,20$\bar{5}$ | 11,213 | 24,159 | 443,0 | 15 61$\bar{5}$ | 7,092 | 0,08422 | 0,02663 |
| 142 | 20 164 | 2 863 288 | 916 | 683 | 217 | 240 | 216 | 446,1 | 15 837 | 042 | 8392 | 2654 |
| 143 | 20 449 | 2 924 207 | 958 | 815 | 229 | 266 | 272 | 449,2 | 16 061 | 6,993 | 8362 | 2644 |
| 144 | 20 736 | 2 985 984 | 12,000 | 947 | 241 | 292 | 32$\underline{9}$ | 452,4 | 16 286 | 944 | 833$\underline{3}$ | 2635 |
| 145 | 21 025 | 3 048 625 | 042 | 38,079 | 254 | 319 | 38$\bar{5}$ | 455,5 | 16 513 | 897 | 830$\bar{5}$ | 2626 |
| 146 | 21 316 | 3 112 136 | 12,083 | 38,210 | 5,266 | 11,344 | 24,441 | 458,7 | 16 742 | 6,849 | 0,08276 | 0,02617 |
| 147 | 21 609 | 3 176 523 | 124 | 341 | 278 | 370 | 497 | 46$\underline{1}$,8 | 16 972 | 803 | 8248 | 2608 |
| 148 | 21 904 | 3 241 792 | 166 | 471 | 290 | 396 | 552 | 46$\bar{5}$,0 | 17 203 | 757 | 8220 | 2599 |
| 149 | 22 201 | 3 307 949 | 207 | 601 | 301 | 422 | 607 | 468,1 | 17 437 | 711 | 819$\underline{2}$ | 2591 |
| 150 | 22 500 | 3 375 000 | 247 | 730 | 313 | 447 | 662 | 471,2 | 17 671 | 667 | 816$\bar{5}$ | 2582 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^2}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 151 | 22 801 | 3 442 951 | 12,288 | 38,859 | 5,325 | 11,473 | 24,717 | 474,4 | 17 908 | 6,623 | 0,08138 | 0,02573 |
| 152 | 23 104 | 3 511 808 | 329 | 987 | 337 | 498 | 771 | 477,5 | 18 146 | 579 | 8111 | 2565 |
| 153 | 23 409 | 3 581 577 | 369 | 39,115 | 348 | 523 | 825 | 480,7 | 18 385 | 536 | 8085 | 2557 |
| 154 | 23 716 | 3 652 264 | 410 | 243 | 360 | 548 | 879 | 483,8 | 18 627 | 494 | 8058 | 2548 |
| 155 | 24 025 | 3 723 875 | 450 | 370 | 372 | 573 | 933 | 486,9 | 18 869 | 452 | 8032 | 2540 |
| 156 | 24 336 | 3 796 416 | 12,490 | 39,497 | 5,383 | 11,598 | 24,987 | 490,1 | 19 113 | 6,410 | 0,08006 | 0,02532 |
| 157 | 24 649 | 3 869 893 | 530 | 623 | 395 | 623 | 25,040 | 493,2 | 19 359 | 369 | 7981 | 2524 |
| 158 | 24 964 | 3 944 312 | 570 | 749 | 406 | 647 | 093 | 496,4 | 19 607 | 329 | 7956 | 2516 |
| 159 | 25 281 | 4 019 679 | 610 | 875 | 418 | 672 | 146 | 499,5 | 19 856 | 289 | 7931 | 2508 |
| 160 | 25 600 | 4 096 000 | 649 | 40,000 | 429 | 696 | 198 | 502,7 | 20 106 | 250 | 7906 | 2500 |
| 161 | 25 921 | 4 173 281 | 12,689 | 40,125 | 5,440 | 11,720 | 25,251 | 505,8 | 20 358 | 6,211 | 0,07881 | 0,02492 |
| 162 | 26 244 | 4 251 528 | 728 | 249 | 451 | 745 | 303 | 508,9 | 20 612 | 173 | 7857 | 2485 |
| 163 | 26 569 | 4 330 747 | 767 | 373 | 463 | 769 | 355 | 512,1 | 20 867 | 135 | 7833 | 2477 |
| 164 | 26 896 | 4 410 944 | 806 | 497 | 474 | 793 | 407 | 515,2 | 21 124 | 098 | 7809 | 2469 |
| 165 | 27 225 | 4 492 125 | 845 | 620 | 485 | 817 | 458 | 518,4 | 21 382 | 061 | 7785 | 2462 |
| 166 | 27 556 | 4 574 296 | 12,884 | 40,743 | 5,496 | 11,840 | 25,510 | 521,5 | 21 642 | 6,024 | 0,07762 | 0,02454 |
| 167 | 27 889 | 4 657 463 | 923 | 866 | 507 | 864 | 561 | 524,6 | 21 904 | 5,988 | 7738 | 2447 |
| 168 | 28 224 | 4 741 632 | 961 | 988 | 518 | 888 | 612 | 527,8 | 22 167 | 952 | 7715 | 2440 |
| 169 | 28 561 | 4 826 809 | 13,000 | 41,110 | 529 | 911 | 662 | 530,9 | 22 432 | 917 | 7692 | 2433 |
| 170 | 28 900 | 4 913 000 | 038 | 231 | 540 | 935 | 713 | 534,1 | 22 698 | 882 | 7670 | 2425 |
| 171 | 29 241 | 5 000 211 | 13,077 | 41,352 | 5,550 | 11,958 | 25,763 | 537,2 | 22 966 | 5,848 | 0,07647 | 0,02418 |
| 172 | 29 584 | 5 088 448 | 115 | 473 | 561 | 981 | 813 | 540,4 | 23 235 | 814 | 7625 | 2411 |
| 173 | 29 929 | 5 177 717 | 153 | 593 | 572 | 12,005 | 863 | 543,5 | 23 506 | 780 | 7603 | 2404 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 174 | 30 276 | 5 268 024 | 191 | 713 | 583 | 028 | 913 | 546,6 | 23 779 | 747 | 7581 | 2397 |
| 175 | 30 625 | 5 359 375 | 229 | 833 | 593 | 051 | 962 | 549,8 | 24 053 | 714 | 7559 | 2390 |
| 176 | 30 976 | 5 451 776 | 13,266 | 41,952 | 5,604 | 12,074 | 26,012 | 552,9 | 24 328 | 5,682 | 0,07538 | 0,02384 |
| 177 | 31 329 | 5 545 233 | 304 | 42,071 | 615 | 096 | 061 | 556,1 | 24 606 | 650 | 7516 | 2377 |
| 178 | 31 684 | 5 639 752 | 342 | 190 | 625 | 119 | 110 | 559,2 | 24 885 | 618 | 7495 | 2370 |
| 179 | 32 041 | 5 735 339 | 379 | 308 | 636 | 142 | 159 | 562,4 | 25 165 | 587 | 7474 | 2364 |
| 180 | 32 400 | 5 832 000 | 416 | 426 | 646 | 164 | 207 | 565,5 | 25 447 | 556 | 7454 | 2357 |
| 181 | 32 761 | 5 929 741 | 13,454 | 42,544 | 5,657 | 12,187 | 26,256 | 568,6 | 25 730 | 5,525 | 0,07433 | 0,02351 |
| 182 | 33 124 | 6 028 568 | 491 | 661 | 667 | 209 | 304 | 571,8 | 26 016 | 495 | 7412 | 2344 |
| 183 | 33 489 | 6 128 487 | 528 | 778 | 677 | 232 | 352 | 574,9 | 26 302 | 464 | 7392 | 2338 |
| 184 | 33 856 | 6 229 504 | 565 | 895 | 688 | 254 | 400 | 578,1 | 26 590 | 435 | 7372 | 2331 |
| 185 | 34 225 | 6 331 625 | 601 | 43,012 | 698 | 276 | 448 | 581,2 | 26 880 | 405 | 7352 | 2325 |
| 186 | 34 596 | 6 434 856 | 13,638 | 43,128 | 5,708 | 12,298 | 26,495 | 584,3 | 27 172 | 5,376 | 0,07332 | 0,02319 |
| 187 | 34 969 | 6 539 203 | 675 | 243 | 718 | 320 | 543 | 587,5 | 27 465 | 348 | 7313 | 2312 |
| 188 | 35 344 | 6 644 672 | 711 | 359 | 729 | 342 | 590 | 590,6 | 27 759 | 319 | 7293 | 2306 |
| 189 | 35 721 | 6 751 269 | 748 | 474 | 739 | 364 | 637 | 593,8 | 28 055 | 291 | 7274 | 2300 |
| 190 | 36 100 | 6 859 000 | 784 | 589 | 749 | 386 | 684 | 596,9 | 28 353 | 263 | 7255 | 2294 |
| 191 | 36 481 | 6 967 871 | 13,820 | 43,704 | 5,759 | 12,407 | 26,731 | 600,0 | 28 652 | 5,236 | 0,07236 | 0,02288 |
| 192 | 36 864 | 7 077 888 | 856 | 818 | 769 | 429 | 777 | 603,2 | 28 953 | 208 | 7217 | 2282 |
| 193 | 37 249 | 7 189 057 | 892 | 932 | 779 | 450 | 824 | 606,3 | 29 255 | 181 | 7198 | 2276 |
| 194 | 37 636 | 7 301 384 | 928 | 44,045 | 789 | 472 | 870 | 609,5 | 29 559 | 155 | 7180 | 2270 |
| 195 | 38 025 | 7 414 875 | 964 | 159 | 799 | 493 | 916 | 612,6 | 29 865 | 128 | 7161 | 2265 |
| 196 | 38 416 | 7 529 536 | 14,000 | 44,272 | 5,809 | 12,515 | 26,962 | 615,8 | 30 172 | 5,102 | 0,07143 | 0,02259 |
| 197 | 38 809 | 7 645 373 | 036 | 385 | 819 | 536 | 27,008 | 618,9 | 30 481 | 076 | 7125 | 2253 |
| 198 | 39 204 | 7 762 392 | 071 | 497 | 828 | 557 | 053 | 622,0 | 30 791 | 051 | 7107 | 2247 |
| 199 | 39 601 | 7 880 599 | 107 | 609 | 838 | 578 | 099 | 625,2 | 31 103 | 025 | 7089 | 2242 |
| 200 | 40 000 | 8 000 000 | 142 | 721 | 848 | 599 | 144 | 628,3 | 31 416 | 5,000 | 7071 | 2236 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 201 | 40 401 | 8 120 601 | 14,177 | 44,833 | 5,858 | 12,620 | 27,189 | 631,$\overline{5}$ | 31 731 | 4,975 | 0,07053 | 0,02230 |
| 202 | 40 804 | 8 242 408 | 213 | 944 | 867 | 641 | 234 | 634,6 | 32 047 | 950 | 7036 | 2225 |
| 203 | 41 209 | 8 365 427 | 248 | 45,056 | 877 | 662 | 279 | 637,7 | 32 365 | 926 | 7019 | 2219 |
| 204 | 41 616 | 8 489 664 | 283 | 166 | 887 | 683 | 324 | 640,9 | 32 685 | 902 | 7001 | 2214 |
| 205 | 42 025 | 8 615 125 | 318 | 277 | 896 | 703 | 369 | 644,0 | 33 006 | 878 | 6984 | 2209 |
| 206 | 42 436 | 8 741 816 | 14,353 | 45,38$\dot{7}$ | 5,906 | 12,72$\underline{4}$ | 27,413 | 647,2 | 33 329 | 4,854 | 0,06967 | 0,02203 |
| 207 | 42 849 | 8 869 743 | 387 | 497 | 91$\underline{5}$ | 74$\overline{5}$ | 457 | 650,$\underline{3}$ | 33 654 | 831 | 6950 | 2198 |
| 208 | 43 264 | 8 998 912 | 422 | 607 | 92$\overline{5}$ | 765 | 501 | 653,$\overline{5}$ | 33 979 | 80$\underline{8}$ | 6934 | 2193 |
| 209 | 43 681 | 9 129 329 | 457 | 717 | 934 | 785 | 545 | 656,6 | 34 307 | 78$\overline{5}$ | 6917 | 2187 |
| 210 | 44 100 | 9 261 000 | 491 | 826 | 944 | 806 | 589 | 659,7 | 34 636 | 762 | 6901 | 2182 |
| 211 | 44 521 | 9 393 931 | 14,526 | 45,93$\overline{5}$ | 5,953 | 12,826 | 27,633 | 662,9 | 34 967 | 4,739 | 0,06884 | 0,02177 |
| 212 | 44 944 | 9 528 128 | 56$\underline{0}$ | 46,043 | 963 | 846 | 677 | 666,0 | 35 299 | 71$\underline{7}$ | 6868 | 2172 |
| 213 | 45 369 | 9 663 597 | 59$\overline{5}$ | 152 | 972 | 866 | 720 | 669,2 | 35 633 | 69$\overline{5}$ | 6852 | 2167 |
| 214 | 45 796 | 9 800 344 | 629 | 260 | 981 | 887 | 763 | 672,3 | 35 968 | 673 | 6836 | 2162 |
| 215 | 46 225 | 9 938 375 | 663 | 368 | 991 | 907 | 806 | 675,4 | 36 305 | 651 | 6820 | 2157 |
| 216 | 46 656 | 10 077 696 | 14,697 | 46,476 | 6,000 | 12,927 | 27,85$\overline{0}$ | 678,6 | 36 644 | 4,630 | 0,06804 | 0,02152 |
| 217 | 47 089 | 10 218 313 | 73$\underline{1}$ | 583 | 009 | 947 | 892 | 681,7 | 36 984 | 608 | 6788 | 2147 |
| 218 | 47 524 | 10 360 232 | 76$\overline{5}$ | 690 | 018 | 966 | 935 | 684,9 | 37 325 | 587 | 6773 | 2142 |
| 219 | 47 961 | 10 503 459 | 799 | 797 | 028 | 986 | 978 | 688,0 | 37 668 | 566 | 6757 | 2137 |
| 220 | 48 400 | 10 648 000 | 832 | 904 | 037 | 13,006 | 28,020 | 691,2 | 38 013 | 545 | 6742 | 2132 |
| 221 | 48 841 | 10 793 861 | 14,866 | 47,011 | 6,046 | 13,02$\underline{6}$ | 28,063 | 694,3 | 38 360 | 4,525 | 0,06727 | 0,02127 |
| 222 | 49 284 | 10 941 048 | 900 | 117 | 055 | 04$\underline{5}$ | 105 | 697,4 | 38 70$\dot{8}$ | 505 | 6712 | 2122 |
| 223 | 49 729 | 11 089 567 | 933 | 223 | 064 | 06$\overline{5}$ | 147 | 700,6 | 39 057 | 484 | 6696 | 2118 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 224 | 50 176 | 11 239 424 | 967 | 329 | 073 | 084 | 189 | 703,7 | 39 408 | 464 | 6682 | 2113 |
| 225 | 50 625 | 11 390 625 | 15,000 | 434 | 082 | 104 | 231 | 706,9 | 39 761 | 444 | 6667 | 2108 |
| 226 | 51 076 | 11 543 176 | 15,033 | 47,539 | 6,091 | 13,123 | 28,273 | 710,0 | 40 115 | 4,425 | 0,06652 | 0,02104 |
| 227 | 51 529 | 11 697 083 | 067 | 645 | 100 | 142 | 314 | 713,1 | 40 471 | 405 | 6637 | 2099 |
| 228 | 51 984 | 11 852 352 | 100 | 749 | 109 | 162 | 356 | 716,3 | 40 828 | 386 | 6623 | 2094 |
| 229 | 52 441 | 12 008 989 | 133 | 854 | 118 | 181 | 397 | 719,4 | 41 187 | 367 | 6608 | 2090 |
| 230 | 52 900 | 12 167 000 | 166 | 958 | 127 | 200 | 439 | 722,6 | 41 548 | 348 | 6594 | 2085 |
| 231 | 53 361 | 12 326 391 | 15,199 | 48,062 | 6,136 | 13,219 | 28,480 | 725,7 | 41 910 | 4,329 | 0,06580 | 0,02081 |
| 232 | 53 824 | 12 487 168 | 232 | 166 | 145 | 238 | 521 | 728,8 | 42 273 | 310 | 6565 | 2076 |
| 233 | 54 289 | 12 649 337 | 264 | 270 | 153 | 257 | 562 | 732,0 | 42 638 | 292 | 6551 | 2072 |
| 234 | 54 756 | 12 812 904 | 297 | 374 | 162 | 276 | 603 | 735,1 | 43 005 | 274 | 6537 | 2067 |
| 235 | 55 225 | 12 977 875 | 330 | 477 | 171 | 295 | 643 | 738,3 | 43 374 | 255 | 6523 | 2063 |
| 236 | 55 696 | 13 144 256 | 15,362 | 48,580 | 6,180 | 13,314 | 28,684 | 741,4 | 43 744 | 4,237 | 0,06509 | 0,02058 |
| 237 | 56 169 | 13 312 053 | 395 | 683 | 188 | 333 | 724 | 744,6 | 44 115 | 219 | 6496 | 2054 |
| 238 | 56 644 | 13 481 272 | 427 | 785 | 197 | 351 | 765 | 747,7 | 44 488 | 202 | 6482 | 2050 |
| 239 | 57 121 | 13 651 919 | 460 | 888 | 206 | 370 | 805 | 750,8 | 44 863 | 184 | 6468 | 2046 |
| 240 | 57 600 | 13 824 000 | 492 | 990 | 214 | 389 | 845 | 754,0 | 45 239 | 167 | 6455 | 2041 |
| 241 | 58 081 | 13 997 521 | 15,524 | 49,092 | 6,223 | 13,407 | 28,885 | 757,1 | 45 617 | 4,149 | 0,06442 | 0,02037 |
| 242 | 58 564 | 14 172 488 | 556 | 193 | 232 | 426 | 925 | 760,3 | 45 996 | 132 | 6428 | 2033 |
| 243 | 59 049 | 14 348 907 | 588 | 295 | 240 | 444 | 965 | 763,4 | 46 377 | 115 | 6415 | 2029 |
| 244 | 59 536 | 14 526 784 | 620 | 396 | 249 | 463 | 29,004 | 766,5 | 46 759 | 098 | 6402 | 2024 |
| 245 | 60 025 | 14 706 125 | 652 | 497 | 257 | 481 | 043 | 769,7 | 47 144 | 082 | 6389 | 2020 |
| 246 | 60 516 | 14 886 936 | 15,684 | 49,598 | 6,266 | 13,499 | 29,083 | 772,8 | 47 529 | 4,065 | 0,06376 | 0,02016 |
| 247 | 61 009 | 15 069 223 | 716 | 699 | 274 | 518 | 123 | 776,0 | 47 916 | 049 | 6363 | 2012 |
| 248 | 61 504 | 15 252 992 | 748 | 800 | 283 | 536 | 162 | 779,1 | 48 305 | 032 | 6350 | 2008 |
| 249 | 62 001 | 15 438 249 | 780 | 900 | 291 | 554 | 201 | 782,3 | 48 695 | 016 | 6337 | 2004 |
| 250 | 62 500 | 15 625 000 | 811 | 50,000 | 300 | 572 | 240 | 785,4 | 49 087 | 000 | 6325 | 2000 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 251 | 63 001 | 15 813 251 | 15,843 | 50,100 | 6,308 | 13,590 | 29,279 | 788,5 | 49 481 | 3,984 | 0,06312 | 0,01996 |
| 252 | 63 504 | 16 003 008 | 875 | 200 | 316 | 608 | 318 | 791,7 | 49 876 | 968 | 6299 | 1992 |
| 253 | 64 009 | 16 194 277 | 906 | 299 | 325 | 626 | 357 | 794,8 | 50 273 | 953 | 6287 | 1988 |
| 254 | 64 516 | 16 387 064 | 937 | 398 | 333 | 644 | 395 | 798,0 | 50 671 | 937 | 6275 | 1984 |
| 255 | 65 025 | 16 581 375 | 969 | 498 | 341 | 662 | 434 | 801,1 | 51 071 | 922 | 6262 | 1980 |
| 256 | 65 536 | 16 777 216 | 16,000 | 50,596 | 6,350 | 13,680 | 29,472 | 804,2 | 51 472 | 3,906 | 0,06250 | 0,01976 |
| 257 | 66 049 | 16 974 593 | 031 | 695 | 358 | 698 | 511 | 807,4 | 51 875 | 891 | 6238 | 1973 |
| 258 | 66 564 | 17 173 512 | 062 | 794 | 366 | 715 | 549 | 810,5 | 52 279 | 876 | 6226 | 1969 |
| 259 | 67 081 | 17 373 979 | 093 | 892 | 374 | 733 | 587 | 813,7 | 52 685 | 861 | 6214 | 1965 |
| 260 | 67 600 | 17 576 000 | 125 | 990 | 383 | 751 | 625 | 816,8 | 53 093 | 846 | 6202 | 1961 |
| 261 | 68 121 | 17 779 581 | 16,155 | 51,088 | 6,391 | 13,768 | 29,663 | 820,0 | 53 502 | 3,831 | 0,06190 | 0,01957 |
| 262 | 68 644 | 17 984 728 | 186 | 186 | 399 | 786 | 701 | 823,1 | 53 913 | 817 | 6178 | 1954 |
| 263 | 69 169 | 18 191 447 | 217 | 284 | 407 | 803 | 738 | 826,2 | 54 325 | 802 | 6166 | 1950 |
| 264 | 69 696 | 18 399 744 | 248 | 381 | 415 | 821 | 776 | 829,4 | 54 739 | 788 | 6155 | 1946 |
| 265 | 70 225 | 18 609 625 | 279 | 478 | 423 | 838 | 814 | 832,5 | 55 155 | 774 | 6143 | 1943 |
| 266 | 70 756 | 18 821 096 | 16,310 | 51,575 | 6,431 | 13,856 | 29,851 | 835,7 | 55 572 | 3,759 | 0,06131 | 0,01939 |
| 267 | 71 289 | 19 034 163 | 340 | 672 | 439 | 873 | 888 | 838,8 | 55 990 | 745 | 6120 | 1935 |
| 268 | 71 824 | 19 248 832 | 371 | 769 | 447 | 890 | 926 | 841,9 | 56 410 | 731 | 6108 | 1932 |
| 269 | 72 361 | 19 465 109 | 401 | 865 | 455 | 908 | 963 | 845,1 | 56 832 | 717 | 6097 | 1928 |
| 270 | 72 900 | 19 683 000 | 432 | 962 | 463 | 925 | 30,000 | 848,2 | 57 256 | 704 | 6086 | 1925 |
| 271 | 73 441 | 19 902 511 | 16,462 | 52,058 | 6,471 | 13,942 | 30,037 | 851,4 | 57 680 | 3,690 | 0,06075 | 0,01921 |
| 272 | 73 984 | 20 123 648 | 492 | 154 | 479 | 959 | 074 | 854,5 | 58 107 | 676 | 6063 | 1917 |
| 273 | 74 529 | 20 346 417 | 523 | 249 | 487 | 976 | 111 | 857,7 | 58 535 | 663 | 6052 | 1914 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 274 | 75 076 | 20 570 824 | 553 | 345 | 495 | 993 | 147 | 860,8 | 58 965$\overline{5}$ | 65$\overline{0}$ | 6041 | 1910 |
| 275 | 75 625 | 20 796 875 | 583 | 440 | 503 | 14,010 | 184 | 863,9 | 59 396 | 636 | 6030 | 1907 |
| 276 | 76 176 | 21 024 576 | 16,613 | 52,536 | 6,511 | 14,027 | 30,221 | 867,1 | 59 828 | 3,623 | 0,06019 | 0,01903 |
| 277 | 76 729 | 21 253 933 | 643 | 631 | 519 | 044 | 257 | 870,2 | 60 263 | 610 | 6008 | 1900 |
| 278 | 77 284 | 21 484 952 | 673 | 726 | 527 | 061 | 293 | 873,4 | 60 699 | 597 | 5998 | 1897 |
| 279 | 77 841 | 21 717 639 | 703 | 820 | 534 | 078 | 330 | 876,5 | 61 136 | 584 | 5987 | 1893 |
| 280 | 78 400 | 21 952 000 | 733 | 915 | 542 | 09$\overline{5}$ | 366 | 879,6 | 61 575 | 571 | 5976 | 1890 |
| 281 | 78 961 | 22 188 041 | 16,763 | 53,009 | 6,5$\overline{5}$0 | 14,111 | 30,402 | 882,8 | 62 016 | 3,559 | 0,05966 | 0,01886 |
| 282 | 79 524 | 22 425 768 | 793 | 104 | 558 | 128 | 438 | 885,9 | 62 458 | 546 | 595$\overline{5}$ | 1883 |
| 283 | 80 089 | 22 665 187 | 823 | 198 | 565 | 145 | 474 | 889,1 | 62 902 | 534 | 5944 | 1880 |
| 284 | 80 656 | 22 906 304 | 852 | 292 | 573 | 161 | 510 | 892,2 | 63 347 | 521 | 5934 | 1876 |
| 285 | 81 225 | 23 149 125 | 882 | 385 | 581 | 178 | 546 | 895,4 | 63 794 | 509 | 5923 | 1873 |
| 286 | 81 796 | 23 393 656 | 16,912 | 53,479 | 6,589 | 14,19$\overline{5}$ | 30,581 | 898,$\overline{5}$ | 64 242 | 3,497 | 0,05913 | 0,01870 |
| 287 | 82 369 | 23 639 903 | 941 | 572 | 596 | 211 | 617 | 901,6 | 64 692 | 484 | 5903 | 1867 |
| 288 | 82 944 | 23 887 872 | 971 | 666 | 604 | 228 | 652 | 904,8 | 65 144 | 472 | 5893 | 1863 |
| 289 | 83 521 | 24 137 569 | 17,000 | 759 | 611 | 244 | 688 | 907,9 | 65 597 | 460 | 5882 | 1860 |
| 290 | 84 100 | 24 389 000 | 029 | 852 | 619 | 260 | 723 | 911,1 | 66 052 | 448 | 5872 | 1857 |
| 291 | 84 681 | 24 642 171 | 17,059 | 53,944 | 6,627 | 14,277 | 30,758 | 914,2 | 66 508 | 3,436 | 0,05862 | 0,01854 |
| 292 | 85 264 | 24 897 088 | 088 | 54,037 | 634 | 293 | 794 | 917,3 | 66 966 | 42$\overline{5}$ | 5852 | 1851 |
| 293 | 85 849 | 25 153 757 | 117 | 129 | 642 | 309 | 829 | 920,$\overline{5}$ | 67 426 | 413 | 5842 | 1847 |
| 294 | 86 436 | 25 412 184 | 146 | 222 | 649 | 326 | 864 | 923,6 | 67 887 | 401 | 5832 | 1844 |
| 295 | 87 025 | 25 672 375 | 176 | 314 | 657 | 342 | 899 | 926,8 | 68 349 | 390 | 5822 | 1841 |
| 296 | 87 616 | 25 934 336 | 17,20$\overline{5}$ | 54,406 | 6,664 | 14,358 | 30,934 | 929,9 | 68 813 | 3,378 | 0,05812 | 0,01838 |
| 297 | 88 209 | 26 198 073 | 234 | 498 | 672 | 374 | 968 | 933,1 | 69 279 | 367 | 5803 | 183$\overline{5}$ |
| 298 | 88 804 | 26 463 592 | 263 | 589 | 679 | 390 | 31,003 | 936,2 | 69 746 | 356 | 5793 | 1832 |
| 299 | 89 401 | 26 730 899 | 292 | 681 | 687 | 406 | 038 | 939,$\overline{3}$ | 70 215 | 344 | 5783 | 1829 |
| 300 | 90 000 | 27 000 000 | 321 | 772 | 694 | 422 | 072 | 942,$\overline{5}$ | 70 686 | 333 | 5774 | 1826 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 301 | 90 601 | 27 270 901 | 17,349 | 54,863 | 6,702 | 14,439 | 31,107 | 945,6 | 71 158 | 3,322 | 0,05764 | 0,01823 |
| 302 | 91 204 | 27 543 608 | 378 | 95$\bar{5}$ | 709 | 454 | 141 | 948,8 | 71 631 | 311 | 5754 | 1820 |
| 303 | 91 809 | 27 818 127 | 407 | 55,045 | 717 | 470 | 176 | 951,9 | 72 107 | 300 | 574$\bar{5}$ | 1817 |
| 304 | 92 416 | 28 094 464 | 436 | 136 | 724 | 486 | 210 | 955,0 | 72 583 | 289 | 5735 | 1814 |
| 305 | 93 025 | 28 372 625 | 464 | 227 | 731 | 502 | 244 | 958,2 | 73 062 | 279 | 5726 | 1811 |
| 306 | 93 636 | 28 652 616 | 17,493 | 55,317 | 6,739 | 14,518 | 31,278 | 961,3 | 73 542 | 3,268 | 0,05717 | 0,01808 |
| 307 | 94 249 | 28 934 443 | 521 | 408 | 746 | 534 | 312 | 964,$\bar{5}$ | 74 023 | 257 | 5707 | 180$\bar{5}$ |
| 308 | 94 864 | 29 218 112 | 55$\bar{0}$ | 498 | 753 | 55$\bar{0}$ | 346 | 967,6 | 74 506 | 247 | 5698 | 1802 |
| 309 | 95 481 | 29 503 629 | 578 | 588 | 761 | 565 | 380 | 970,8 | 74 991 | 236 | 5689 | 1799 |
| 310 | 96 100 | 29 791 000 | 607 | 678 | 768 | 581 | 414 | 973,9 | 75 477 | 226 | 5680 | 1796 |
| 311 | 96 721 | 30 080 231 | 17,635 | 55,767 | 6,775 | 14,597 | 31,448 | 977,0 | 75 964 | 3,215 | 0,05670 | 0,01793 |
| 312 | 97 344 | 30 371 328 | 664 | 857 | 782 | 612 | 481 | 980,2 | 76 454 | 205 | 5661 | 1790 |
| 313 | 97 969 | 30 664 297 | 692 | 946 | 790 | 628 | 51$\bar{5}$ | 983,3 | 76 94$\bar{5}$ | 19$\bar{5}$ | 5652 | 1787 |
| 314 | 98 596 | 30 959 144 | 720 | 56,036 | 797 | 643 | 548 | 986,$\bar{5}$ | 77 437 | 185 | 5643 | 178$\bar{5}$ |
| 315 | 99 225 | 31 255 875 | 748 | 12$\bar{5}$ | 804 | 659 | 582 | 989,6 | 77 931 | 17$\bar{5}$ | 5634 | 1782 |
| 316 | 99 856 | 31 554 496 | 17,776 | 56,214 | 6,811 | 14,674 | 31,615 | 992,7 | 78 427 | 3,16$\bar{5}$ | 0,05625 | 0,01779 |
| 317 | 100 489 | 31 855 013 | 804 | 303 | 818 | 690 | 648 | 995,9 | 78 924 | 15$\bar{5}$ | 5617 | 1776 |
| 318 | 101 124 | 32 157 432 | 833 | 391 | 826 | 705 | 682 | 999,0 | 79 423 | 14$\bar{5}$ | 5608 | 1773 |
| 319 | 101 761 | 32 461 759 | 861 | 480 | 833 | 721 | 71$\bar{5}$ | 1002,2 | 79 923 | 13$\bar{5}$ | 5599 | 1771 |
| 320 | 102 400 | 32 768 000 | 889 | 569 | 840 | 736 | 748 | 1005,3 | 80 42$\bar{5}$ | 125 | 5590 | 1768 |
| 321 | 103 041 | 33 076 161 | 17,916 | 56,657 | 6,847 | 14,751 | 31,781 | 1008,$\bar{5}$ | 80 928 | 3,115 | 0,05581 | 0,01765 |
| 322 | 103 684 | 33 386 248 | 944 | 745 | 854 | 767 | 814 | 1011,6 | 81 433 | 106 | 5573 | 1762 |
| 323 | 104 329 | 33 698 267 | 972 | 833 | 861 | 782 | 847 | 1014,7 | 81 940 | 096 | 5564 | 1760 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 324 | 104 976 | 34 012 224 | 18,000 | 921 | 868 | 797 | 880 | 1017,9 | 82 448 | 086 | 5556 | 1757 |
| 325 | 105 625 | 34 328 125 | 028 | 57,009 | 875 | 812 | 913 | 1021,0 | 82 958 | 077 | 5547 | 1754 |
| 326 | 106 276 | 34 645 976 | 18,055 | 57,096 | 6,882 | 14,828 | 31,945 | 1024 | 83 469 | 3,067 | 0,05538 | 0,01751 |
| 327 | 106 929 | 34 965 783 | 083 | 184 | 889 | 843 | 978 | 1027 | 83 982 | 058 | 5530 | 1749 |
| 328 | 107 584 | 35 287 552 | 111 | 271 | 896 | 858 | 32,010 | 1030 | 84 496 | 049 | 5522 | 1746 |
| 329 | 108 241 | 35 611 289 | 138 | 359 | 903 | 873 | 043 | 1034 | 85 012 | 040 | 5513 | 1743 |
| 330 | 108 900 | 35 937 000 | 166 | 446 | 910 | 888 | 075 | 1037 | 85 530 | 030 | 5505 | 1741 |
| 331 | 109 561 | 36 264 691 | 18,193 | 57,533 | 6,917 | 14,903 | 32,108 | 1040 | 86 049 | 3,021 | 0,05496 | 0,01738 |
| 332 | 110 224 | 36 594 368 | 221 | 619 | 924 | 918 | 140 | 1043 | 86 570 | 012 | 5488 | 1736 |
| 333 | 110 889 | 36 926 037 | 248 | 706 | 931 | 933 | 172 | 1046 | 87 092 | 003 | 5480 | 1733 |
| 334 | 111 556 | 37 259 704 | 276 | 793 | 938 | 948 | 204 | 1049 | 87 616 | 2,994 | 5472 | 1730 |
| 335 | 112 225 | 37 595 375 | 303 | 879 | 945 | 963 | 237 | 1052 | 88 141 | 985 | 5464 | 1728 |
| 336 | 112 896 | 37 933 056 | 18,330 | 57,966 | 6,952 | 14,978 | 32,269 | 1056 | 88 668 | 2,976 | 0,05455 | 0,01725 |
| 337 | 113 569 | 38 272 753 | 358 | 58,052 | 959 | 993 | 301 | 1059 | 89 197 | 967 | 5447 | 1723 |
| 338 | 114 244 | 38 614 472 | 385 | 138 | 966 | 15,007 | 332 | 1062 | 89 727 | 959 | 5439 | 1720 |
| 339 | 114 921 | 38 958 219 | 412 | 224 | 973 | 022 | 364 | 1065 | 90 259 | 950 | 5431 | 1718 |
| 340 | 115 600 | 39 304 000 | 439 | 310 | 980 | 037 | 396 | 1068 | 90 792 | 941 | 5423 | 1715 |
| 341 | 116 281 | 39 651 821 | 18,466 | 58,395 | 6,986 | 15,052 | 32,428 | 1071 | 91 327 | 2,933 | 0,05415 | 0,01712 |
| 342 | 116 964 | 40 001 688 | 493 | 481 | 993 | 066 | 460 | 1074 | 91 863 | 924 | 5407 | 1710 |
| 343 | 117 649 | 40 353 607 | 520 | 566 | 7,000 | 081 | 491 | 1078 | 92 401 | 915 | 5399 | 1707 |
| 344 | 118 336 | 40 707 584 | 547 | 652 | 007 | 096 | 523 | 1081 | 92 941 | 907 | 5392 | 1705 |
| 345 | 119 025 | 41 063 625 | 574 | 737 | 014 | 110 | 554 | 1084 | 93 482 | 899 | 5384 | 1703 |
| 346 | 119 716 | 41 421 736 | 18,601 | 58,822 | 7,020 | 15,125 | 32,586 | 1087 | 94 025 | 2,890 | 0,05376 | 0,01700 |
| 347 | 120 409 | 41 781 923 | 628 | 907 | 027 | 139 | 617 | 1090 | 94 569 | 882 | 5368 | 1698 |
| 348 | 121 104 | 42 144 192 | 655 | 992 | 034 | 154 | 648 | 1093 | 95 115 | 874 | 5361 | 1695 |
| 349 | 121 801 | 42 508 549 | 682 | 59,076 | 041 | 168 | 679 | 1096 | 95 662 | 865 | 5353 | 1693 |
| 350 | 122 500 | 42 875 000 | 708 | 161 | 047 | 183 | 711 | 1100 | 96 211 | 857 | 5345 | 1690 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 351 | 123 201 | 43 243 551 | 18,735 | 59,245 | 7,054 | 15,197 | 32,742 | 1103 | 96 762 | 2,849 | 0,05338 | 0,01688 |
| 352 | 123 904 | 43 614 208 | 762 | 330 | 061 | 212 | 773 | 1106 | 97 314 | 841 | 5330 | 1685 |
| 353 | 124 609 | 43 986 977 | 788 | 414 | 067 | 226 | 804 | 1109 | 97 868 | 833 | 5322 | 1683 |
| 354 | 125 316 | 44 361 864 | 815 | 498 | 074 | 241 | 835 | 1112 | 98 423 | 825 | 5315 | 1681 |
| 355 | 126 025 | 44 738 875 | 841 | 582 | 081 | 255 | 866 | 1115 | 98 980 | 817 | 5307 | 1678 |
| 356 | 126 736 | 45 118 016 | 18,868 | 59,666 | 7,087 | 15,269 | 32,897 | 1118 | 99 538 | 2,809 | 0,05300 | 0,01676 |
| 357 | 127 449 | 45 499 293 | 894 | 749 | 094 | 283 | 927 | 1122 | 100 098 | 801 | 5293 | 1674 |
| 358 | 128 164 | 45 882 712 | 921 | 833 | 101 | 298 | 958 | 1125 | 100 660 | 793 | 5285 | 1671 |
| 359 | 128 881 | 46 268 279 | 947 | 917 | 107 | 312 | 969 | 1128 | 101 223 | 786 | 5278 | 1669 |
| 360 | 129 600 | 46 656 000 | 974 | 60,000 | 114 | 326 | 33,019 | 1131 | 101 788 | 778 | 5270 | 1667 |
| 361 | 130 321 | 47 045 881 | 19,000 | 60,083 | 7,120 | 15,340 | 33,050 | 1134 | 102 354 | 2,770 | 0,05263 | 0,01664 |
| 362 | 131 044 | 47 437 928 | 026 | 166 | 127 | 355 | 080 | 1137 | 102 922 | 762 | 5256 | 1662 |
| 363 | 131 769 | 47 832 147 | 053 | 249 | 133 | 369 | 111 | 1140 | 103 491 | 755 | 5249 | 1660 |
| 364 | 132 496 | 48 228 544 | 079 | 332 | 140 | 383 | 141 | 1144 | 104 062 | 747 | 5241 | 1657 |
| 365 | 133 225 | 48 627 125 | 105 | 415 | 147 | 397 | 171 | 1147 | 104 635 | 740 | 5234 | 1655 |
| 366 | 133 956 | 49 027 896 | 19,131 | 60,498 | 7,153 | 15,411 | 33,202 | 1150 | 105 209 | 2,732 | 0,05227 | 0,01653 |
| 367 | 134 689 | 49 430 863 | 157 | 581 | 160 | 425 | 232 | 1153 | 105 784 | 725 | 5220 | 1651 |
| 368 | 135 424 | 49 836 032 | 183 | 663 | 166 | 439 | 262 | 1156 | 106 362 | 717 | 5213 | 1648 |
| 369 | 136 161 | 50 243 409 | 209 | 745 | 173 | 453 | 292 | 1159 | 106 941 | 710 | 5206 | 1646 |
| 370 | 136 900 | 50 653 000 | 235 | 828 | 179 | 467 | 322 | 1162 | 107 521 | 703 | 5199 | 1644 |
| 371 | 137 641 | 51 064 811 | 19,261 | 60,910 | 7,186 | 15,481 | 33,352 | 1166 | 108 103 | 2,695 | 0,05192 | 0,01642 |
| 372 | 138 384 | 51 478 848 | 287 | 992 | 192 | 495 | 382 | 1169 | 108 687 | 688 | 5185 | 1640 |
| 373 | 139 129 | 51 895 117 | 313 | 61,074 | 198 | 508 | 412 | 1172 | 109 272 | 681 | 5178 | 1637 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 374 | 139 876 | 52 313 624 | 339 | 156 | 20$\bar{5}$ | 522 | 442 | 117$\bar{5}$ | 109 858 | 674 | 5171 | 1635 |
| 375 | 140 625 | 52 734 375 | 36$\bar{5}$ | 237 | 211 | 536 | 472 | 1178 | 110 447 | 667 | 5164 | 1633 |
| 376 | 141 376 | 53 157 376 | 19,391 | 61,319 | 7,218 | 15,550 | 33,501 | 1181 | 111 036 | 2,660 | 0,05157 | 0,01631 |
| 377 | 142 129 | 53 582 633 | 416 | 400 | 224 | 564 | 531 | 1184 | 111 628 | 653 | 5150 | 1629 |
| 378 | 142 884 | 54 010 152 | 422 | 482 | 230 | 577 | 561 | 1188 | 112 221 | 646 | 5143 | 1627 |
| 379 | 143 641 | 54 439 939 | 468 | 563 | 237 | 591 | 590 | 1191 | 112 815 | 639 | 5137 | 1624 |
| 380 | 144 400 | 54 872 000 | 494 | 644 | 243 | 60$\bar{5}$ | 620 | 1194 | 113 411 | 632 | 5130 | 1622 |
| 381 | 145 161 | 55 306 341 | 19,519 | 61,725 | 7,250 | 15,619 | 33,649 | 1197 | 114 009 | 2,62$\bar{5}$ | 0,05123 | 0,01620 |
| 382 | 145 924 | 55 742 968 | 545 | 806 | 256 | 632 | 679 | 1200 | 114 608 | 618 | 5116 | 1618 |
| 383 | 146 689 | 56 181 887 | 570 | 887 | 262 | 646 | 708 | 1203 | 115 209 | 611 | 5110 | 1616 |
| 384 | 147 456 | 56 623 104 | 596 | 968 | 268 | 659 | 737 | 1206 | 115 812 | 604 | 5103 | 1614 |
| 385 | 148 225 | 57 066 625 | 621 | 62,048 | 275 | 673 | 767 | 1210 | 116 416 | 597 | 5096 | 1612 |
| 386 | 148 996 | 57 512 456 | 19,647 | 62,129 | 7,281 | 15,687 | 33,796 | 1213 | 117 021 | 2,591 | 0,05090 | 0,01610 |
| 387 | 149 769 | 57 960 603 | 672 | 209 | 287 | 700 | 825 | 1216 | 117 628 | 584 | 5083 | 1607 |
| 388 | 150 544 | 58 411 072 | 698 | 290 | 294 | 714 | 854 | 1219 | 118 237 | 577 | 5077 | 1605 |
| 389 | 151 321 | 58 863 869 | 723 | 370 | 300 | 727 | 883 | 1222 | 118 847 | 571 | 5070 | 1603 |
| 390 | 152 100 | 59 319 000 | 748 | 45$\bar{0}$ | 306 | 741 | 912 | 1225 | 119 459 | 564 | 5064 | 1601 |
| 391 | 152 881 | 59 776 471 | 19,774 | 62,530 | 7,312 | 15,754 | 33,941 | 1228 | 120 072 | 2,558 | 0,05057 | 0,01599 |
| 392 | 153 664 | 60 236 288 | 799 | 610 | 319 | 767 | 970 | 1232 | 120 687 | 551 | 5051 | 1597 |
| 393 | 154 449 | 60 698 457 | 824 | 690 | 32$\bar{5}$ | 781 | 999 | 123$\bar{5}$ | 121 304 | 545 | 5044 | 1595 |
| 394 | 155 236 | 61 162 984 | 849 | 769 | 331 | 794 | 34,028 | 1238 | 121 922 | 538 | 5038 | 1593 |
| 395 | 156 025 | 61 629 875 | 87$\bar{5}$ | 849 | 337 | 808 | 056 | 1241 | 122 542 | 532 | 5032 | 1591 |
| 396 | 156 816 | 62 099 136 | 19,900 | 62,929 | 7,343 | 15,821 | 34,085 | 1244 | 123 163 | 2,525 | 0,05025 | 0,01589 |
| 397 | 157 609 | 62 570 773 | 92$\bar{5}$ | 63.008 | 35$\bar{0}$ | 834 | 114 | 1247 | 123 786 | 519 | 5019 | 1587 |
| 398 | 158 404 | 63 044 792 | 950 | 087 | 356 | 848 | 142 | 1250 | 124 410 | 513 | 5013 | 1585 |
| 399 | 159 201 | 63 521 199 | 97$\bar{5}$ | 166 | 362 | 861 | 171 | 1253 | 125 036 | 506 | 5006 | 1583 |
| 400 | 160 000 | 64 000 000 | 20,000 | 246 | 368 | 874 | 200 | 1257 | 125 664 | 500 | 5000 | 1581 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 401 | 160 801 | 64 481 201 | 20,025 | 63,325 | 7,374 | 15,887 | 34,228 | 1260 | 126 293 | 2,494 | 0,04994 | 0,01579 |
| 402 | 161 604 | 64 964 808 | 050 | 403 | 380 | 900 | 256 | 1263 | 126 923 | 488 | 4988 | 1577 |
| 403 | 162 409 | 65 450 827 | 075 | 482 | 386 | 914 | 285 | 1266 | 127 556 | 481 | 4981 | 1575 |
| 404 | 163 216 | 65 939 264 | 100 | 561 | 393 | 927 | 313 | 1269 | 128 190 | 475 | 4975 | 1573 |
| 405 | 164 025 | 66 430 125 | 125 | 640 | 399 | 940 | 341 | 1772 | 128 825 | 469 | 4969 | 1571 |
| 406 | 164 836 | 66 923 416 | 20,149 | 63,718 | 7,405 | 15,953 | 34,370 | 1275 | 129 462 | 2,463 | 0,04963 | 0,01569 |
| 407 | 165 649 | 67 419 143 | 174 | 797 | 411 | 966 | 398 | 1279 | 130 100 | 457 | 4957 | 1567 |
| 408 | 166 464 | 67 917 312 | 199 | 875 | 417 | 979 | 426 | 1282 | 130 741 | 451 | 4951 | 1566 |
| 409 | 167 281 | 68 417 929 | 224 | 953 | 423 | 992 | 454 | 1285 | 131 382 | 445 | 4945 | 1564 |
| 410 | 168 100 | 68 921 000 | 248 | 64,031 | 429 | 16,005 | 482 | 1288 | 132 025 | 439 | 4939 | 1562 |
| 411 | 168 921 | 69 426 531 | 20,273 | 64,109 | 7,435 | 16,018 | 34,510 | 1291 | 132 670 | 2,433 | 0,04933 | 0,01560 |
| 412 | 169 744 | 69 934 528 | 298 | 187 | 441 | 031 | 538 | 1294 | 133 317 | 427 | 4927 | 1558 |
| 413 | 170 569 | 70 444 997 | 322 | 265 | 447 | 044 | 566 | 1297 | 133 965 | 421 | 4921 | 1556 |
| 414 | 171 396 | 70 957 944 | 347 | 343 | 453 | 057 | 594 | 1301 | 134 614 | 415 | 4915 | 1554 |
| 415 | 172 225 | 71 473 375 | 372 | 420 | 459 | 070 | 622 | 1304 | 135 265 | 410 | 4909 | 1552 |
| 416 | 173 056 | 71 991 296 | 20,396 | 64,498 | 7,465 | 16,083 | 34,650 | 1307 | 135 918 | 2,404 | 0,04903 | 0,01550 |
| 417 | 173 889 | 72 511 713 | 421 | 576 | 471 | 096 | 677 | 1310 | 136 572 | 398 | 4897 | 1549 |
| 418 | 174 724 | 73 034 632 | 445 | 653 | 477 | 109 | 705 | 1313 | 137 228 | 392 | 4891 | 1547 |
| 419 | 175 561 | 73 560 059 | 469 | 730 | 483 | 121 | 733 | 1316 | 137 885 | 387 | 4885 | 1545 |
| 420 | 176 400 | 74 088 000 | 494 | 807 | 489 | 134 | 760 | 1319 | 138 544 | 381 | 4880 | 1543 |
| 421 | 177 241 | 74 618 461 | 20,518 | 64,885 | 7,495 | 16,147 | 34,788 | 1323 | 139 205 | 2,375 | 0,04874 | 0,01541 |
| 422 | 178 084 | 75 151 448 | 543 | 962 | 501 | 160 | 815 | 1326 | 139 867 | 370 | 4868 | 1539 |
| 423 | 178 929 | 75 686 967 | 567 | 65,038 | 507 | 173 | 843 | 1329 | 140 531 | 364 | 4862 | 1538 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 424 | 179 776 | 76 225 024 | 591 | 115 | 513 | 185 | 870 | 1332 | 141 196 | 358 | 4856 | 1536 |
| 425 | 180 625 | 76 765 625 | 616 | 192 | 518 | 198 | 898 | 1335 | 141 863 | 353 | 4851 | 1534 |
| 426 | 181 476 | 77 308 776 | 20,640 | 65,269 | 7,524 | 16,211 | 34,925 | 1338 | 142 531 | 2,347 | 0,04845 | 0,01532 |
| 427 | 182 329 | 77 854 483 | 664 | 345 | 530 | 223 | 952 | 1341 | 143 201 | 342 | 4839 | 1530 |
| 428 | 183 184 | 78 402 752 | 688 | 422 | 536 | 236 | 980 | 1345 | 143 872 | 336 | 4834 | 1529 |
| 429 | 184 041 | 78 953 589 | 712 | 498 | 542 | 249 | 35,007 | 1348 | 144 545 | 331 | 4828 | $1527$ |
| 430 | 184 900 | 79 507 000 | 736 | 574 | 548 | 261 | 034 | 1351 | 145 220 | 326 | 4822 | $1525$ |
| 431 | 185 761 | 80 062 991 | 20,761 | 65,651 | 7,554 | 16,274 | 35,061 | 1354 | 145 896 | $2,320$ | 0,04817 | 0,01523 |
| 432 | 186 624 | 80 621 568 | 785 | 727 | 560 | 287 | 088 | 1357 | 146 574 | $315$ | 4811 | 1521 |
| 433 | 187 489 | 81 182 737 | 809 | 803 | 565 | 299 | 115 | 1360 | 147 254 | 309 | 4806 | 1520 |
| 434 | 188 356 | 81 746 504 | 833 | 879 | 571 | 312 | 142 | 1363 | 147 934 | 304 | $4800$ | 1518 |
| 435 | 189 225 | 82 312 875 | 857 | $955$ | 577 | 324 | 169 | 1367 | 148 617 | 299 | $4795$ | 1516 |
| 436 | 190 096 | 82 881 856 | 20,881 | 66,030 | 7,583 | 16,337 | 35,196 | 1370 | 149 301 | 2,294 | 0,04789 | 0,01514 |
| 437 | 190 969 | 83 453 453 | $905$ | 106 | 589 | 349 | $223$ | 1373 | 149 987 | 288 | 4784 | 1513 |
| 438 | 191 844 | 84 027 672 | 928 | 182 | 594 | 362 | $250$ | 1376 | 150 674 | 283 | 4778 | 1511 |
| 439 | 192 721 | 84 604 519 | 952 | 257 | 600 | 374 | 277 | 1379 | 151 363 | 278 | 4773 | 1509 |
| 440 | 193 600 | 85 184 000 | 976 | 332 | 606 | 386 | 303 | 1382 | 152 053 | 273 | 4767 | 1508 |
| 441 | 194 481 | 85 766 121 | 21,000 | 66,408 | 7,612 | 16,399 | 35,330 | 1385 | 152 745 | 2,268 | 0,04762 | 0,01506 |
| 442 | 195 364 | 86 350 888 | 024 | 483 | 617 | 411 | 357 | 1389 | 153 439 | 262 | 4757 | 1504 |
| 443 | 196 249 | 86 938 307 | 048 | 558 | 623 | 424 | 384 | $1392$ | 154 134 | 257 | 4751 | 1502 |
| 444 | 197 136 | 87 528 384 | 071 | 633 | $629$ | 436 | 410 | $1395$ | 154 830 | 252 | 4746 | 1501 |
| 445 | 198 025 | 88 121 125 | 095 | 708 | $635$ | 448 | 437 | 1398 | 155 528 | 247 | 4740 | 1499 |
| 446 | 198 916 | 88 716 536 | 21,119 | 66,783 | 7,640 | 16,461 | 35,463 | 1401 | 156 228 | 2,242 | 0,04735 | 0,01497 |
| 447 | 199 809 | 89 314 623 | 142 | 858 | 646 | 473 | 490 | 1404 | 156 930 | 237 | 4730 | 1496 |
| 448 | 200 704 | 89 915 392 | 166 | 933 | 652 | 485 | 516 | 1407 | 157 633 | 232 | $4725$ | 1494 |
| 449 | 201 601 | 90 518 849 | 190 | 67,007 | 657 | 497 | 543 | 1411 | 158 337 | 227 | 4719 | 1492 |
| 450 | 202 500 | 91 125 000 | 213 | 082 | 663 | 510 | 569 | 1414 | 159 043 | 222 | 4714 | 1491 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ | $\pi n$ | $\frac{\pi n^3}{4}$ | $\frac{1000}{n}$ | $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1}{\sqrt{10n}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 451 | 203 401 | 91 733 851 | 21,237 | 67,157 | 7,669 | 16,522 | 35,595 | 1417 | 159 751 | 2,217 | 0,04709 | 0,01489 |
| 452 | 204 304 | 92 345 408 | 260 | 231 | 674 | 534 | 622 | 1420 | 160 460 | 212 | 4704 | 1487 |
| 453 | 205 209 | 92 959 677 | 284 | 305 | 680 | 546 | 648 | 1423 | 161 171 | 208 | 4698 | 1486 |
| 454 | 206 116 | 93 576 664 | 307 | 380 | 686 | 558 | 674 | 1426 | 161 883 | 203 | 4693 | 1484 |
| 455 | 207 025 | 94 196 375 | 331 | 454 | 691 | 571 | 700 | 1429 | 162 597 | 198 | 4688 | 1482 |
| 456 | 207 936 | 94 818 816 | 21,354 | 67,528 | 7,697 | 16,583 | 35,726 | 1433 | 163 313 | 2,193 | 0,04683 | 0,01481 |
| 457 | 208 849 | 95 443 993 | 378 | 602 | 703 | 595 | 752 | 1436 | 164 030 | 188 | 4678 | 1479 |
| 458 | 209 764 | 96 071 912 | 401 | 676 | 708 | 607 | 778 | 1439 | 164 748 | 183 | 4673 | 1478 |
| 459 | 210 681 | 96 702 579 | 424 | 750 | 714 | 619 | 804 | 1442 | 165 468 | 179 | 4668 | 1476 |
| 460 | 211 600 | 97 336 000 | 448 | 823 | 719 | 631 | 830 | 1445 | 166 190 | 174 | 4663 | 1474 |
| 461 | 212 521 | 97 972 181 | 21,471 | 67,897 | 7,725 | 16,643 | 35,856 | 1448 | 166 914 | 2,169 | 0,04657 | 0,01473 |
| 462 | 213 444 | 98 611 128 | 494 | 971 | 731 | 655 | 882 | 1451 | 167 639 | 165 | 4652 | 1471 |
| 463 | 214 369 | 99 252 847 | 517 | 68,044 | 736 | 667 | 908 | 1455 | 168 365 | 160 | 4647 | 1470 |
| 464 | 215 296 | 99 897 344 | 541 | 118 | 742 | 679 | 934 | 1458 | 169 093 | 155 | 4642 | 1468 |
| 465 | 216 225 | 100 544 625 | 564 | 191 | 747 | 691 | 960 | 1461 | 169 823 | 151 | 4637 | 1466 |
| 466 | 217 156 | 101 194 696 | 21,587 | 68,264 | 7,753 | 16,703 | 35,986 | 1464 | 170 554 | 2,146 | 0,04632 | 0,01465 |
| 467 | 218 089 | 101 847 563 | 610 | 337 | 758 | 715 | 36,011 | 1467 | 171 287 | 141 | 4627 | 1463 |
| 468 | 219 024 | 102 503 232 | 633 | 411 | 764 | 727 | 037 | 1470 | 172 021 | 137 | 4623 | 1462 |
| 469 | 219 961 | 103 161 709 | 656 | 484 | 769 | 739 | 063 | 1473 | 172 757 | 132 | 4618 | 1460 |
| 470 | 220 900 | 103 823 000 | 679 | 557 | 775 | 751 | 088 | 1477 | 173 494 | 128 | 4613 | 1459 |
| 471 | 221 841 | 104 487 111 | 21,703 | 68,629 | 7,780 | 16,763 | 36,114 | 1480 | 174 234 | 2,123 | 0,04608 | 0,01457 |
| 472 | 222 784 | 105 154 048 | 726 | 702 | 786 | 774 | 139 | 1483 | 174 974 | 119 | 4603 | 1456 |
| 473 | 223 729 | 105 823 817 | 749 | 775 | 791 | 786 | 165 | 1486 | 175 716 | 114 | 4598 | 1454 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 474 | 224 676 | 106 496 424 | 772 | 848 | 797 | 798 | 190 | 1489 | 176 460 | 110 | 4593 | 1452 |
| 475 | 225 625 | 107 171 875 | 794 | 920 | 802 | 810 | 216 | 1492 | 177 205 | 105 | 4588 | 1451 |
| 476 | 226 576 | 107 850 176 | 21,817 | 68,993 | 7,808 | 16,822 | 36,241 | 1495 | 177 952 | 2,101 | 0,04583 | 0,01449 |
| 477 | 227 529 | 108 531 333 | 840 | 69,065 | 813 | 833 | 267 | 1499 | 178 701 | 096 | 4579 | 1448 |
| 478 | 228 484 | 109 215 352 | 863 | 138 | 819 | 845 | 292 | 1502 | 179 451 | 092 | 4574 | 1446 |
| 479 | 229 441 | 109 902 239 | 886 | 210 | 824 | 857 | 317 | 150$\bar{5}$ | 180 203 | 088 | 4569 | 1445 |
| 480 | 230 400 | 110 592 000 | 909 | 282 | 830 | 869 | 342 | 1508 | 180 956 | 083 | 4564 | 1443 |
| 481 | 231 361 | 111 284 641 | 21,932 | 69,354 | 7,835 | 16,880 | 36,368 | 1511 | 181 711 | 2,079 | 0,04560 | 0,01442 |
| 482 | 232 324 | 111 980 168 | 954 | 426 | 841 | 892 | 393 | 1514 | 182 467 | 075 | 4555 | 1440 |
| 483 | 233 289 | 112 678 587 | 977 | 498 | 846 | 904 | 418 | 1517 | 183 22$\bar{5}$ | 070 | 4550 | 1439 |
| 484 | 234 256 | 113 379 904 | 22,000 | 570 | 851 | 915 | 443 | 1521 | 183 984 | 066 | 4545 | 1437 |
| 485 | 235 225 | 114 084 125 | 023 | 642 | 857 | 927 | 468 | 1524 | 184 745 | 062 | 4541 | 1436 |
| 486 | 236 196 | 114 791 256 | 22,045 | 69,714 | 7,862 | 16,939 | 36,493 | 1527 | 185 508 | 2,058 | 0,04536 | 0,01434 |
| 487 | 237 169 | 115 501 303 | 068 | 785 | 868 | 950 | 518 | 1530 | 186 272 | 053 | 4531 | 1433 |
| 488 | 238 144 | 116 214 272 | 091 | 857 | 873 | 962 | 543 | 1533 | 187 038 | 049 | 4527 | 1432 |
| 489 | 239 121 | 116 930 169 | 113 | 929 | 878 | 973 | 568 | 1536 | 187 805 | 04$\bar{5}$ | 4522 | 1430 |
| 490 | 240 100 | 117 649 000 | 136 | 70,000 | 884 | 98$\bar{5}$ | 593 | 1539 | 188 574 | 041 | 4518 | 1429 |
| 491 | 241 081 | 118 370 771 | 22,159 | 70,071 | 7,889 | 16,997 | 36,618 | 1543 | 189 34$\bar{5}$ | 2,037 | 0,04513 | 0,01427 |
| 492 | 242 064 | 119 095 488 | 181 | 143 | 894 | 17,008 | 643 | 1546 | 190 117 | 033 | 4508 | 1426 |
| 493 | 243 049 | 119 823 157 | 204 | 214 | 900 | 020 | 668 | 1549 | 190 890 | 028 | 4504 | 1424 |
| 494 | 244 036 | 120 553 784 | 226 | 285 | 905 | 031 | 692 | 1552 | 191 665 | 024 | 4499 | 1423 |
| 495 | 245 025 | 121 287 375 | 249 | 356 | 910 | 043 | 717 | 1555 | 192 442 | 020 | 449$\bar{5}$ | 1421 |
| 496 | 246 016 | 122 023 936 | 22,271 | 70,427 | 7,916 | 17,054 | 36,742 | 1558 | 193 221 | 2,016 | 0,04490 | 0,01420 |
| 497 | 247 009 | 122 763 473 | 293 | 498 | 921 | 065 | 766 | 156$\bar{1}$ | 194 000 | 012 | 4486 | 1418 |
| 498 | 248 004 | 123 505 992 | 316 | 569 | 926 | 077 | 791 | 156$\bar{5}$ | 194 78$\bar{2}$ | 008 | 4481 | 1417 |
| 499 | 249 001 | 124 251 499 | 338 | 640 | 932 | 088 | 816 | 1568 | 195 56$\bar{5}$ | 004 | 4477 | 1416 |
| 500 | 250 000 | 125 000 000 | 361 | 711 | 937 | 100 | 840 | 1571 | 196 35$\bar{0}$ | 000 | 4472 | 1414 |

Таблица 2

## Степень некоторых чисел

| $n$ | $n^4$ | $n^5$ | $n^6$ | $n^7$ | $n^8$ | $n^9$ | $n^{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1 024 |
| 3 | 81 | 243 | 729 | 2 187 | 6 561 | 19 683 | 59 049 |
| 4 | 256 | 1 024 | 4 096 | 16 384 | 65 536 | 262 144 | 1 048 576 |
| 5 | 625 | 3 125 | 15 625 | 78 125 | 390 625 | 1 953 125 | 9 765 625 |
| 6 | 1 296 | 7 776 | 46 656 | 279 936 | 1 679 616 | 10 077 696 | 60 466 176 |
| 7 | 2 401 | 16 807 | 117 649 | 823 543 | 5 764 801 | 40 353 607 | 282 475 249 |
| 8 | 4 096 | 32 768 | 262 144 | 2 097 152 | 16 777 216 | 134 217 728 | 1 073 741 824 |
| 9 | 6 561 | 59 049 | 531 441 | 4 782 969 | 43 046 721 | 387 420 489 | 3 486 784 401 |
| 10 | 10 000 | 100 000 | 1 000 000 | 10 000 000 | 100 000 000 | 1 000 000 000 | 10 000 000 000 |
| 11 | 14 641 | 161 051 | 1 771 561 | 19 487 171 | 214 358 881 | 2 357 947 691 | 25 937 424 601 |
| 12 | 20 736 | 248 832 | 2 985 984 | 35 831 808 | 429 981 696 | 5 159 780 352 | 61 917 364 224 |
| 13 | 28 561 | 371 293 | 4 826 809 | 62 748 517 | 815 730 721 | 10 604 499 373 | 137 858 491 849 |
| 14 | 38 416 | 537 824 | 7 529 536 | 105 413 504 | 1 475 789 056 | 20 661 046 784 | 289 254 654 976 |
| 15 | 50 625 | 759 375 | 11 390 625 | 170 859 375 | 2 562 890 625 | 38 443 359 375 | 576 650 390 625 |
| 16 | 65 536 | 1 048 576 | 16 777 216 | 268 435 456 | 4 294 967 296 | 68 719 476 736 | 1 099 511 627 776 |
| 17 | 83 521 | 1 419 857 | 24 137 569 | 410 338 673 | 6 975 757 441 | 118 587 876 497 | 2 015 993 900 449 |
| 18 | 104 976 | 1 889 568 | 34 012 224 | 612 220 032 | 11 019 960 576 | 198 359 290 368 | 3 570 467 226 624 |
| 19 | 130 321 | 2 476 099 | 47 045 881 | 893 871 739 | 16 983 563 041 | 322 687 697 779 | 6 131 066 257 801 |
| 20 | 160 000 | 3 200 000 | 64 000 000 | 1 280 000 000 | 25 600 000 000 | 512 000 000 000 | 10 240 000 000 000 |

Таблица 3

## Числа $\frac{n}{\pi}$ и $\frac{\pi}{n}$

| $n$ | $\frac{n}{\pi}$ | $\frac{\pi}{n}$ | $n$ | $n$ | $\frac{n}{\pi}$ | $\frac{\pi}{n}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,3183 | 3,1416 | 1 | 31 | 9,8676 | 0,10134 | 31 |
| 2 | 6366 | 1,5708 | 2 | 32 | 10,1859 | 09817 | 32 |
| 3 | 9549 | 0472 | 3 | 33 | 5042 | 09520 | 33 |
| 4 | 1,2732 | 0,7854 | 4 | 34 | 10,8225 | 0,09239 | 34 |
| 5 | 5915 | 6283 | 5 | 35 | 11,1408 | 08976 | 35 |
| 6 | 9099 | 5236 | 6 | 36 | 4592 | 08727 | 36 |
| 7 | 2,2282 | 0,4488 | 7 | 37 | $11,777\overline{5}$ | 0,08491 | 37 |
| 8 | $5465$ | 3927 | 8 | 38 | 12,0958 | 08267 | 38 |
| 9 | 8648 | 3481 | 9 | 39 | 4141 | 08051 | 39 |
| 10 | 3,1831 | 0,3142 | 10 | 40 | 12,7324 | 0,07854 | 40 |
| 11 | 5014 | 2856 | 11 | 41 | 13,0507 | 07662 | 41 |
| 12 | 8197 | 2618 | 12 | 42 | 3690 | 07480 | 42 |
| 13 | 4,1380 | 0,2417 | 13 | 43 | 13,6873 | 0,07306 | 43 |
| 14 | 4563 | 2244 | 14 | 44 | 14,0056 | 07140 | 44 |
| 15 | 7746 | 2094 | 15 | 45 | 3239 | 06981 | 45 |
| 16 | 5,0930 | 0,1963 | 16 | 46 | 14,6423 | 0,06830 | 46 |
| 17 | 4113 | 1848 | 17 | 47 | 9606 | 06684 | 47 |
| 18 | 7296 | 1745 | 18 | 48 | 15,2789 | $0654\overline{5}$ | 48 |
| 19 | 6,0479 | 0,1653 | 19 | 49 | $15,597\overline{2}$ | 0,06411 | 49 |
| 20 | 3662 | 1571 | 20 | 50 | $915\overline{5}$ | 06283 | 50 |
| 21 | 6845 | 1446 | 21 | 51 | 16,2338 | 06160 | 51 |
| 22 | 7,0028 | 0,1451 | 22 | 52 | 16,5521 | 0,06042 | 52 |
| 23 | 3211 | 1366 | 23 | 53 | 8704 | 05928 | 53 |
| 24 | 6394 | 1309 | 24 | 54 | 17,1887 | 05818 | 54 |
| 25 | 7,9577 | 0,1257 | 25 | 55 | 17,5070 | 0,05712 | 55 |
| 26 | 8,2761 | 1208 | 26 | 56 | 8254 | 05610 | 56 |
| 27 | 5944 | 1163 | 27 | 57 | 18,1437 | 05512 | 57 |
| 28 | 8,9127 | 0,1122 | 28 | 58 | 18,4620 | $0,0541\overline{7}$ | 58 |
| 29 | 9,2310 | 1083 | 29 | 59 | 7803 | $0532\overline{5}$ | 59 |
| 30 | 5493 | 1047 | 30 | 60 | 19,0986 | 05236 | 60 |

**Примеры.** 1. $\frac{\pi}{14} = 0{,}2244$ ($n = 14$ находим в левом крайнем столбце таблицы).

2. $\frac{32}{\pi} = 10{,}1859$ ($n = 32$ находим в пятом вертикальном столбце таблицы 3).

**Числа, кратные и обратные $M$** Таблица 4

| $n$ | $nM$ | $\frac{n}{M}$ | $\frac{M}{n}$ | $n$ | $n$ | $nM$ | $\frac{n}{M}$ | $\frac{M}{n}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,4343 | 2,3026 | 0,43429 | 1 | 16 | 6,9487 | 36,8414 | 0,02714 | 16 |
| 2 | 8686 | 4,6052 | 21715 | 2 | 17 | 7,3830 | 39,1439 | 02555 | 17 |
| 3 | 1,3029 | 6,9078 | 14476 | 3 | 18 | 8173 | 41,4465 | 02413 | 18 |
| 4 | 1,7372 | 9,2103 | 0,10857 | 4 | 19 | 8,2516 | 43,7491 | 0,02286 | 19 |
| 5 | 2,1715 | 11,5129 | 08686 | 5 | 20 | 6859 | 46,0517 | 02171 | 20 |
| 6 | 6058 | 13,8155 | 07235 | 6 | 21 | 9,1202 | 48,3543 | 02068 | 21 |
| 7 | 3,0401 | 16,1181 | 0,06042 | 7 | 22 | 9,5545 | 50,6569 | 0,01974 | 22 |
| 8 | 4744 | 18,4207 | 05429 | 8 | 23 | 9888 | 52,9595 | 01888 | 23 |
| 9 | 9087 | 20,7233 | 04825 | 9 | 24 | 10,4231 | 55,2620 | 01810 | 24 |
| 10 | 4,3429 | 23,0259 | 0,04343 | 10 | 25 | 10,8574 | 57,5646 | 0,01738 | 25 |
| 11 | 7772 | 25,3284 | 03949 | 11 | 26 | 11,2917 | 59,8672 | 01670 | 26 |
| 12 | 5,2115 | 27,6310 | 03620 | 12 | 27 | 7260 | 62,1698 | 01608 | 27 |
| 13 | 5,6458 | 29,9336 | 0,03341 | 13 | 28 | 12,1602 | 64,4724 | 0,01551 | 28 |
| 14 | 6,0801 | 32,2362 | 03102 | 14 | 29 | 5945 | 66,7750 | 01498 | 29 |
| 15 | 5144 | 34,5388 | 02895 | 15 | 30 | 13,0288 | 69,0776 | 01448 | 30 |

**Числа, кратные и обратные e** Таблица 5

| $n$ | $ne$ | $\frac{n}{e}$ | $\frac{e}{n}$ | $n$ | $n$ | $ne$ | $\frac{n}{e}$ | $\frac{e}{n}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,7183 | 0,3679 | 2,7183 | 1 | 16 | 43,4925 | 5,8861 | 0,16989 | 16 |
| 2 | 5,4366 | 7358 | 1,3591 | 2 | 17 | 46,2108 | 6,2540 | 15990 | 17 |
| 3 | 8,1548 | 1,1036 | 0,9061 | 3 | 18 | 48,9291 | 6218 | 15102 | 18 |
| 4 | 10,8731 | 1,4715 | 0,6796 | 4 | 19 | 51,6474 | 6,9897 | 0,14307 | 19 |
| 5 | 13,5914 | 8394 | 5437 | 5 | 20 | 54,3656 | 7,3576 | 13591 | 20 |
| 6 | 16,3097 | 2,2073 | 4530 | 6 | 21 | 57,0839 | 7255 | 12944 | 21 |
| 7 | 19,0280 | 2,5752 | 0,3883 | 7 | 22 | 59,8022 | 8,0933 | 0,12652 | 22 |
| 8 | 21,7463 | 9430 | 3398 | 8 | 23 | 62,5205 | 4612 | 11819 | 23 |
| 9 | 24,4645 | 3,3109 | 3020 | 9 | 24 | 65,2388 | 8291 | 11326 | 24 |
| 10 | 27,1828 | 3,6788 | 0,2718 | 10 | 25 | 67,9570 | 9,1970 | 0,10873 | 25 |
| 11 | 29,9011 | 4,0467 | 2471 | 11 | 26 | 70,6753 | 5649 | 10455 | 26 |
| 12 | 32,6194 | 4146 | 2265 | 12 | 27 | 73,3936 | 9327 | 10068 | 27 |
| 13 | 35,3377 | 4,7824 | 0,2091 | 13 | 28 | 76,1119 | 10,3006 | 0,09708 | 28 |
| 14 | 38,0559 | 5,1503 | 1942 | 14 | 29 | 78,8302 | 6685 | 09366 | 29 |
| 15 | 40,7742 | 5182 | 1812 | 15 | 30 | 81,5485 | 11,0364 | 09061 | 30 |

**Примеры.** 1. $23/M = 52{,}9595$ ($n = 23$, табл. 4).

2. $8e = 21{,}7463$ ($n = 8$ находим в левом крайнем столбце табл. 5).

## Простые числа до 2803

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 179 | 421 | 677 | 971 | 1259 | 1559 | 1873 | 2203 | 2521 |
| 2 | 181 | 431 | 683 | 977 | 1277 | 1567 | 1877 | 2207 | 2531 |
| 3 | 191 | 433 | 691 | 983 | 1279 | 1571 | 1879 | 2213 | 2539 |
| 5 | 193 | 439 | 701 | 991 | 1283 | 1579 | 1889 | 2221 | 2543 |
| 7 | 197 | 443 | 709 | 997 | 1289 | 1583 | 1901 | 2237 | 2549 |
| 11 | 199 | 449 | 719 | 1009 | 1291 | 1597 | 1907 | 2239 | 2551 |
| 13 | 211 | 457 | 727 | 1013 | 1297 | 1601 | 1913 | 2243 | 2557 |
| 17 | 223 | 461 | 733 | 1019 | 1301 | 1607 | 1931 | 2251 | 2579 |
| 19 | 227 | 463 | 739 | 1021 | 1303 | 1609 | 1933 | 2267 | 2591 |
| 23 | 229 | 467 | 743 | 1031 | 1307 | 1613 | 1949 | 2269 | 2593 |
| 29 | 233 | 479 | 751 | 1033 | 1319 | 1619 | 1951 | 2273 | 2609 |
| 31 | 239 | 487 | 757 | 1039 | 1321 | 1621 | 1973 | 2281 | 2617 |
| 37 | 241 | 491 | 761 | 1049 | 1327 | 1627 | 1979 | 2287 | 2621 |
| 41 | 251 | 499 | 769 | 1051 | 1361 | 1637 | 1987 | 2293 | 2633 |
| 43 | 257 | 503 | 773 | 1061 | 1367 | 1657 | 1993 | 2297 | 2647 |
| 47 | 263 | 509 | 787 | 1063 | 1373 | 1663 | 1997 | 2309 | 2657 |
| 53 | 269 | 521 | 797 | 1069 | 1381 | 1667 | 1999 | 2311 | 2659 |
| 59 | 271 | 523 | 809 | 1087 | 1399 | 1669 | 2003 | 2333 | 2663 |
| 61 | 277 | 541 | 811 | 1091 | 1409 | 1693 | 2011 | 2339 | 2671 |
| 67 | 281 | 547 | 821 | 1093 | 1423 | 1697 | 2017 | 2341 | 2677 |
| 71 | 283 | 557 | 823 | 1097 | 1427 | 1699 | 2027 | 2347 | 2683 |
| 73 | 293 | 563 | 827 | 1103 | 1429 | 1709 | 2029 | 2351 | 2687 |
| 79 | 307 | 569 | 829 | 1109 | 1433 | 1721 | 2039 | 2357 | 2689 |
| 83 | 311 | 571 | 839 | 1117 | 1439 | 1723 | 2053 | 2371 | 2693 |
| 89 | 313 | 577 | 853 | 1123 | 1447 | 1733 | 2063 | 2377 | 2699 |
| 97 | 317 | 587 | 857 | 1129 | 1451 | 1741 | 2069 | 2381 | 2707 |
| 101 | 331 | 593 | 859 | 1151 | 1453 | 1747 | 2081 | 2383 | 2711 |
| 103 | 337 | 599 | 863 | 1153 | 1459 | 1753 | 2083 | 2389 | 2713 |
| 107 | 347 | 601 | 877 | 1163 | 1471 | 1759 | 2087 | 2393 | 2719 |
| 109 | 349 | 607 | 881 | 1171 | 1481 | 1777 | 2089 | 2399 | 2729 |
| 113 | 353 | 613 | 883 | 1181 | 1483 | 1783 | 2099 | 2411 | 2731 |
| 127 | 359 | 617 | 887 | 1187 | 1487 | 1787 | 2111 | 2417 | 2741 |
| 131 | 367 | 619 | 907 | 1193 | 1489 | 1789 | 2113 | 2423 | 2749 |
| 137 | 373 | 631 | 911 | 1201 | 1493 | 1801 | 2129 | 2437 | 2753 |
| 139 | 379 | 641 | 919 | 1213 | 1499 | 1811 | 2131 | 2441 | 2767 |
| 149 | 383 | 643 | 929 | 1217 | 1511 | 1823 | 2137 | 2447 | 2777 |
| 151 | 389 | 647 | 937 | 1223 | 1523 | 1831 | 2141 | 2459 | 2789 |
| 157 | 397 | 653 | 941 | 1229 | 1531 | 1847 | 2143 | 2467 | 2791 |
| 163 | 401 | 659 | 947 | 1231 | 1543 | 1861 | 2153 | 2473 | 2797 |
| 167 | 409 | 661 | 953 | 1237 | 1549 | 1867 | 2161 | 2477 | 2801 |
| 173 | 419 | 673 | 967 | 1249 | 1553 | 1871 | 2179 | 2503 | 2803 |

Таблица 7

## Некоторые несократимые дроби

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 : 2 | 0,5000 | 1 : 11 | 0,0909 | 7 : 15 | 0,4667 | 3 : 19 | 0,1579 |
| | | 2 : 11 | 0,1818 | 8 : 15 | 0,5333 | 4 : 19 | 0,2105 |
| 1 : 3 | 0,3333 | 3 : 11 | 0,2727 | 11 : 15 | 0,7333 | 5 : 19 | 0,2632 |
| 2 : 3 | 0,6667 | 4 : 11 | 0,3636 | 13 : 15 | 0,8667 | 6 : 19 | 0,3158 |
| 1 : 4 | 0,2500 | 5 : 11 | 0,4545 | 14 : 15 | 0,9333 | 7 : 19 | 0,3684 |
| 3 : 4 | 0,7500 | 6 : 11 | $0,5\overline{45}$ | | | 8 : 19 | 0,4211 |
| | | 7 : 11 | 0,6364 | 1 : 16 | 0,0625 | 9 : 19 | 0,4737 |
| 1 : 5 | 0,2000 | 8 : 11 | 0,7273 | 3 : 16 | 0,1875 | 10 : 19 | 0,5263 |
| 2 : 5 | 0,4000 | 9 : 11 | 0,8182 | 5 : 16 | 0,3125 | 11 : 19 | 0,5789 |
| 3 : 5 | 0,6000 | 10 : 11 | 0,9091 | 7 : 16 | 0,4375 | 12 : 19 | 0,6316 |
| 4 : 5 | 0,8000 | | | 9 : 16 | 0,5625 | 13 : 19 | 0,6842 |
| | | 1 : 12 | 0,0833 | 11 : 16 | 0,6875 | 14 : 19 | 0,7368 |
| 1 : 6 | 0,1667 | 5 : 12 | 0,4167 | 13 : 16 | 0,8125 | 15 : 19 | $0,78\overline{95}$ |
| 5 : 6 | 0,8333 | 7 : 12 | 0,5833 | 15 : 16 | 0,9375 | 16 : 19 | 0,8421 |
| | | 11 : 12 | 0,9167 | | | 17 : 19 | 0,8947 |
| 1 : 7 | 0,1429 | | | 1 : 17 | 0,0588 | 18 : 19 | 0,9474 |
| 2 : 7 | 0,2857 | 1 : 13 | 0,0769 | 2 : 17 | 0,1176 | | |
| 3 : 7 | 0,4286 | 2 : 13 | 0,1538 | 3 : 17 | $0,17\overline{65}$ | 1 : 20 | 0,0500 |
| 4 : 7 | 0,5714 | 3 : 13 | 0,2308 | 4 : 17 | 0,2353 | 3 : 20 | 0,1500 |
| 5 : 7 | 0,7143 | 4 : 13 | 0,3077 | 5 : 17 | 0,2941 | 7 : 20 | 0,3500 |
| 6 : 7 | 0,8571 | 5 : 13 | 0,3846 | 6 : 17 | 0,3529 | 9 : 20 | 0,4500 |
| | | 6 : 13 | 0,4615 | 7 : 17 | 0,4118 | 11 : 20 | 0,5500 |
| 1 : 8 | 0,1250 | 7 : 13 | $0,53\overline{85}$ | 8 : 17 | 0,4706 | 13 : 20 | 0,6500 |
| 3 : 8 | 0,3750 | 8 : 13 | 0,6154 | 9 : 17 | 0,5294 | 17 : 20 | 0,8500 |
| 5 : 8 | 0,6250 | 9 : 13 | 0,6923 | 10 : 17 | 0,5882 | 19 : 20 | 0,9500 |
| 7 : 8 | 0,8750 | 10 : 13 | 0,7692 | 11 : 17 | 0,6471 | | |
| | | 11 : 13 | 0,8462 | 12 : 17 | 0,7059 | 1 : 21 | 0,0476 |
| 1 : 9 | 0,1111 | 12 : 13 | 0,9231 | 13 : 17 | 0,7647 | 2 : 21 | 0,0952 |
| 2 : 9 | 0,2222 | | | 14 : 17 | 0,8235 | 4 : 21 | $0,19\overline{05}$ |
| 4 : 9 | 0,4444 | 1 : 14 | 0,0714 | 15 : 17 | 0,8824 | 5 : 21 | 0,2381 |
| 5 : 9 | 0,5556 | 3 : 14 | 0,2143 | 16 : 17 | 0,9412 | 8 : 21 | 0,3810 |
| 7 : 9 | 0,7778 | 5 : 14 | 0,3571 | | | 10 : 21 | 0,4762 |
| 8 : 9 | 0,8889 | 9 : 14 | 0,6429 | 1 : 18 | 0,0556 | 11 : 21 | 0,5238 |
| | | 11 : 14 | 0,7857 | 5 : 18 | 0,2778 | 13 : 21 | 0,6190 |
| | | 13 : 14 | 0,9286 | 7 : 18 | 0,3889 | 16 : 21 | 0,7619 |
| | | | | 11 : 18 | 0,6111 | 17 : 21 | 0,8095 |
| 1 : 10 | 0,1000 | | | 13 : 18 | 0,7222 | 19 : 21 | 0,9048 |
| 3 : 10 | 0,3000 | 1 : 15 | 0,0667 | 17 : 18 | 0,9444 | 20 : 21 | 0,9524 |
| 7 : 10 | 0,7000 | 2 : 15 | 0,1333 | 1 : 19 | 0,0526 | | |
| 9 : 10 | 0,9000 | 4 : 15 | 0,2667 | 2 : 19 | 0,1053 | 20 : 23 | 0,8696 |

Таблица 8

## Квадратные и кубические корни из некоторых дробей

| $\frac{p}{q}$ | $\sqrt{\frac{p}{q}}$ | $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$ | $\frac{p}{q}$ | $\sqrt{\frac{p}{q}}$ | $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $^1/_2$ | 0,7071 | 0,7937 | $^1/_{11}$ | 0,3015 | 0,4496 |
| $^1/_3$ | 0,5774 | 0,6934 | $^2/_{11}$ | 0,4264 | 0,5665 |
| $^2/_3$ | 0,8165 | 0,8736 | $^3/_{11}$ | 0,5222 | 0,6485 |
| $^1/_4$ | 0,5000 | 0,6300 | $^4/_{11}$ | 0,6030 | 0,7138 |
| $^3/_4$ | 0,8660 | 0,9086 | $^5/_{11}$ | 0,6742 | 0,7689 |
| $^1/_5$ | 0,4472 | 0,5848 | $^6/_{11}$ | 0,7385 | 0,8171 |
| $^2/_5$ | 0,6325 | 0,7368 | $^7/_{11}$ | 0,7977 | 0,8601 |
| $^3/_5$ | 0,7746 | 0,8434 | $^8/_{11}$ | 0,8528 | 0,8993 |
| $^4/_5$ | 0,8944 | 0,9283 | $^9/_{11}$ | 0,9045 | 0,9353 |
| $^1/_6$ | 0,4082 | 0,5503 | $^{10}/_{11}$ | 0,9535 | 0,9687 |
| $^5/_6$ | 0,9129 | 0,9410 | $^1/_{12}$ | 0,2887 | 0,4368 |
| $^1/_7$ | 0,3780 | 0,5528 | $^5/_{12}$ | 0,6455 | 0,7469 |
| $^2/_7$ | 0,5345 | 0,6586 | $^7/_{12}$ | 0,7638 | 0,8355 |
| $^3/_7$ | 0,6547 | 0,7539 | $^{11}/_{12}$ | 0,9574 | 0,9714 |
| $^4/_7$ | 0,7559 | 0,8298 | $^1/_{13}$ | 0,2774 | 0,4253 |
| $^5/_7$ | 0,8452 | 0,8939 | $^2/_{13}$ | 0,3922 | 0,5358 |
| $^6/_7$ | 0,9258 | 0,9499 | $^3/_{13}$ | 0,4804 | 0,6134 |
| $^1/_8$ | 0,3536 | 0,5000 | $^4/_{13}$ | 0,5547 | 0,6751 |
| $^3/_8$ | 0,6124 | 0,7211 | $^5/_{13}$ | 0,6202 | 0,7272 |
| $^5/_8$ | 0,7906 | 0,8550 | $^6/_{13}$ | 0,6794 | 0,7728 |
| $^7/_8$ | 0,9354 | 0,9565 | $^7/_{13}$ | 0,7338 | 0,8136 |
| $^1/_9$ | 0,3333 | 0,4807 | $^8/_{13}$ | 0,7845 | 0,8506 |
| $^2/_9$ | 0,4714 | 0,6057 | $^9/_{13}$ | 0,8321 | 0,8846 |
| $^4/_9$ | 0,6667 | 0,7631 | $^{10}/_{13}$ | 0,8771 | 0,9163 |
| $^5/_9$ | 0,7454 | 0,8221 | $^{11}/_{13}$ | 0,9199 | 0,9458 |
| $^7/_9$ | 0,8819 | 0,9196 | $^{12}/_{13}$ | 0,9608 | 0,9737 |
| $^8/_9$ | 0,9428 | 0,9615 | $^1/_{14}$ | 0,2673 | 0,4149 |
| $^1/_{10}$ | 0,3162 | 0,4642 | $^3/_{14}$ | 0,4629 | 0,5984 |
| $^3/_{10}$ | 0,5477 | 0,6694 | $^5/_{14}$ | 0,5976 | 0,7095 |
| $^7/_{10}$ | 0,8367 | 0,8879 | $^9/_{14}$ | 0,8018 | 0,8631 |
| $^9/_{10}$ | 0,9487 | 0,9655 | $^{11}/_{14}$ | 0,8864 | 0,9228 |
| | | | $^{13}/_{14}$ | 0,9636 | 0,9756 |

**Пример 1.** $\sqrt[3]{\frac{2}{7}} = 0{,}6586$ прочитываем в столбце, озаглавленном сверху« $\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$ » против $\frac{p}{q} = \frac{2}{7}$.

Таблица 9

**Длина дуги круга радиуса $R = 1$ (центральный угол в градах)**

| Градусы | Дуга $l$ | Градусы | Дуга $l$ | Градусы | Дуга $l$ | Градусы | Дуга $l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01571 | 26 | 0,4084 | 51 | 0,8011 | 76 | 1,1938 |
| 2 | 3142 | 27 | 4241 | 52 | 8168 | 77 | 2095 |
| 3 | 4712 | 28 | 4398 | 53 | 8325 | 78 | 2252 |
| 4 | 0,06283 | 29 | 0,4555 | 54 | 0,8482 | 79 | 1,2409 |
| 5 | 7854 | 30 | 4712 | 55 | 8639 | 80 | 2566 |
| 6 | 9425 | 31 | 4869 | 56 | 8796 | 81 | 2723 |
| 7 | 0,1100 | 32 | 0,5027 | 57 | 0,8954 | 82 | 1,2881 |
| 8 | 1257 | 33 | 5184 | 58 | 9111 | 83 | 3038 |
| 9 | 1414 | 34 | 5341 | 59 | 9268 | 84 | 3195 |
| 10 | 0,1571 | 35 | 0,5498 | 60 | 0,9425 | 85 | 1,3352 |
| 11 | 1728 | 36 | 5655 | 61 | 9582 | 86 | 3509 |
| 12 | 1885 | 37 | 5812 | 62 | 9739 | 87 | 3666 |
| 13 | 0,2042 | 38 | 0,5969 | 63 | 0,9896 | 88 | 1,3823 |
| 14 | 2199 | 39 | 6126 | 64 | 1,0053 | 89 | 3980 |
| 15 | 2356 | 40 | 6283 | 65 | 0210 | 90 | 4137 |
| 16 | 0,2513 | 41 | 0,6440 | 66 | 1,0367 | 91 | 1,4294 |
| 17 | 2670 | 42 | 6597 | 67 | 0524 | 92 | 4451 |
| 18 | 2827 | 43 | 6754 | 68 | 0681 | 93 | 4608 |
| 19 | 0,2985 | 44 | 0,6912 | 69 | 1,0838 | 94 | 1,4765 |
| 20 | 3142 | 45 | 7069 | 70 | 0996 | 95 | 4923 |
| 21 | 3299 | 46 | 7226 | 71 | 1153 | 96 | 5080 |
| 22 | 0,3456 | 47 | 0,7383 | 72 | 1,1310 | 97 | 1,5237 |
| 23 | 3613 | 48 | 7540 | 73 | 1467 | 98 | 5394 |
| 24 | 3770 | 49 | 7697 | 74 | 1624 | 99 | 5551 |
| 25 | 0,3927 | 50 | 0,7854 | 75 | 1,1781 | 100 | 1,5708 |

**Пример.** Для центрального угла в 15 град дуга круга радиуса $R = 1$ равна $l = 0{,}2356$, а для центрального угла в 1 град и радиуса $R = 3{,}75$ равна $l = 0{,}01571 \cdot 3{,}75 = 0{,}0589$.

Таблица 10

## Элементы сегмента круга

| Центральный угол $\alpha°$ | Длина дуги $l$ | Стрела $h$ | Длина хорды $a$ | $\frac{l}{h}$ | $\frac{h}{T}$ | $\frac{a}{h}$ | $\frac{h}{a}$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{a}{T}$ | Площадь сегмента $S$ | Длина касательной $T$ | Биссектриса $Б$ | $D = 2T - l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01745 | 0,00004 | 0,01745 | 436,2500 | 0,0023 | 436,2500 | 0,0022 | 1,0000 | 1,0000 | 0,00000 | 0,00873 | 0,00004 | 0,00000 |
| 2 | 03491 | 00015 | 03490 | 232,7333 | 0043 | 232,6667 | 0044 | 0001 | 0,9999 | 00000 | 01746 | 00015 | 00001 |
| 3 | 05236 | 00034 | 05235 | 154,0000 | 0065 | 153,9705 | 0065 | 0001 | 9999 | 00001 | 02619 | 00034 | 00002 |
| 4 | 06981 | 00061 | 06980 | 114,4426 | 0087 | 114,4262 | 0087 | 0002 | 9998 | 00003 | 03492 | 00061 | 00003 |
| 5 | 08727 | 00095 | 08724 | 91,8632 | 0109 | 91,8316 | 0109 | 0003 | 9997 | 00006 | 04366 | 00095 | 0,00005 |
| 6 | 0,10472 | 0,00137 | 0,10467 | 76,4380 | 0,0131 | 76,4015 | 0,0131 | 1,0005 | 0,9995 | 0,00010 | 0,05241 | 0,00137 | 0,00010 |
| 7 | 12217 | 00187 | 12210 | 65,3316 | 0153 | 65,2941 | 0158 | 0006 | 9994 | 00015 | 06116 | 00187 | 00013 |
| 8 | 13963 | 00244 | 13951 | 57,2254 | 0175 | 57,1762 | 0175 | 0008 | 9992 | 00023 | 06993 | 00244 | 00023 |
| 9 | 15708 | 00308 | 15692 | 51,0000 | 0196 | 50,9481 | 0196 | 0010 | 9990 | 00032 | 07870 | 00309 | 00032 |
| 10 | 17453 | 00381 | 17431 | 45,8084 | 0218 | 45,7507 | 0218 | 0013 | 9987 | 00044 | 08749 | 00382 | 00045 |
| 11 | 0,19199 | 0,00460 | 0,19169 | 41,7370 | 0,0240 | 41,6717 | 0,0240 | 1,0015 | 0,9985 | 0,00059 | 0,09629 | 0,00463 | 0,00059 |
| 12 | 20944 | 00548 | 20906 | 38,2190 | 0262 | 38,1496 | 0262 | 0018 | 9982 | 00076 | 10510 | 00551 | 00076 |
| 13 | 22689 | 00643 | 22641 | 35,2862 | 0283 | 35,2115 | 0284 | 0022 | 9978 | 00097 | 11394 | 00647 | 00099 |
| 14 | 24435 | 00745 | 24374 | 32,7987 | 0305 | 32,7168 | 0306 | 0025 | 9975 | 00121 | 12278 | 00751 | 00123 |
| 15 | 26180 | 00856 | 26105 | 30,5841 | 0327 | 30,4965 | 0328 | 0029 | 9971 | 00149 | 13165 | 00863 | 0,00150 |
| 16 | 0,27925 | 0,00973 | 0,27835 | 28,6117 | 0,0350 | 28,5195 | 0,0350 | 1,0032 | 0,9968 | 0,00181 | 0,14054 | 0,00983 | 0,00183 |
| 17 | 29671 | 01098 | 29562 | 27,1047 | 0370 | 26,9235 | 0371 | 0037 | 9963 | 00217 | 14945 | 01111 | 00219 |
| 18 | 31416 | 01231 | 31287 | 25,5207 | 0392 | 25,4159 | 0393 | 0041 | 9959 | 00257 | 15838 | 01247 | 00260 |
| 19 | 33161 | 01371 | 33010 | 24,1875 | 0413 | 24,0773 | 0415 | 0046 | 9954 | 00302 | 16734 | 01391 | 00307 |
| 20 | 34907 | 01519 | 34730 | 22,9803 | 0435 | 22,8637 | 0437 | 0051 | 9949 | 00352 | 17633 | 01543 | 00359 |

*Продолжение табл. 10*

| Центральный угол α° | Длина дуги $l$ | Стрела $h$ | Длина хорды $a$ | $\frac{l}{h}$ | $\frac{h}{l}$ | $\frac{a}{h}$ | $\frac{h}{a}$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{a}{l}$ | Площадь сегмента $S$ | Длина касательной $T$ | Биссектриса $Б$ | $D = 2t - l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 0,36652 | 0,01675 | 0,36447 | 21,8818 | 0,0457 | 21,7594 | 0,0459 | 1,0056 | 0,9944 | 0,00408 | 0,18534 | 0,01703 | 0,00416 |
| 22 | 38397 | 01837 | 38162 | 20,9020 | 0478 | 20,7741 | 0481 | 0062 | 9939 | 00468 | 19438 | 01872 | 00479 |
| 23 | 40143 | 02008 | 39874 | 19,9915 | 0500 | 19,8576 | 0504 | 0067 | 9933 | 00535 | 20345 | 02049 | 00547 |
| 24 | 41888 | 02185 | 41582 | 19,1707 | 0522 | 19,0307 | 0525 | 0073 | 9927 | 00607 | 21256 | 02234 | 00624 |
| 25 | 43633 | 02370 | 43288 | 18,4105 | 0543 | 18,26$\bar{5}$0 | 0548 | 0080 | 9921 | 00686 | 22169 | 02428 | 00705 |
| 26 | 0,45379 | 0,02563 | 0,44990 | 17,7074 | 0,056$\bar{5}$ | 17,5536 | 0,0570 | 1,0086 | 0,9914 | 0,00771 | 0,23087 | 0,02630 | 0,00795 |
| 27 | 47124 | 02763 | 46689 | 17,0554 | 0586 | 16,8979 | 0592 | 0093 | 9908 | 00862 | 24008 | 02842 | 00892 |
| 28 | 48869 | 02970 | 48384 | 16,4542 | 0608 | 16,2909 | 0614 | 0100 | 9901 | 00961 | 24933 | 03061 | 00997 |
| 29 | 50615 | 03185 | 50076 | 15,8917 | 0629 | 15,7224 | 0636 | 0108 | 9894 | 01067 | 25862 | 03290 | 01109 |
| 30 | 52360 | 03407 | 51764 | 15,3684 | 0651 | 15,1934 | 0658 | 0115 | 9886 | 01180 | 26795 | 03528 | 01230 |
| 31 | 0,54105 | 0,03637 | 0,53448 | 14,8763 | 0,0672 | 14,6956 | 0,0680 | 0,0123 | 0,9878 | 0,01301 | 0,27732 | 0,03774 | 0,01359 |
| 32 | 55851 | 03874 | 55127 | 14,4169 | 0694 | 14,2300 | 0703 | 0131 | 9871 | 01429 | 28675 | 04030 | 01499 |
| 33 | 57596 | 04118 | 56803 | 13,9864 | 071$\bar{5}$ | 13,7938 | 0725 | 0140 | 9862 | 01566 | 29621 | 04295 | 01646 |
| 34 | 59341 | 04370 | 58474 | 13,5792 | 0736 | 13,3808 | 0747 | 0149 | 9854 | 01711 | 30573 | 04569 | 01805 |
| 35 | 61087 | 04628 | 60141 | 13,1994 | 0758 | 12,9950 | 0770 | 0158 | 9845 | 01864 | 31530 | 04853 | 01973 |
| 36 | 0,62832 | 0,04894 | 0,61803 | 12,8386 | 0,0779 | 12,6283 | 0,0792 | 1,0167 | 0,9836 | 0,02027 | 0,32492 | 0,05146 | 0,02152 |
| 37 | 64577 | 05168 | 63461 | 12,4955 | 0800 | 12,2796 | 0814 | 0176 | 9827 | 02198 | 33460 | 05449 | 02343 |
| 38 | 66323 | 05448 | 65114 | 12,1738 | 0821 | 11,9519 | 0837 | 0186 | 9819 | 02378 | 34433 | 05762 | 02543 |
| 39 | 68068 | 05736 | 66761 | 11,8668 | 0843 | 11,6389 | 0859 | 0196 | 9808 | 02568 | 35412 | 06085 | 02756 |
| 40 | 69813 | 06031 | 68404 | 11,5757 | 0864 | 11,3421 | 0882 | 0206 | 9798 | 02767 | 36397 | 06418 | 02981 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 0,71558 | 0,06333 | 0,70042 | 11,2992 | 0,0885 | 11,0598 | 0,0901 | 1,0217 | 0,9788 | 0,02976 | 0,37388 | 0,06761 | 0,03218 |
| 42 | 73304 | 06642 | 71674 | 11,0364 | 0906 | 10,7910 | 0927 | 0227 | 9778 | 03195 | 38386 | 07114 | 03468 |
| 43 | 75049 | 06958 | 73300 | 10,7860 | 0927 | 10,5346 | 0949 | 0239 | 9767 | 03425 | 39391 | 07479 | 03733 |
| 44 | 76794 | 07282 | 74922 | 10,5457 | 0948 | 10,2887 | 0972 | 0250 | 9756 | 03664 | 40403 | 07853 | 04012 |
| 45 | 78540 | 07612 | 76536 | 10,3179 | 0969 | 10,0547 | 0995 | 0262 | 9745 | 03915 | 41421 | 08239 | 04302 |
| 46 | 0,80285 | 0,07950 | 0,78146 | 10,0987 | 0,0990 | 9,8297 | 0,1018 | 1,0274 | 0,9734 | 0,04176 | 0,42447 | 0,08636 | 0,04609 |
| 47 | 82030 | 08294 | 79750 | 9,8903 | 1011 | 6154 | 1040 | 0286 | 9722 | 04448 | 43481 | 09044 | 04932 |
| 48 | 83776 | 08645 | 81348 | 6907 | 1032 | 4098 | 1063 | 0299 | 9710 | 04731 | 44523 | 09464 | 05270 |
| 49 | 85521 | 09004 | 82938 | 4981 | 1053 | 2112 | 1086 | 0311 | 9698 | 05025 | 45573 | 09895 | 05625 |
| 50 | 87266 | 09369 | 84524 | 3143 | 1074 | 0217 | 1108 | 0325 | 9686 | 05331 | 46631 | 10338 | 05996 |
| 51 | 0,89012 | 0,09741 | 0,86102 | 9,1379 | 0,1094 | 8,8391 | 0,1131 | 1,0338 | 0,9673 | 0,05649 | 0,47698 | 0,10793 | 0,06384 |
| 52 | 90757 | 10121 | 87674 | 8,9672 | 1115 | 6626 | 1154 | 0352 | 9660 | 05978 | 48773 | 11260 | 06789 |
| 53 | 92502 | 10507 | 89240 | 8038 | 1136 | 4934 | 1177 | 0365 | 9647 | 06319 | 49858 | 11740 | 07214 |
| 54 | 94248 | 10899 | 90798 | 6474 | 1156 | 3309 | 1200 | 0380 | 9634 | 06673 | 50953 | 12233 | 07658 |
| 55 | 95993 | 11299 | 92350 | 4957 | 1177 | 1733 | 1223 | 0394 | 9620 | 07039 | 52057 | 12738 | 08121 |
| 56 | 0,97738 | 0,11705 | 0,93894 | 8,3501 | 0,1198 | 8,0217 | 0,1247 | 1,0410 | 0,9607 | 0,07417 | 0,53171 | 0,13257 | 0,08604 |
| 57 | 99484 | 12118 | 95432 | 2096 | 1218 | 7,8752 | 1270 | 0425 | 9593 | 07808 | 54296 | 13789 | 09108 |
| 58 | 1,01229 | 12538 | 96962 | 0738 | 1239 | 7335 | 1293 | 0440 | 9579 | 08212 | 55431 | 14335 | 09633 |
| 59 | 02974 | 12964 | 98484 | 7,9431 | 1259 | 5967 | 1316 | 0456 | 9564 | 08629 | 56577 | 14896 | 10180 |
| 60 | 04720 | 13397 | 1,00000 | 8167 | 1279 | 4643 | 1340 | 0472 | 9549 | 09059 | 57735 | 15479 | 10750 |
| 61 | 1,06465 | 0,13837 | 1,01508 | 7,6942 | 0,1300 | 7,3360 | 0,1363 | 1,0489 | 0,9534 | 0,09502 | 0,58905 | 0,16059 | 0,11345 |
| 62 | 08210 | 14283 | 03008 | 5761 | 1320 | 2119 | 1387 | 0505 | 9519 | 09958 | 60086 | 16663 | 11962 |
| 63 | 09956 | 14736 | 04500 | 4617 | 1340 | 0915 | 1410 | 0522 | 9504 | 10428 | 61280 | 17283 | 12604 |
| 64 | 11701 | 15195 | 05984 | 3512 | 1360 | 6,9749 | 1434 | 0540 | 9488 | 10911 | 62487 | 17918 | 13273 |
| 65 | 13446 | 15661 | 07460 | 2439 | 1380 | 8616 | 1457 | 0557 | 9472 | 11408 | 63707 | 18569 | 13968 |

*Продолжение табл. 10*

| Центральный угол $\alpha°$ | Длина дуги $l$ | Стрела $h$ | Длина хорды $a$ | $\frac{l}{h}$ | $\frac{h}{t}$ | $\frac{a}{h}$ | $\frac{h}{a}$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{a}{t}$ | Площадь сегмента $S$ | Длина касательной $t$ | Биссектриса $Б$ | $D = 2t - l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 1,15192 | 0,16133 | 1,08928 | 7,1401 | 0,1401 | 6,7519 | 0,1481 | 1,0575 | 0,9456 | 0,11919 | 0,64941 | 0,19236 | 0,14690 |
| 67 | 16937 | 16611 | 10388 | 0397 | 1421 | 6455 | 1505 | 0593 | 9440 | 12443 | 66189 | 19920 | 15441 |
| 68 | 18682 | 17096 | 11838 | 6,9421 | 1440 | 5418 | 1529 | 0612 | 9423 | 12982 | 67451 | 20622 | 16220 |
| 69 | 20428 | 17587 | 13282 | 8476 | 1460 | 4412 | 1553 | 0631 | 9407 | 13535 | 68728 | 21341 | 17028 |
| 70 | 22173 | 18085 | 14716 | 7555 | 1480 | 3432 | 1576 | 0650 | 9390 | 14102 | 70021 | 22077 | 17869 |
| 71 | 1,23918 | 0,18588 | 1,16140 | 6,6666 | 0,1500 | 6,2481 | 0,1601 | 1,0670 | 0,9372 | 0,14683 | 0,71329 | 0,22833 | 0,18740 |
| 72 | 25664 | 19098 | 17558 | 5800 | 1520 | 1555 | 1625 | 0690 | 9355 | 15279 | 72654 | 23607 | 19644 |
| 73 | 27409 | 19614 | 18964 | 4958 | 1539 | 0653 | 1649 | 0710 | 9337 | 15889 | 73996 | 24400 | 20583 |
| 74 | 29154 | 20136 | 20364 | 4141 | 1559 | 5,9776 | 1673 | 0730 | 9319 | 16514 | 75355 | 25214 | 21556 |
| 75 | 30900 | 20665 | 21752 | 3344 | 1579 | 8917 | 1697 | 0751 | 9301 | 17154 | 76733 | 26047 | 22566 |
| 76 | 1,32645 | 0,21199 | 1,23132 | 6,2571 | 0,1598 | 5,8084 | 0,1722 | 1,0773 | 0,9283 | 0,17808 | 0,78129 | 0,26902 | 0,23613 |
| 77 | 34390 | 21739 | 24502 | 1820 | 1618 | 7271 | 1746 | 0794 | 9264 | 18477 | 79544 | 27778 | 24698 |
| 78 | 36136 | 22285 | 25864 | 1089 | 1637 | 6479 | 1771 | 0816 | 9245 | 19160 | 80978 | 28676 | 25820 |
| 79 | 37881 | 22838 | 27216 | 0374 | 1656 | 5704 | 1795 | 0838 | 9226 | 19859 | 82434 | 29597 | 26987 |
| 80 | 39626 | 23396 | 28558 | 5,9679 | 1676 | 4949 | 1820 | 0861 | 9207 | 20573 | 83910 | 30541 | 28194 |
| 81 | 1,41372 | 0,23959 | 1,29890 | 5,9006 | 0,1695 | 5,4213 | 0,1845 | 1,0884 | 0,9188 | 0,21301 | 0,85408 | 0,31509 | 0,29444 |
| 82 | 43117 | 24529 | 31212 | 8346 | 1714 | 3493 | 1869 | 0908 | 9168 | 22045 | 86929 | 32501 | 30741 |
| 83 | 44862 | 25104 | 32524 | 7705 | 1733 | 2790 | 1894 | 0931 | 9148 | 22804 | 88473 | 33519 | 32084 |
| 84 | 46608 | 25686 | 33826 | 7077 | 1752 | 2101 | 1919 | 0955 | 9128 | 23578 | 90040 | 34563 | 33472 |
| 85 | 48353 | 26272 | 35118 | 6448 | 1771 | 1430 | 1944 | 0979 | 9108 | 24367 | 91633 | 35634 | 34913 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 86 | 1,50098 | 0,26865 | 1,36400 | 5,5871 | 0,1790 | 5,0772 | 0,1970 | 1,1004 | 0,9088 | 0,25171 | 0,93252 | 0,36733 | 0,36406 |
| 87 | 51844 | 27463 | 37670 | 5290 | 1809 | 0129 | 1995 | 1029 | 9067 | 25990 | 94896 | 37860 | 37948 |
| 88 | 53589 | 28066 | 38932 | 4724 | 1827 | 4,9502 | 2020 | 1055 | 9046 | 26825 | 96569 | 39016 | 39549 |
| 89 | 55334 | 28675 | 40182 | 4171 | 1846 | 8869 | 2046 | 1081 | 9025 | 27675 | 98270 | 40203 | 41206 |
| 90 | 57080 | 29289 | 41422 | 3631 | 1865 | 8285 | 2071 | 1107 | 9003 | 28540 | 1,00000 | 41421 | 42920 |
| 91 | 1,58825 | 0,29909 | 1,42650 | 5,3103 | 0,1883 | 4,7695 | 0,2097 | 1,1134 | 0,8982 | 0,29420 | 1,01761 | 0,42672 | 0,44697 |
| 92 | 60570 | 30534 | 43868 | 2587 | 1902 | 7117 | 2122 | 1161 | 8960 | 30316 | 03553 | 43956 | 46536 |
| 93 | 62316 | 31165 | 45074 | 2083 | 1920 | 6550 | 2148 | 1189 | 8938 | 31226 | 05378 | 45274 | 48440 |
| 94 | 64061 | 31800 | 46270 | 1592 | 1938 | 5997 | 2174 | 1216 | 8916 | 32152 | 07237 | 46628 | 50413 |
| 95 | 65806 | 32441 | 47456 | 1110 | 1957 | 5454 | 2200 | 1244 | 8894 | 33093 | 09131 | 48019 | 52456 |
| 96 | 1,67552 | 0,33087 | 1,48628 | 5,0640 | 0,1975 | 4,4920 | 0,2226 | 1,1273 | 0,8871 | 0,34050 | 1,11061 | 0,49448 | 0,54570 |
| 97 | 69297 | 33738 | 49792 | 0180 | 1993 | 4399 | 2252 | 1302 | 8848 | 35021 | 13029 | 50916 | 56761 |
| 98 | 71042 | 34394 | 50942 | 4,9730 | 2011 | 3886 | 2279 | 1322 | 8825 | 36008 | 15037 | 52425 | 59032 |
| 99 | 72788 | 35055 | 52082 | 9291 | 2029 | 3384 | 2305 | 1362 | 8802 | 37009 | 17085 | 53977 | 61382 |
| 100 | 74533 | 36721 | 53208 | 8860 | 2047 | 2890 | 2332 | 1392 | 8778 | 38026 | 19175 | 55572 | 63817 |
| 101 | 1,76278 | 0,36392 | 1,54324 | 4,8439 | 0,2064 | 4,2406 | 0,2358 | 1,1423 | 0,8755 | 0,39058 | 1,21310 | 0,57213 | 0,66342 |
| 102 | 78024 | 37068 | 55430 | 8026 | 2082 | 1931 | 2385 | 1454 | 8731 | 40104 | 23490 | 58902 | 68956 |
| 103 | 79769 | 37749 | 56522 | 7622 | 2100 | 1464 | 2412 | 1485 | 8707 | 41166 | 25717 | 60639 | 71665 |
| 104 | 81514 | 38436 | 57602 | 7225 | 2118 | 1004 | 2439 | 1516 | 8683 | 42242 | 27994 | 62427 | 74474 |
| 105 | 83260 | 39124 | 58670 | 6841 | 2135 | 0556 | 2466 | 1550 | 8658 | 43333 | 30323 | 64268 | 77386 |
| 106 | 1,85005 | 0,39818 | 1,59728 | 4,6463 | 0,2152 | 4,0115 | 0,2493 | 1,1583 | 0,8634 | 0,44439 | 1,32704 | 0,66164 | 0,80403 |
| 107 | 86750 | 40518 | 60792 | 6091 | 2170 | 3,9684 | 2520 | 1616 | 8609 | 45560 | 35142 | 68117 | 83534 |
| 108 | 88496 | 41221 | 61804 | 5728 | 2187 | 9253 | 2548 | 1650 | 8584 | 46695 | 37638 | 70130 | 86780 |
| 109 | 90241 | 41930 | 62824 | 5371 | 2204 | 8832 | 2575 | 1684 | 8559 | 47845 | 40195 | 72205 | 90149 |
| 110 | 91986 | 42642 | 63830 | 5023 | 2221 | 8420 | 2603 | 1719 | 8533 | 49008 | 42815 | 74345 | 93644 |

*Продолжение табл. 10*

| Центральный угол α° | Длина дуги $l$ | Стрела $h$ | Длина хорды $a$ | $\frac{l}{h}$ | $\frac{h}{l}$ | $\frac{a}{h}$ | $\frac{h}{a}$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{a}{l}$ | Площадь сегмента $S$ | Длина касательной $T$ | Биссектриса $Б$ | $D = 2t - l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 1.93732 | 0,43359 | 1,64826 | 4,4681 | 0,2238 | 3,8014 | 0,2631 | 1,1753 | 0,8508 | 0,50187 | 1,45501 | 0,76552 | 0,97270 |
| 112 | 95477 | 44081 | 65808 | 4345 | 2255 | 7614 | 2659 | 1789 | 8482 | 51379 | 48256 | 78829 | 1,01035 |
| 113 | 97222 | 44806 | 66778 | 4017 | 2272 | 7222 | 2687 | 1825 | 8456 | 52586 | 51084 | 81180 | 04946 |
| 114 | 98968 | 45536 | 67734 | 3695 | 2289 | 6835 | 2715 | 1862 | 8430 | 53806 | 53986 | 83608 | 09004 |
| 115 | 2,00713 | 46270 | 68678 | 3379 | 2305 | 6455 | 2743 | 1899 | 8404 | 55041 | 56969 | 86116 | 13225 |
| 116 | 2,02458 | 0,47008 | 1,69610 | 4,3069 | 0,2322 | 3,6081 | 0,2772 | 1,1937 | 0,8377 | 0,56289 | 1,60033 | 0,88708 | 1,17608 |
| 117 | 04204 | 47750 | 70528 | 2765 | 2338 | 5713 | 2800 | 1974 | 8351 | 57551 | 63185 | 91388 | 22166 |
| 118 | 05949 | 48496 | 71434 | 2467 | 2355 | 5350 | 2829 | 2013 | 8324 | 58827 | 66428 | 94160 | 26907 |
| 119 | 07694 | 49246 | 72326 | 2175 | 2371 | 4993 | 2858 | 2052 | 8297 | 60116 | 69766 | 97029 | 31838 |
| 120 | 09440 | 50000 | 73206 | 1888 | 2387 | 4641 | 2887 | 2092 | 8270 | 61418 | 73205 | 1,00000 | 36970 |
| 121 | 2,11185 | 0,50758 | 1,74072 | 4,1606 | 0,2403 | 3,4294 | 0,2916 | 1,2133 | 0,8243 | 0,62734 | 1,76749 | 1,03077 | 1,42313 |
| 122 | 12930 | 51519 | 74924 | 1330 | 2420 | 3953 | 2945 | 2173 | 8215 | 64063 | 80405 | 06267 | 47880 |
| 123 | 14675 | 52284 | 75764 | 1059 | 2435 | 3617 | 2975 | 2214 | 8187 | 65404 | 84177 | 09574 | 53779 |
| 124 | 16421 | 53053 | 76590 | 0793 | 2451 | 3286 | 3004 | 2256 | 8159 | 66759 | 88073 | 13005 | 59725 |
| 125 | 18166 | 53825 | 77402 | 0532 | 2467 | 2959 | 3034 | 2298 | 8131 | 68125 | 92098 | 16568 | 66030 |
| 126 | 2,19911 | 0,54609 | 1,78202 | 4,0270 | 0,2483 | 3,2632 | 0,3064 | 1,2340 | 0,8103 | 0,69505 | 1,96261 | 1,20269 | 1,72611 |
| 127 | 21657 | 55380 | 78986 | 0625 | 2498 | 2320 | 3094 | 2384 | 8075 | 70897 | 2,00569 | 24116 | 79481 |
| 128 | 23402 | 56163 | 79758 | 3,9777 | 2514 | 2006 | 3124 | 2428 | 8046 | 72301 | 05030 | 28117 | 86658 |
| 129 | 25147 | 56949 | 80508 | 9535 | 2529 | 1696 | 3155 | 2472 | 8018 | 73716 | 09654 | 32282 | 94161 |
| 130 | 26893 | 57738 | 81262 | 9297 | 2545 | 1394 | 3185 | 2518 | 7989 | 75144 | 14451 | 36620 | 2,02009 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 131 | 2,28638 | 0,58531 | 1,81992 | 3,9063 | 0,2560 | 3,1093 | 0,3216 | 1,2563 | 0,7960 | 0,76584 | 2,19430 | 1,41142 | 2,10222 |
| 132 | 30383 | 59326 | 82710 | 8833 | 2575 | 0798 | 3247 | 2609 | 7931 | 78034 | 24604 | 45859 | 18825 |
| 133 | 32129 | 60125 | 83412 | 8608 | 2590 | 0505 | 3278 | 2655 | 7901 | 79497 | 29984 | 50784 | 27839 |
| 134 | 33874 | 60927 | 84100 | 8386 | 2605 | 0216 | 3309 | 2704 | 7872 | 80970 | 35585 | 55930 | 37296 |
| 135 | 35619 | 61732 | 84776 | 8168 | 2620 | 2,9932 | 3341 | 2752 | 7842 | 82454 | 41421 | 61313 | 47233 |
| 136 | 2,37365 | 0,62539 | 1,85436 | 3,7955 | 0,2635 | 2,9651 | 0,3373 | 1,2800 | 0,7812 | 0,83949 | 2,47509 | 1,66947 | 2,57653 |
| 137 | 39110 | 63350 | 86084 | 7744 | 2649 | 9374 | 3404 | 2849 | 7782 | 85455 | 53865 | 72850 | 68620 |
| 138 | 40855 | 64163 | 86716 | 7538 | 2664 | 9100 | 3436 | 2900 | 7752 | 86971 | 60509 | 79043 | 80163 |
| 139 | 42601 | 64979 | 87334 | 7335 | 2678 | 8830 | 3469 | 2950 | 7722 | 88497 | 67462 | 85545 | 92323 |
| 140 | 44346 | 65798 | 87938 | 7136 | 2693 | 8563 | 3501 | 3000 | 7691 | 90034 | 74748 | 92380 | 3,05150 |
| 141 | 2,46091 | 0,66619 | 1,88528 | 3,6940 | 0,2707 | 2,8299 | 0,3534 | 1,3054 | 0,7661 | 0,91580 | 2,82391 | 1,99574 | 3,18691 |
| 142 | 47837 | 67443 | 89104 | 6748 | 2721 | 8039 | 3566 | 3106 | 7630 | 93135 | 90421 | 2,07155 | 33005 |
| 143 | 49582 | 68270 | 89664 | 6558 | 2735 | 7781 | 3599 | 3159 | 7599 | 94700 | 98868 | 15155 | 48154 |
| 144 | 51327 | 69098 | 90212 | 6373 | 2749 | 7528 | 3633 | 3213 | 7568 | 96274 | 3,07768 | 23607 | 64209 |
| 145 | 53073 | 69929 | 90744 | 6190 | 2763 | 7277 | 3666 | 3268 | 7537 | 97858 | 17159 | 32551 | 81245 |
| 146 | 2,54818 | 0,70763 | 1,91260 | 3,6010 | 0,2777 | 2,7028 | 0,3700 | 1,3323 | 0,7506 | 0,99449 | 3,27085 | 2,42030 | 3,99352 |
| 147 | 56563 | 71598 | 91764 | 5834 | 2791 | 6783 | 3734 | 3379 | 7474 | 1,01050 | 37594 | 52094 | 4,18625 |
| 148 | 58309 | 72436 | 92252 | 5660 | 2804 | 6541 | 3768 | 3436 | 7443 | 02658 | 48741 | 62796 | 39173 |
| 149 | 60054 | 73276 | 92726 | 5490 | 2818 | 6301 | 3802 | 3493 | 7411 | 04275 | 60588 | 74198 | 61122 |
| 150 | 61799 | 74118 | 93186 | 5322 | 2831 | 6065 | 3837 | 3552 | 7379 | 05900 | 73205 | 86370 | 84611 |
| 151 | 2,63545 | 0,74962 | 1,93630 | 3,5157 | 0,2844 | 2,5830 | 0,3871 | 1,3611 | 0,7347 | 1,07532 | 3,86671 | 2,99393 | 5,09797 |
| 152 | 65290 | 75818 | 94060 | 4990 | 2858 | 5596 | 3906 | 3671 | 7315 | 09171 | 4,01078 | 3,13357 | 36866 |
| 153 | 67035 | 76655 | 94474 | 4836 | 2871 | 5370 | 3942 | 3731 | 7283 | 10818 | 16530 | 28366 | 66025 |
| 154 | 68781 | 77509 | 94874 | 4677 | 2884 | 5142 | 3977 | 3793 | 7250 | 12472 | 33148 | 44541 | 97515 |
| 155 | 70526 | 78356 | 95260 | 4525 | 2896 | 4920 | 4013 | 3855 | 7218 | 14132 | 51071 | 62023 | 6,31616 |
| 156 | 2,72271 | 0,79209 | 1,95630 | 3,4374 | 0,2909 | 2,4698 | 0,4049 | 1,3918 | 0,7185 | 1,15799 | 4,70463 | 3,80973 | 6,68655 |
| 157 | 74017 | 80063 | 95984 | 4225 | 2922 | 4479 | 4085 | 3982 | 7182 | 17472 | 91516 | 4,01585 | 7,09015 |
| 158 | 75762 | 80919 | 96326 | 4080 | 2934 | 4262 | 4122 | 4046 | 7119 | 19151 | 5,14455 | 24084 | 53148 |
| 159 | 77507 | 81776 | 96650 | 3935 | 2947 | 4047 | 4158 | 4112 | 7086 | 20835 | 39552 | 48740 | 8,01597 |
| 160 | 79253 | 82635 | 96962 | 3794 | 2959 | 3835 | 4195 | 4178 | 7053 | 22525 | 67128 | 75877 | 55003 |

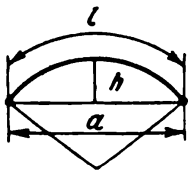
*Продолжение табл. 10*

| Центральный угол $\alpha°$ | Длина дуги $l$ | Стрела $h$ | Длина хорды $a$ | $\frac{l}{h}$ | $\frac{h}{l}$ | $\frac{a}{h}$ | $\frac{h}{a}$ | $\frac{l}{a}$ | $\frac{a}{l}$ | Площадь сегмента $S$ | Длина касательной $T$ | Биссектриса $Б$ | $D = 2t - l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 161 | 2,80998 | 0,83495 | 1,97258 | 3,3654 | 0,2971 | 2,3625 | 0,4233 | 1,4245 | 0,7020 | 1,24221 | 5,97576 | 5,05886 | 9,14154 |
| 162 | 82743 | 84357 | 97538 | 3517 | 2984 | 3417 | 4270 | 4313 | 6986 | 25921 | 6,61375 | 39245 | 80007 |
| 163 | 84489 | 85219 | 97804 | 3383 | 2996 | 3211 | 4308 | 4382 | 6953 | 27626 | 69116 | 76547 | 10,53743 |
| 164 | 86234 | 86083 | 98054 | 3251 | 3007 | 3007 | 4346 | 4452 | 6919 | 29335 | 7,11537 | 6,18530 | 11,36840 |
| 165 | 87979 | 86947 | 98288 | 3121 | 3019 | 2806 | 4385 | 4525 | 6886 | 31049 | 59575 | 66130 | 12,31171 |
| 166 | 2,89725 | 0,87813 | 1,98510 | 3,2993 | 0,3031 | 2,2606 | 0,4424 | 1,4594 | 0,6852 | 1,32766 | 8,14435 | 7,20551 | 13,39145 |
| 167 | 91470 | 88680 | 98714 | 2868 | 3043 | 2408 | 4463 | 4668 | 6818 | 34487 | 77689 | 83367 | 14,63908 |
| 168 | 93215 | 89547 | 98904 | 2744 | 3054 | 2212 | 4502 | 4742 | 6784 | 36212 | 9,51436 | 8,56677 | 16,09657 |
| 169 | 94961 | 90415 | 99080 | 2623 | 3065 | 2018 | 4542 | 4816 | 6749 | 37940 | 10,38540 | 9,43343 | 17,82119 |
| 170 | 96706 | 91284 | 99238 | 2504 | 3077 | 1826 | 4582 | 4892 | 6715 | 39671 | 11,43005 | 10,47371 | 19,89304 |
| 171 | 2,98451 | 0,92154 | 1,99384 | 3,2386 | 0,3088 | 2,1636 | 0,4622 | 1,4969 | 0,6681 | 1,41404 | 12,70620 | 11,74549 | 22,42789 |
| 172 | 3,00197 | 93024 | 99512 | 2271 | 3099 | 1447 | 4663 | 5047 | 6646 | 43140 | 14,30067 | 13,33559 | 25,59937 |
| 173 | 01942 | 93895 | 99626 | 2138 | 3112 | 1248 | 4704 | 5125 | 6611 | 44878 | 16,34986 | 15,38041 | 29,68030 |
| 174 | 03687 | 94767 | 99726 | 2046 | 3121 | 1076 | 4745 | 5205 | 6577 | 46617 | 19,08114 | 18,10732 | 35,12541 |
| 175 | 05433 | 95638 | 99810 | 1936 | 3131 | 0892 | 4786 | 5286 | 6542 | 48359 | 22,90377 | 21,92559 | 42,75361 |
| 176 | 3,07178 | 0,96510 | 1,99878 | 3,1829 | 0,3142 | 2,0711 | 0,4828 | 1,5368 | 0,6507 | 1,50101 | 28,63625 | 27,65371 | 54,20072 |
| 177 | 08923 | 97382 | 99932 | 1723 | 3152 | 0531 | 4871 | 5451 | 6472 | 51845 | 38,18846 | 37,20155 | 73,28769 |
| 178 | 10669 | 98255 | 99970 | 1619 | 3163 | 0352 | 4913 | 5536 | 6437 | 53589 | 57,28996 | 56,29869 | 111,47323 |
| 179 | 12414 | 99127 | 99992 | 1517 | 3173 | 0175 | 4957 | 5621 | 6402 | 55334 | 144,58865 | 113,59301 | 226,05316 |
| 180 | 14159 | — | 2,00000 | — | — | — | 5000 | 5708 | 6366 | 57080 | ∞ | ∞ | — |

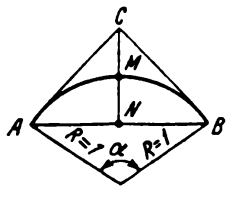
Таблица 11

**Длина дуги и площадь сегмента для хорды $a = 1$**

| $\frac{h}{a}$ | Длина дуги $l$ | Площадь сегмента $S$ | $\frac{h}{a}$ | Длина дуги $l$ | Площадь сегмента $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 1,0003 | 0,0067 | 0,26 | 1,1715 | 0,1824 |
| 0,02 | 0011 | 0133 | 0,27 | 1843 | 1901 |
| 0,03 | 0024 | 0200 | 0,28 | 1975 | 1979 |
| 0,04 | 1,0043 | 0,0267 | 0,29 | 1,2110 | 0,2058 |
| 0,05 | 0067 | 0334 | 0,30 | 2250 | 2137 |
| 0,06 | 0096 | 0401 | 0,31 | 2393 | 2218 |
| 0,07 | 1,0130 | 0,0468 | 0,32 | 1,2539 | 0,2299 |
| 0,08 | 0170 | 0536 | 0,33 | 2689 | 2381 |
| 0,09 | 0215 | 0604 | 0,34 | 2843 | 2464 |
| 0,10 | 1,0265 | 0,0672 | 0,35 | 1,3000 | 0,2548 |
| 0,11 | 0320 | 0740 | 0,36 | 3160 | 2633 |
| 0,12 | 0380 | 0809 | 0,37 | 3323 | 2719 |
| 0,13 | 1,0445 | 0,0878 | 0,38 | 1,3490 | 0,2806 |
| 0,14 | 0515 | 0948 | 0,39 | 3660 | 2893 |
| 0,15 | 0590 | 1018 | 0,40 | 3832 | 2982 |
| 0,16 | 1,0669 | 0,1088 | 0,41 | 1,4008 | 0,3072 |
| 0,17 | 0754 | 1159 | 0,42 | 4186 | 3162 |
| 0,18 | 0843 | 1231 | 0,43 | 4367 | 3254 |
| 0,19 | 1,0936 | 0,1303 | 0,44 | 1,4551 | 0,3347 |
| 0,20 | 1035 | 1375 | 0,45 | 4738 | 3441 |
| 0,21 | 1137 | 1448 | 0,46 | 4927 | 3536 |
| 0,22 | 1,1244 | 0,1522 | 0,47 | 1,5118 | 0,3632 |
| 0,23 | 1356 | 1596 | 0,48 | 5313 | 3729 |
| 0,24 | 1471 | 1671 | 0,49 | 5509 | 3828 |
| 0,25 | 1,1591 | 0,1747 | 0,50 | 1,5708 | 0,3927 |




**Пример.** Для $h = 0{,}40$ длина дуги $l = 1{,}3832$, а площадь сегмента $S = 0{,}2982$.




**Пример к табл. 10.** Для центрального угла $\alpha = 15°$ (левая крайняя колонка) длина дуги $AB = l = 0{,}26180$, стрелка $MN = h = 0{,}00856$, длина хорды $AB = a = 0{,}26105$, длина касательной $AS = BC = T = 0{,}13165$, биссектриса $SM = Б = 0{,}00863$.

Таблица 12

## Элементы правильных многоугольников

| $n$ | Центральный угол $\alpha$ | | Сторона многоугольника $a$ | Радиус вписанной окружности $r$ | Периметр многоугольника $p$ | Площадь многоугольника $S$ | $\frac{S}{a^2}$ | $\frac{S}{r^2}$ | $\frac{R}{a}$ | $\frac{R}{r}$ | $\frac{a}{r}$ | $\frac{r}{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° | | | | | | | | | | |
| 3 | 120 00 00 | 120,00 | 1,73205 | 0,50000 | 5,19615 | 1,2990 | 0,4330 | 5,1960 | 0,5774 | 2,0000 | 3,4641 | 0,2887 |
| 4 | 90 00 00 | 90,00 | 41421 | 70711 | 65686 | 2,0000 | 1,0000 | 4,0000 | 7071 | 1,4142 | 2,0000 | 5000 |
| 5 | 72 00 00 | 72,00 | 17557 | 80902 | 87786 | 3776 | 1,7205 | 3,6326 | 8507 | 2361 | 1,4531 | 6882 |
| 6 | 60 00 00 | 60,00 | 1,00000 | 0,86603 | 6,00000 | 2,5981 | 2,5981 | 3,4641 | 1,0000 | 1,1547 | 1,1547 | 0,8660 |
| 7 | 51 25 43 | 51,43 | 0,86779 | 90096 | 07453 | 7364 | 3,6337 | 3711 | 1524 | 1099 | 0,9632 | 1,0383 |
| 8 | 45 00 00 | 45,00 | 76537 | 92388 | 12294 | 8284 | 4,8283 | 3137 | 3066 | 0824 | 8284 | 2071 |
| 9 | 40 00 00 | 40,00 | 0,68404 | 0,93969 | 6,15636 | 2,8926 | 6,1819 | 3,2758 | 1,4619 | 1,0642 | 0,7279 | 1,3737 |
| 10 | 36 00 00 | 36,00 | 61803 | 95106 | 18034 | 9389 | 7,6943 | 2491 | 6180 | 0515 | 6498 | 5388 |
| 11 | 32 43 38 | 32,73 | 56351 | 95949 | 19862 | 9737 | 9,3648 | 2301 | 7746 | 0422 | 5873 | 7028 |
| 12 | 30 00 00 | 30,00 | 0,51764 | 0,96593 | 6,21166 | 3,0000 | 11,1961 | 3,2154 | 1,9318 | 1,0353 | 0,5359 | 1,8660 |
| 13 | 27 41 32 | 27,69 | 47859 | 9709$\bar{5}$ | 22170 | 020$\bar{5}$ | 13,1871 | 2040 | 2,089$\bar{5}$ | 0299 | 4930 | 2,0288 |
| 14 | 25 42 36 | 25,71 | 44497 | 97494 | 22957 | 0367 | 15,3361 | 1949 | 2473 | 0257 | 4565 | 1910 |
| 15 | 24 00 00 | 24,00 | 0,41583 | 0,9781$\bar{5}$ | 6,237$\bar{5}$0 | 3,0506 | 17,6422 | 3,1884 | 2,4048 | 1,0223 | 0,4251 | 2,3523 |
| 16 | 22 30 00 | 22,50 | 39018 | 98079 | 24288 | 0614 | 20,1090 | 182$\bar{5}$ | 5629 | 0196 | 3978 | 5137 |
| 17 | 21 10 35 | 21,18 | 36733 | 98299 | 24463 | 0692 | 22,7466 | 1763 | 7223 | 0173 | 3739 | 6760 |

| $n$ | Центральный угол $\alpha$ | | Сторона многоугольника $a$ | Радиус вписанной окружности $r$ | Периметр многоугольника $p$ | Площадь многоугольника $S$ | $\frac{S}{a^2}$ | $\frac{S}{r^2}$ | $\frac{R}{a}$ | $\frac{R}{r}$ | $\frac{a}{r}$ | $\frac{r}{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° | | | | | | | | | | |
| 18 | 20 00 00 | 20,00 | 0,34730 | 0,98481 | 6,25133 | 3,0782 | 25,5198 | 3,1739 | 2,8794 | 1,0154 | 0,3527 | 2,8356 |
| 19 | 18 57 00 | 18,95 | 32923 | 98636 | 25545 | 0850 | 28,4620 | 1709 | 3,0374 | 0138 | 3337 | 9960 |
| 20 | 18 00 00 | 18,00 | 31287 | 98769 | 25738 | 0902 | 31,5681 | 1677 | 1962 | 0125 | 3168 | 3,1569 |
| 21 | 17 09 00 | 17,15 | 0,29821 | 0,98882 | 6,26237 | 3,0962 | 34,8162 | 3,1666 | 3,3533 | 1,0113 | 0,3015 | 3,3159 |
| 22 | 16 21 36 | 16,36 | 28457 | 98983 | 26047 | 0985 | 38,2625 | 1626 | 5141 | 0103 | 2876 | 4783 |
| 23 | 15 39 00 | 15,65 | 27230 | 99069 | 26281 | 1020 | 41,8341 | 1606 | 6724 | 0094 | 2749 | 6382 |
| 24 | 15 00 00 | 15,00 | 0,26105 | 0,99144 | 6,26525 | 3,1058 | 45,5730 | 3,1597 | 3,8307 | 1,0086 | 0,2633 | 3,7979 |
| 25 | 14 24 00 | 14.40 | 25067 | 99211 | 26665 | 1086 | 49,4685 | 1583 | 9893 | 0080 | 2527 | 9578 |

**Пример.** Для многоугольника с числом сторон $n = 21$ имеем: $\alpha = 17°09'00'' = 17°,15$, $a = 0,29821$, $r = 0,9882$, $p = 6,26237$, $S = 3,0962$, $\frac{S}{a^2} = 34,8162$, $\frac{R}{a} = 3,3533$, $\frac{r}{a} = 3,3159$.

## Факториалы, обратные им величины и логарифмы

| $n$ | $n!$ | $1:n!$ | $\lg n!$ | $n$ | $n!$ | $1:n!$ | $\lg n!$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1,0000 | 0,0000 | 21 | $5109 \cdot 10^{16}$ | $1957 \cdot 10^{-23}$ | 19,7083 |
| 2 | 2 | 0,5000 | 0,3010 | 22 | $1124 \cdot 10^{18}$ | $8897 \cdot 10^{-25}$ | 21,0508 |
| 3 | 6 | 0,1667 | 0,7782 | 23 | $2585 \cdot 10^{19}$ | $3868 \cdot 10^{-26}$ | 22,4125 |
| 4 | 24 | $4167 \cdot 10^{-5}$ | 1,3802 | 24 | $6204 \cdot 10^{20}$ | $1612 \cdot 10^{-27}$ | 23,7927 |
| 5 | 120 | $8333 \cdot 10^{-6}$ | 2,0792 | 25 | $1551 \cdot 10^{22}$ | $6447 \cdot 10^{-29}$ | 25,1906 |
| 6 | 720 | $1389 \cdot 10^{-6}$ | 2,8573 | 26 | $4033 \cdot 10^{23}$ | $2480 \cdot 10^{-30}$ | 26,6056 |
| 7 | 5040 | $1984 \cdot 10^{-7}$ | 3,7024 | 27 | $1089 \cdot 10^{25}$ | $9184 \cdot 10^{-32}$ | 28,0370 |
| 8 | $4032 \cdot 10$ | $2480 \cdot 10^{-8}$ | 4,6055 | 28 | $3049 \cdot 10^{26}$ | $3280 \cdot 10^{-33}$ | 29,4841 |
| 9 | $3629 \cdot 10^{2}$ | $2756 \cdot 10^{-9}$ | 5,5598 | 29 | $8842 \cdot 10^{27}$ | $1131 \cdot 10^{-34}$ | 30,9466 |
| 10 | $3629 \cdot 10^{3}$ | $2756 \cdot 10^{-10}$ | 6,5598 | 30 | $2653 \cdot 10^{29}$ | $3770 \cdot 10^{-36}$ | 32,4237 |
| 11 | $3992 \cdot 10^{4}$ | $2505 \cdot 10^{-11}$ | 7,6012 | 31 | $8223 \cdot 10^{30}$ | $1216 \cdot 10^{-37}$ | 33,9150 |
| 12 | $4790 \cdot 10^{5}$ | $2088 \cdot 10^{-12}$ | 8,6803 | 32 | $2631 \cdot 10^{32}$ | $3800 \cdot 10^{-39}$ | 35,4201 |
| 13 | $6227 \cdot 10^{6}$ | $1606 \cdot 10^{-13}$ | 9,7943 | 33 | $8683 \cdot 10^{33}$ | $1152 \cdot 10^{-40}$ | 36,9387 |
| 14 | $8718 \cdot 10^{7}$ | $1147 \cdot 10^{-14}$ | 10,9404 | 34 | $2952 \cdot 10^{35}$ | $3387 \cdot 10^{-42}$ | 38,4701 |
| 15 | $1308 \cdot 10^{9}$ | $7647 \cdot 10^{-16}$ | 12,1165 | 35 | $1033 \cdot 10^{37}$ | $9678 \cdot 10^{-44}$ | 40,0141 |
| 16 | $2092 \cdot 10^{10}$ | $4779 \cdot 10^{-17}$ | 13,3206 | 36 | $3720 \cdot 10^{38}$ | $2688 \cdot 10^{-45}$ | 41,5705 |
| 17 | $3557 \cdot 10^{11}$ | $2811 \cdot 10^{-18}$ | 14,5511 | 37 | $1376 \cdot 10^{40}$ | $7265 \cdot 10^{-47}$ | 43,1386 |
| 18 | $6402 \cdot 10^{12}$ | $1562 \cdot 10^{-19}$ | 15,8063 | 38 | $5230 \cdot 10^{41}$ | $1912 \cdot 10^{-48}$ | 44,7185 |
| 19 | $1216 \cdot 10^{14}$ | $8221 \cdot 10^{-21}$ | 17,0851 | 39 | $2040 \cdot 10^{43}$ | $4902 \cdot 10^{-50}$ | 46,3096 |
| 20 | $2433 \cdot 10^{15}$ | $4110 \cdot 10^{-22}$ | 18,3861 | 40 | $8159 \cdot 10^{44}$ | $1226 \cdot 10^{-51}$ | 47,9116 |

**Пример.** Для $n = 18$ находим $n! = 6402 \cdot 10^{12}$, $1:n! = 1562 \cdot 10^{-19}$, $\lg n! = 15{,}8063$.

Таблица 14*

## Мантиссы десятичных логарифмов чисел

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | 0000 | 3010 | 4771 | 6021 | 6990 | 7782 | 8451 | 9031 | 9542 |
| 10 | 0000 | 043 | 086 | 128 | 170 | 212 | 253 | 294 | 334 | 374 |
| 11 | 414 | 453 | 492 | 531 | 569 | 607 | 64$\bar{5}$ | 682 | 719 | 755 |
| 12 | 792 | 828 | 864 | 899 | 934 | 969 | ·004 | ·038 | ·072 | ·106 |
| 13 | 1139 | 173 | 206 | 239 | 271 | 303 | 335 | 367 | 399 | 430 |
| 14 | 461 | 492 | 523 | 553 | 584 | 614 | 644 | 673 | 703 | 732 |
| 15 | 761 | 790 | 818 | 847 | 875 | 903 | 931 | 959 | 987 | 014 |
| 16 | 2041 | 068 | 095 | 122 | 148 | 17$\bar{5}$ | 201 | 227 | 253 | 279 |
| 17 | 304 | 330 | 355 | 380 | 405 | 430 | 455 | 480 | 504 | 529 |
| 18 | 553 | 577 | 601 | 62$\bar{5}$ | 648 | 672 | 695 | 718 | 742 | 765 |
| 19 | 2788 | 810 | 833 | 856 | 878 | 900 | 923 | 94$\bar{5}$ | 967 | 989 |
| 20 | 3010 | 032 | 054 | 07$\bar{5}$ | 096 | 118 | 139 | 160 | 181 | 201 |
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Пропорциональные части

| Δ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,4 | 10,5 | 12,6 | 14,7 | 16,8 | 18,9 |
| 22 | 2,2 | 4,4 | 6,6 | 8,8 | 11,0 | 13,2 | 15,4 | 17,6 | 19,8 |
| 23 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 |
| 24 | 2,4 | 4,8 | 7,2 | 9,6 | 12,0 | 14,4 | 16,8 | 19,2 | 21,6 |
| 25 | 2,5 | 5,0 | 7,5 | 10,0 | 12,5 | 15,0 | 17,5 | 20,0 | 22,5 |
| 26 | 2,6 | 5,2 | 7,8 | 10,4 | 13,0 | 15,6 | 18,2 | 20,8 | 23,4 |
| 27 | 2,7 | 5,4 | 8,1 | 10,8 | 13,5 | 16,2 | 18,9 | 21,6 | 24,3 |
| 28 | 2,8 | 5,6 | 8,4 | 11,2 | 14,0 | 16,8 | 19,6 | 22,4 | 25,2 |
| 29 | 2,9 | 5,8 | 8,7 | 11,6 | 14,5 | 17,4 | 20,3 | 23,2 | 26,1 |
| 30 | 3,0 | 6,0 | 9,0 | 12,0 | 15,0 | 18,0 | 21,0 | 24,0 | 27,0 |
| 31 | 3,1 | 6,2 | 9,3 | 12,4 | 15,5 | 18,6 | 21,7 | 24,8 | 27,9 |
| 32 | 3,2 | 6,4 | 9,6 | 12,8 | 16,0 | 19,2 | 22,4 | 25,6 | 28,8 |
| 33 | 3,3 | 6,6 | 9,9 | 13,2 | 16,5 | 19,8 | 23,1 | 26,4 | 29,7 |
| 34 | 3,4 | 6,8 | 10,2 | 13,6 | 17,0 | 20,4 | 23,8 | 27,2 | 30,6 |
| 35 | 3,5 | 7,0 | 10,5 | 14,0 | 17,5 | 21,0 | 24,5 | 28,0 | 31,5 |
| 36 | 3,6 | 7,2 | 10,8 | 14,4 | 18,0 | 21,6 | 25,2 | 28,8 | 32,4 |
| 37 | 3,7 | 7,4 | 11,1 | 14,8 | 18,5 | 22,2 | 25,9 | 29,6 | 33,3 |
| 38 | 3,8 | 7,6 | 11,4 | 15,2 | 19,0 | 22,8 | 26,6 | 30,4 | 34,2 |
| 39 | 3,9 | 7,8 | 11,7 | 15,6 | 19,5 | 23,4 | 27,3 | 31,2 | 35,1 |
| 40 | 4,0 | 8,0 | 12,0 | 16,0 | 20,0 | 24,0 | 28,0 | 32,0 | 36,0 |
| 41 | 4,1 | 8,2 | 12,3 | 16,4 | 20,5 | 24,6 | 28,7 | 32,8 | 36,9 |
| 42 | 4,2 | 8,4 | 12,6 | 16,8 | 21,0 | 25,2 | 29,4 | 33,6 | 37,8 |
| 43 | 4,3 | 8,6 | 12,9 | 17,2 | 21,5 | 25,8 | 30,1 | 34,4 | 38,7 |

* Способ пользования табл. 14 см. на с. 320.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 3222 | 243 | 263 | 284 | 304 | 324 | 345 | 365 | 385 | 404 |
| 22 | 424 | 444 | 464 | 483 | 502 | 522 | 541 | 560 | 579 | 598 |
| 23 | 617 | 636 | 655 | 674 | 692 | 711 | 729 | 747 | 766 | 784 |
| 24 | 3802 | 820 | 838 | 856 | 874 | 892 | 909 | 927 | 945 | 962 |
| 25 | 979 | 997 | ·014 | ·031 | ·048 | ·065 | ·082 | ·099 | ·116 | ·133 |
| 26 | 4150 | 166 | 183 | 200 | 216 | 232 | 249 | 265 | 281 | 298 |
| 27 | 4314 | 330 | 346 | 362 | 378 | 393 | 409 | 425 | 440 | 456 |
| 28 | 472 | 487 | 502 | 518 | 533 | 548 | 564 | 579 | 594 | 609 |
| 29 | 624 | 639 | 654 | 669 | 683 | 698 | 713 | 728 | 742 | 757 |
| 30 | 771 | 786 | 800 | 814 | 829 | 843 | 857 | 871 | 886 | 900 |
| 31 | 4914 | 928 | 942 | 955 | 969 | 983 | 997 | ·011 | ·024 | ·038 |
| 32 | 5051 | 065 | 079 | 092 | 105 | 119 | 132 | 145 | 159 | 172 |
| 33 | 5185 | 198 | 211 | 224 | 237 | 250 | 263 | 276 | 289 | 302 |
| 34 | 315 | 328 | 340 | 353 | 366 | 378 | 391 | 403 | 416 | 428 |
| 35 | 441 | 453 | 465 | 478 | 490 | 502 | 514 | 527 | 539 | 551 |
| 36 | 5563 | 575 | 587 | 599 | 611 | 623 | 635 | 647 | 658 | 670 |
| 37 | 682 | 694 | 705 | 717 | 729 | 740 | 752 | 763 | 775 | 786 |
| 38 | 798 | 809 | 821 | 832 | 843 | 855 | 866 | 877 | 888 | 899 |
| 39 | 911 | 922 | 933 | 944 | 955 | 966 | 977 | 988 | 999 | ·010 |
| 40 | 6021 | 031 | 042 | 053 | 064 | 075 | 085 | 096 | 107 | 117 |
| 41 | 128 | 138 | 149 | 160 | 170 | 180 | 191 | 201 | 212 | 222 |
| 42 | 6232 | 243 | 253 | 263 | 274 | 284 | 294 | 304 | 314 | 325 |
| 43 | 335 | 345 | 355 | 365 | 375 | 385 | 395 | 405 | 415 | 425 |
| 44 | 435 | 444 | 454 | 464 | 474 | 484 | 493 | 503 | 513 | 522 |
| 45 | 532 | 542 | 551 | 561 | 571 | 580 | 590 | 599 | 609 | 618 |

| $\Delta$ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 9 | 0,9 | 1,8 | 2,7 | 3,6 | 4,5 | 5,4 | 6,3 | 7,2 | 8,1 |
| 11 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 | 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 |
| 12 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,8 | 6,0 | 7,2 | 8,4 | 9,6 | 10,8 |
| 13 | 1,3 | 2,6 | 3,9 | 5,2 | 6,5 | 7,8 | 9,1 | 10,4 | 11,7 |
| 14 | 1,4 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 7,0 | 8,4 | 9,8 | 11,2 | 12,6 |
| 15 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 7,5 | 9,0 | 10,5 | 12,0 | 13,5 |
| 16 | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 8,0 | 9,6 | 11,2 | 12,8 | 14,4 |
| 17 | 1,7 | 3,4 | 5,1 | 6,8 | 8,5 | 10,2 | 11,9 | 13,6 | 15,3 |
| 18 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9,0 | 10,8 | 12,6 | 14,4 | 16,2 |
| 19 | 1,9 | 3,8 | 5,7 | 7,6 | 9,5 | 11,4 | 13,3 | 15,2 | 17,1 |
| 20 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 14,0 | 16,0 | 18,0 |
| 21 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,4 | 10,5 | 12,6 | 14,7 | 16,8 | 18,9 |

| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 6628 | 637 | 646 | 656 | 665 | 675 | 684 | 693 | 702 | 712 |
| 47 | 721 | 730 | 739 | 749 | 758 | 767 | 776 | 785 | 794 | 803 |
| 48 | 812 | 821 | 830 | 839 | 848 | 857 | 866 | 875 | 884 | 893 |
| 49 | 6902 | 911 | 920 | 928 | 937 | 946 | 955 | 964 | 972 | 981 |
| 50 | 990 | 998 | ·007 | ·016 | ·024 | ·033 | ·042 | ·050 | ·059 | ·067 |
| 51 | 7076 | 084 | 093 | 101 | 110 | 118 | 126 | 135 | 143 | 152 |
| 52 | 7160 | 168 | 177 | 185 | 193 | 202 | 210 | 218 | 226 | 235 |
| 53 | 243 | 251 | 259 | 267 | 275 | 284 | 292 | 300 | 308 | 316 |
| 54 | 324 | 332 | 340 | 348 | 356 | 364 | 372 | 380 | 388 | 396 |
| 55 | 7404 | 412 | 419 | 427 | 435 | 443 | 451 | 459 | 466 | 474 |
| 56 | 482 | 490 | 497 | 505 | 513 | 520 | 528 | 536 | 543 | 551 |
| 57 | 559 | 566 | 574 | 582 | 589 | 597 | 604 | 612 | 619 | 627 |
| 58 | 7634 | 642 | 649 | 657 | 664 | 672 | 679 | 686 | 694 | 701 |
| 59 | 709 | 716 | 723 | 731 | 738 | 745 | 752 | 760 | 767 | 774 |
| 60 | 782 | 789 | 796 | 803 | 810 | 818 | 825 | 832 | 839 | 846 |
| 61 | 7853 | 860 | 868 | 875 | 882 | 889 | 896 | 903 | 910 | 917 |
| 62 | 924 | 931 | 938 | 945 | 952 | 959 | 966 | 973 | 980 | 987 |
| 63 | 993 | ·000 | ·007 | ·014 | ·021 | ·028 | ·035 | ·041 | ·048 | ·055 |
| 64 | 8062 | 069 | 075 | 082 | 089 | 096 | 102 | 109 | 116 | 122 |
| 65 | 129 | 136 | 142 | 149 | 156 | 162 | 169 | 176 | 182 | 189 |
| 66 | 195 | 202 | 209 | 215 | 222 | 228 | 235 | 241 | 248 | 254 |
| 67 | 8261 | 267 | 274 | 280 | 287 | 293 | 299 | 306 | 312 | 319 |
| 68 | 325 | 331 | 338 | 344 | 351 | 357 | 363 | 370 | 376 | 382 |
| 69 | 388 | 395 | 401 | 407 | 414 | 420 | 426 | 432 | 439 | 445 |
| 70 | 8451 | 457 | 463 | 470 | 476 | 482 | 488 | 494 | 500 | 506 |
| 71 | 513 | 519 | 525 | 531 | 537 | 543 | 549 | 555 | 561 | 567 |
| 72 | 573 | 579 | 585 | 591 | 597 | 603 | 609 | 615 | 621 | 627 |
| 73 | 8633 | 639 | 645 | 651 | 657 | 663 | 669 | 675 | 681 | 686 |
| 74 | 692 | 698 | 704 | 710 | 716 | 722 | 727 | 733 | 739 | 745 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 6 | 0,6 | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3,0 | 3,6 | 4,2 | 4,8 | 5,4 |
| 7 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,8 | 3,5 | 4,2 | 4,9 | 5,6 | 6,3 |
| 8 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | 5,6 | 6,4 | 7,2 |
| 9 | 0,9 | 1,8 | 2,7 | 3,6 | 4,5 | 5,4 | 6,3 | 7,2 | 8,1 |
| 10 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 8751 | 756 | 762 | 768 | 774 | 779 | 785 | 791 | 797 | 802 |
| 76 | 808 | 814 | 820 | 825 | 831 | 837 | 842 | 848 | 854 | 859 |
| 77 | 865 | 871 | 876 | 882 | 887 | 893 | 899 | 904 | 910 | 915 |
| 78 | 8921 | 927 | 932 | 938 | 943 | 949 | 954 | 960 | 965 | 971 |
| 79 | 976 | 982 | 987 | 993 | 998 | ·004 | ·009 | ·015 | ·020 | ·025 |
| 80 | 9031 | 036 | 042 | 047 | 053 | 058 | 063 | 069 | 074 | 079 |
| 81 | 9085 | 090 | 096 | 101 | 106 | 112 | 117 | 122 | 128 | 133 |
| 82 | 138 | 143 | 149 | 154 | 159 | 165 | 170 | 175 | 180 | 186 |
| 83 | 191 | 196 | 201 | 206 | 212 | 217 | 222 | 227 | 232 | 238 |
| 84 | 9243 | 248 | 253 | 258 | 263 | 269 | 274 | 279 | 284 | 289 |
| 85 | 294 | 299 | 304 | 309 | 315 | 320 | 325 | 330 | 335 | 340 |
| 86 | 345 | 350 | 355 | 360 | 365 | 370 | 375 | 380 | 385 | 390 |
| 87 | 9395 | 400 | 405 | 410 | 415 | 420 | 425 | 430 | 435 | 440 |
| 88 | 445 | 450 | 455 | 460 | 465 | 469 | 474 | 479 | 484 | 489 |
| 89 | 494 | 499 | 504 | 509 | 513 | 518 | 523 | 528 | 533 | 538 |
| 90 | 9542 | 547 | 552 | 557 | 562 | 566 | 571 | 576 | 581 | 586 |
| 91 | 590 | 595 | 600 | 605 | 609 | 614 | 619 | 624 | 628 | 633 |
| 92 | 638 | 643 | 647 | 652 | 657 | 661 | 666 | 671 | 675 | 680 |
| 93 | 9685 | 689 | 694 | 699 | 703 | 708 | 713 | 717 | 722 | 727 |
| 94 | 731 | 736 | 741 | 745 | 750 | 754 | 759 | 763 | 768 | 773 |
| 95 | 777 | 782 | 786 | 791 | 795 | 800 | 805 | 809 | 814 | 818 |
| 96 | 9823 | 827 | 832 | 836 | 841 | 845 | 850 | 854 | 859 | 863 |
| 97 | 868 | 872 | 877 | 881 | 886 | 890 | 894 | 899 | 903 | 908 |
| 98 | 912 | 917 | 921 | 926 | 930 | 934 | 939 | 943 | 948 | 952 |
| 99 | 9956 | 961 | 965 | 969 | 974 | 978 | 983 | 987 | 991 | 996 |
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| $\Delta$ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 5 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 6 | 0,6 | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3,0 | 3,6 | 4,2 | 4,8 | 5,4 |

Таблица 15*

## Антилогарифмы чисел

| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ,00 | 1,000 | 002 | 005 | 007 | 009 | 012 | 014 | 016 | 019 | 021 |
| ,01 | 1,023 | 026 | 028 | 030 | 033 | 035 | 038 | 040 | 042 | 045 |
| 02 | 047 | 050 | 052 | 054 | 057 | 059 | 062 | 064 | 067 | 069 |
| 03 | 072 | 074 | 076 | 079 | 081 | 084 | 086 | 089 | 091 | 094 |
| ,04 | 1,096 | 099 | 102 | 104 | 107 | 109 | 112 | 114 | 117 | 119 |
| 05 | 122 | 125 | 127 | 130 | 132 | 135 | 138 | 140 | 143 | 146 |
| 06 | 148 | 151 | 153 | 156 | 159 | 161 | 164 | 167 | 169 | 172 |
| ,07 | 1,175 | 178 | 180 | 183 | 186 | 189 | 191 | 194 | 197 | 199 |
| 08 | 202 | 205 | 208 | 211 | 213 | 216 | 219 | 222 | 225 | 227 |
| 09 | 230 | 233 | 236 | 239 | 242 | 245 | 247 | 250 | 253 | 256 |
| ,10 | 1,259 | 262 | 265 | 268 | 271 | 274 | 276 | 279 | 282 | 285 |
| 11 | 288 | 291 | 294 | 297 | 300 | 303 | 306 | 309 | 312 | 315 |
| 12 | 318 | 321 | 324 | 327 | 330 | 334 | 337 | 340 | 343 | 346 |
| ,13 | 1,349 | 352 | 355 | 358 | 361 | 365 | 368 | 371 | 374 | 377 |
| 14 | 380 | 384 | 387 | 390 | 393 | 396 | 400 | 403 | 406 | 409 |
| 15 | 413 | 416 | 419 | 422 | 426 | 429 | 432 | 435 | 439 | 442 |
| ,16 | 1,445 | 449 | 452 | 455 | 459 | 462 | 466 | 469 | 472 | 476 |
| 17 | 479 | 483 | 486 | 489 | 493 | 496 | 500 | 503 | 507 | 510 |
| 18 | 514 | 517 | 521 | 524 | 528 | 531 | 535 | 538 | 542 | 545 |
| ,19 | 1,549 | 552 | 556 | 560 | 563 | 567 | 570 | 574 | 578 | 581 |
| 20 | 585 | 589 | 592 | 596 | 600 | 603 | 607 | 611 | 614 | 618 |
| 21 | 622 | 626 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 | 656 |
| ,22 | 1,660 | 663 | 667 | 671 | 675 | 679 | 683 | 687 | 690 | 694 |
| 23 | 698 | 702 | 706 | 710 | 714 | 718 | 722 | 726 | 730 | 734 |
| 24 | 738 | 742 | 746 | 750 | 754 | 758 | 762 | 766 | 770 | 774 |
| ,25 | 1,778 | 782 | 786 | 791 | 795 | 799 | 803 | 807 | 811 | 816 |
| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| 3 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 | 2,7 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 5 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |

* Способ пользования табл. 15 см. на с. 316.

| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ,25 | 1,778 | 782 | 786 | 791 | 795 | 799 | 803 | 807 | 811 | 816 |
| ,26 | 1,820 | 824 | 828 | 832 | 837 | 841 | 845 | 849 | 854 | 858 |
| 27 | 862 | 866 | 871 | 875 | 879 | 884 | 888 | 892 | 897 | 901 |
| 28 | 905 | 910 | 914 | 919 | 923 | 928 | 932 | 936 | 941 | 945 |
| ,29 | 1,950 | 954 | 959 | 963 | 968 | 972 | 977 | 982 | 986 | 991 |
| 30 | 995 | ·000 | ·004 | ·009 | ·014 | ·018 | ·023 | ·028 | ·032 | ·037 |
| 31 | 2,042 | 046 | 051 | 056 | 061 | 065 | 070 | 075 | 080 | 084 |
| ,32 | 2,089 | 094 | 099 | 104 | 109 | 113 | 118 | 123 | 128 | 133 |
| 33 | 138 | 143 | 148 | 153 | 158 | 163 | 168 | 173 | 178 | 183 |
| 34 | 188 | 193 | 198 | 203 | 208 | 213 | 218 | 223 | 228 | 234 |
| ,35 | 2,239 | 244 | 249 | 254 | 259 | 265 | 270 | 275 | 280 | 286 |
| 36 | 291 | 296 | 301 | 307 | 312 | 317 | 323 | 328 | 333 | 339 |
| 37 | 344 | 350 | 355 | 360 | 366 | 371 | 377 | 382 | 388 | 393 |
| ,38 | 2,399 | 404 | 410 | 415 | 421 | 427 | 432 | 438 | 443 | 449 |
| 39 | 455 | 460 | 466 | 472 | 477 | 483 | 489 | 495 | 500 | 506 |
| 40 | 512 | 518 | 523 | 529 | 535 | 541 | 547 | 553 | 559 | 564 |
| ,41 | 2,570 | 576 | 582 | 588 | 594 | 600 | 606 | 612 | 618 | 624 |
| 42 | 630 | 636 | 642 | 649 | 655 | 661 | 667 | 673 | 679 | 685 |
| 43 | 692 | 698 | 704 | 710 | 716 | 723 | 729 | 735 | 742 | 748 |
| ,44 | 2,754 | 761 | 767 | 773 | 780 | 786 | 793 | 799 | 805 | 812 |
| 45 | 818 | 825 | 831 | 838 | 844 | 851 | 858 | 864 | 871 | 877 |
| 46 | 884 | 891 | 897 | 904 | 911 | 917 | 924 | 931 | 938 | 944 |
| ,47 | 2,951 | 958 | 965 | 972 | 979 | 985 | 992 | 999 | ·006 | ·013 |
| 48 | 3,020 | 027 | 034 | 041 | 048 | 055 | 062 | 069 | 076 | 083 |
| 49 | 090 | 097 | 105 | 112 | 119 | 126 | 133 | 141 | 148 | 155 |
| ,50 | 3,162 | 170 | 177 | 184 | 192 | 199 | 206 | 214 | 221 | 228 |
| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 5 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 6 | 0,6 | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3,0 | 3,6 | 4,2 | 4,8 | 5,4 |
| 7 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,8 | 3,5 | 4,2 | 4,9 | 5,6 | 6,3 |
| 8 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | 5,6 | 6,4 | 7,2 |

| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ,50 | 3,162 | 170 | 177 | 184 | 192 | 199 | 206 | 214 | 221 | 228 |
| ,51 | 3,236 | 243 | 251 | 258 | 266 | 273 | 281 | 289 | 296 | 304 |
| 52 | 311 | 319 | 327 | 334 | 342 | 350 | 357 | 365 | 373 | 381 |
| 53 | 388 | 396 | 404 | 412 | 420 | 428 | 436 | 443 | 451 | 459 |
| ,54 | 3,467 | 475 | 483 | 491 | 499 | 508 | 516 | 524 | 532 | 540 |
| 55 | 548 | 556 | 565 | 573 | 581 | 589 | 597 | 606 | 614 | 622 |
| 56 | 631 | 639 | 648 | 656 | 664 | 673 | 681 | 690 | 698 | 707 |
| ,57 | 3,715 | 724 | 733 | 741 | 750 | 758 | 767 | 776 | 784 | 793 |
| 58 | 802 | 811 | 819 | 828 | 837 | 846 | 855 | 864 | 873 | 882 |
| 59 | 890 | 899 | 908 | 917 | 926 | 936 | 945 | 954 | 963 | 972 |
| ,60 | 3,981 | 990 | 999 | ·009 | ·018 | ·027 | ·036 | ·046 | ·055 | ·064 |
| 61 | 4,074 | 083 | 093 | 102 | 111 | 121 | 130 | 140 | 150 | 159 |
| 62 | 169 | 178 | 188 | 198 | 207 | 217 | 227 | 236 | 246 | 256 |
| ,63 | 4,266 | 276 | 285 | 295 | 305 | 315 | 325 | 335 | 345 | 355 |
| 64 | 365 | 375 | 385 | 395 | 406 | 416 | 426 | 436 | 446 | 457 |
| 65 | 467 | 477 | 487 | 498 | 508 | 519 | 529 | 539 | 550 | 560 |
| ,66 | 4,571 | 581 | 592 | 603 | 613 | 624 | 634 | 645 | 656 | 667 |
| 67 | 677 | 688 | 699 | 710 | 721 | 732 | 742 | 753 | 764 | 775 |
| 68 | 786 | 797 | 808 | 819 | 831 | 842 | 853 | 864 | 875 | 887 |
| ,69 | 4,898 | 909 | 920 | 932 | 943 | 955 | 966 | 977 | 989 | ·000 |
| 70 | 5,012 | 023 | 035 | 047 | 058 | 070 | 082 | 093 | 105 | 117 |
| 71 | 129 | 140 | 152 | 164 | 176 | 188 | 200 | 212 | 224 | 236 |
| ,72 | 5,248 | 260 | 272 | 284 | 297 | 309 | 321 | 333 | 346 | 358 |
| 73 | 370 | 383 | 395 | 408 | 420 | 433 | 445 | 458 | 470 | 483 |
| 74 | 495 | 508 | 521 | 534 | 546 | 559 | 572 | 585 | 598 | 610 |
| ,75 | 5,623 | 636 | 649 | 662 | 675 | 689 | 702 | 715 | 728 | 741 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 7 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,8 | 3,5 | 4,2 | 4,9 | 5,6 | 6,3 |
| 8 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | 5,6 | 6,4 | 7,2 |
| 9 | 0,9 | 1,8 | 2,7 | 3,6 | 4,5 | 5,4 | 6,3 | 7,2 | 8,1 |
| 10 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 11 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 | 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 |
| 12 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,8 | 6,0 | 7,2 | 8,4 | 9,6 | 10,8 |
| 13 | 1,3 | 2,6 | 3,9 | 5,2 | 6,5 | 7,8 | 9,1 | 10,4 | 11,7 |
| 14 | 1,4 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 7,0 | 8,4 | 9,8 | 11,2 | 12,6 |

| *n* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ,75 | 5,623 | 636 | 649 | 662 | 675 | 689 | 702 | 715 | 728 | 741 |
| 76 | 754 | 768 | 781 | 794 | 808 | 821 | 834 | 848 | 861 | 875 |
| 77 | 888 | 902 | 916 | 929 | 943 | 957 | 970 | 984 | 998 | ·012 |
| 78 | 6,026 | 039 | 053 | 067 | 081 | 095 | 109 | 124 | 138 | 152 |
| 79 | 166 | 180 | 194 | 209 | 223 | 237 | 252 | 266 | 281 | 295 |
| 80 | 310 | 324 | 339 | 353 | 368 | 383 | 397 | 412 | 427 | 442 |
| ,81 | 6,457 | 471 | 486 | 501 | 516 | 531 | 546 | 561 | 577 | 592 |
| 82 | 607 | 622 | 637 | 653 | 668 | 683 | 699 | 714 | 730 | 745 |
| 83 | 761 | 776 | 792 | 808 | 823 | 839 | 855 | 871 | 887 | 902 |
| ,84 | 6,918 | 934 | 950 | 966 | 982 | 998 | ·015 | ·031 | ·047 | ·063 |
| 85 | 7,079 | 096 | 112 | 129 | 145 | 161 | 178 | 194 | 211 | 228 |
| 86 | 244 | 261 | 278 | 295 | 311 | 328 | 345 | 362 | 379 | 396 |
| ,87 | 7,413 | 430 | 447 | 464 | 482 | 499 | 516 | 534 | 551 | 568 |
| 88 | 586 | 603 | 621 | 638 | 656 | 674 | 691 | 709 | 727 | 745 |
| 89 | 762 | 780 | 798 | 816 | 834 | 852 | 870 | 889 | 907 | 925 |
| ,90 | 7,943 | 962 | 980 | 998 | ·017 | ·035 | ·054 | ·072 | ·091 | ·110 |
| 91 | 8,128 | 147 | 166 | 185 | 204 | 222 | 241 | 260 | 279 | 299 |
| 92 | 318 | 337 | 356 | 375 | 395 | 414 | 433 | 453 | 472 | 492 |
| ,93 | 8,511 | 531 | 551 | 570 | 590 | 610 | 630 | 650 | 670 | 690 |
| 94 | 710 | 730 | 750 | 770 | 790 | 810 | 831 | 851 | 872 | 892 |
| 95 | 913 | 933 | 954 | 974 | 995 | ·016 | ·036 | ·057 | ·078 | ·099 |
| ,96 | 9,120 | 141 | 162 | 183 | 204 | 226 | 247 | 268 | 290 | 311 |
| 97 | 333 | 354 | 376 | 397 | 419 | 441 | 462 | 484 | 506 | 528 |
| 98 | 550 | 572 | 594 | 616 | 638 | 661 | 683 | 705 | 727 | 750 |
| ,99 | 9,772 | 795 | 817 | 840 | 863 | 886 | 908 | 931 | 954 | 977 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 13 | 1,3 | 2,6 | 3,9 | 5,2 | 6,5 | 7,8 | 9,1 | 10,4 | 11,7 |
| 14 | 1,4 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 7,0 | 8,4 | 9,8 | 11,2 | 12,6 |
| 15 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 7,5 | 9,0 | 10,5 | 12,0 | 13,5 |
| 16 | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 8,0 | 9,6 | 11,2 | 12,8 | 14,4 |
| 17 | 1,7 | 3,4 | 5,1 | 6,8 | 8,5 | 10,2 | 11,9 | 13,6 | 15,3 |
| 18 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9,0 | 10,8 | 12,6 | 14,4 | 16,2 |
| 19 | 1,9 | 3,8 | 5,7 | 7,6 | 9,5 | 11,4 | 13,3 | 15,2 | 17,1 |
| 20 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 14,0 | 16,0 | 18,0 |
| 21 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,4 | 10,5 | 12,6 | 14,7 | 16,8 | 18,9 |
| 22 | 2,2 | 4,4 | 6,6 | 8,8 | 11,0 | 13,2 | 15,4 | 17,6 | 19,8 |
| 23 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 |

## Десятичные логарифмы тригонометрических функций

sin

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 8,2419 | 8,5428 | 8,7188 | 8,8436 | 8,9403 | 60 |
| 1 | 6,4637 | 2490 | 5464 | 7212 | 8454 | 9417 | 59 |
| 2 | 7648 | 2561 | 5500 | 7236 | 8472 | 9432 | 58 |
| 3 | 6,9408 | 8,2630 | 8,5535 | 8,7260 | 8,8490 | 8,9446 | 57 |
| 4 | 7,0658 | 2699 | 5571 | 7283 | 8508 | 9460 | 56 |
| 5 | 1627 | 2766 | 5605 | 7307 | 8525 | 9475 | 55 |
| 6 | 7,2419 | 8,2832 | 8,5640 | 8,7330 | 8,8543 | 8,9489 | 54 |
| 7 | 3088 | 2898 | 5674 | 7354 | 8560 | 9503 | 53 |
| 8 | 3668 | 2962 | 5708 | 7377 | 8578 | 9517 | 52 |
| 9 | 7,4180 | 8,3025 | 8,5742 | 8,7400 | 8,8595 | 8,9531 | 51 |
| 10 | 4637 | 3088 | 5776 | 7423 | 8613 | 9545 | 50 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5809 | 7445 | 8630 | 9559 | 9 |
| 12 | 7,5429 | 8,3210 | 8,5842 | 8,7468 | 8,8647 | 8,9587 | 48 |
| 13 | 5777 | 3270 | 5875 | 7491 | 8665 | 9587 | 47 |
| 14 | 6099 | 3329 | 5907 | 7513 | 8682 | 9601 | 46 |
| 15 | 7,6398 | 8,3388 | 8,5939 | 8,7535 | 8,8699 | 8,9614 | 45 |
| 16 | 6678 | 3445 | 5972 | 7557 | 8716 | 9628 | 44 |
| 17 | 6942 | 3502 | 6003 | 7580 | 8733 | 9642 | 43 |
| 18 | 7,7190 | 8,3558 | 8,6035 | 8,7602 | 8,8749 | 8,9655 | 42 |
| 19 | 7425 | 3613 | 6066 | 7623 | 8766 | 9669 | 41 |
| 20 | 7648 | 3668 | 6097 | 7645 | 8783 | 9682 | 40 |
| 21 | 7,7859 | 8,3722 | 8,6128 | 8,7667 | 8,8799 | 8,9696 | 39 |
| 22 | 8061 | 3775 | 6159 | 7688 | 8816 | 9709 | 38 |
| 23 | 8255 | 3828 | 6189 | 7710 | 8833 | 9723 | 37 |
| 24 | 7,8439 | 8,3880 | 8,6220 | 8,7731 | 8,8849 | 8,9736 | 36 |
| 25 | 8617 | 3931 | 6250 | 7752 | 8865 | 9750 | 35 |
| 26 | 8787 | 3982 | 6279 | 7773 | 8882 | 9763 | 34 |
| 27 | 7,8951 | 8,4032 | 8,6309 | 8,7794 | 8,8898 | 8,9776 | 33 |
| 28 | 9109 | 4082 | 6339 | 7815 | 8914 | 9789 | 32 |
| 29 | 9261 | 4131 | 6368 | 7836 | 8930 | 9803 | 31 |
| 30 | 7,9408 | 8,4179 | 8,6397 | 8,7857 | 8,8946 | 8,9816 | 30 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | ′ |

cos

* Способ пользования табл. 16 см. на с. 321.

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 9551 | 4227 | 6426 | 7877 | 8962 | 9829 | 29 |
| 32 | 9689 | 4275 | 6454 | 7898 | 8978 | 9842 | 28 |
| 33 | 7,9822 | 8,4322 | 8,6483 | 8,7918 | 8,8994 | 8,9855 | 27 |
| 34 | 9952 | 4368 | 6511 | 7939 | 9010 | 9868 | 26 |
| 35 | 8,0078 | 4414 | 6539 | 7959 | 9026 | 9881 | 25 |
| 36 | 8,0200 | 8,4459 | 8,6567 | 8,7979 | 8,9042 | 8,9894 | 24 |
| 37 | 0319 | 4504 | 6595 | 7999 | 9057 | 9907 | 23 |
| 38 | 0435 | 4549 | 6622 | 8019 | 9073 | 9919 | 22 |
| 39 | 8,0548 | 8,4593 | 8,6650 | 8,8039 | 8,9089 | 8,9932 | 21 |
| 40 | 0658 | 4637 | 6677 | 8059 | 9104 | 9945 | 20 |
| 41 | 0765 | 4680 | 6704 | 8078 | 9119 | 9958 | 19 |
| 42 | 8,0870 | 8,4723 | 8,6731 | 8,8098 | 8,9135 | 8,9970 | 18 |
| 43 | 0972 | 4765 | 6758 | 8117 | 9150 | 9983 | 17 |
| 44 | 1072 | 4807 | 6784 | 8137 | 9166 | 9996 | 16 |
| 45 | 8,1169 | 8,4848 | 8,6810 | 8,8156 | 8,9181 | 9,0008 | 15 |
| 46 | 1265 | 4890 | 6837 | 8175 | 9196 | 0021 | 14 |
| 47 | 1358 | 4930 | 6863 | 8194 | 9211 | 0033 | 13 |
| 48 | 8,1450 | 8,4971 | 8,6889 | 8,8213 | 8,9226 | 9,0046 | 12 |
| 49 | 1539 | 5011 | 6914 | 8232 | 9241 | 0058 | 11 |
| 50 | 1627 | 5050 | 6940 | 8251 | 9256 | 0070 | 10 |
| 51 | 8,1713 | 8,5090 | 8,6965 | 8,8270 | 8,9271 | 9,0083 | 9 |
| 52 | 1797 | 5129 | 6991 | 8289 | 9286 | 0095 | 8 |
| 53 | 1880 | 5167 | 7016 | 8307 | 9301 | 0107 | 7 |
| 54 | 8,1961 | 8,5206 | 8,7041 | 8,8326 | 8,9315 | 9,0120 | 6 |
| 55 | 2041 | 5243 | 7066 | 8345 | 9330 | 0132 | 5 |
| 56 | 2119 | 5281 | 7090 | 8363 | 9345 | 0144 | 4 |
| 57 | 8,2196 | 8,5318 | 8,7115 | 8,8381 | 8,9359 | 9,0156 | 3 |
| 58 | 2271 | 5355 | 7140 | 8400 | 9374 | 0168 | 2 |
| 59 | 2346 | 5392 | 7164 | 8418 | 9388 | 0180 | 1 |
| 60 | 8,2419 | 8,5428 | 8,7188 | 8,8436 | 8,9403 | 9,0192 | 0 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | ′ |

cos

tg

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 8,2419 | 8,5431 | 8,7194 | 8,8446 | 8,9420 | 60 |
| 1 | 6,4637 | 2491 | 5467 | 7218 | 8465 | 9434 | 59 |
| 2 | 7648 | 2562 | 5503 | 7242 | 8483 | 9449 | 58 |
| 3 | 6,9408 | 8,2631 | 8,5538 | 8,7266 | 8,8501 | 8,9463 | 57 |
| 4 | 7,0658 | 2700 | 5573 | 7290 | 8518 | 9477 | 56 |
| 5 | 1627 | 2767 | 5608 | 7313 | 8536 | 9492 | 55 |
| 6 | 7,2419 | 8,2833 | 8,5643 | 8,7337 | 8,8554 | 8,9506 | 54 |
| 7 | 3088 | 2899 | 5677 | 7360 | 8572 | 9520 | 53 |
| 8 | 3668 | 2963 | 5711 | 7383 | 8589 | 9534 | 52 |
| 9 | 7,4180 | 8,3026 | 8,5745 | 8,7406 | 8,8607 | 8,9549 | 51 |
| 10 | 4637 | 3089 | 5779 | 7429 | 8624 | 9563 | 50 |
| 11 | 5051 | 3150 | 5812 | 7452 | 8642 | 9577 | 49 |
| 12 | 7,5429 | 8,3211 | 8,5845 | 8,7475 | 8,8659 | 8,9591 | 48 |
| 13 | 5777 | 3271 | 5878 | 7497 | 8676 | 9605 | 47 |
| 14 | 6099 | 3330 | 5911 | 7520 | 8694 | 9619 | 46 |
| 15 | 7,6398 | 8,3389 | 8,5943 | 8,7542 | 8,8711 | 8,9633 | 45 |
| 16 | 6678 | 3446 | 5975 | 7565 | 8728 | 9646 | 44 |
| 17 | 6942 | 3503 | 6007 | 7587 | 8745 | 9660 | 43 |
| 18 | 7,7190 | 8,3559 | 8,6038 | 8,7609 | 8,8762 | 8,9674 | 42 |
| 19 | 7425 | 3614 | 6070 | 7631 | 8778 | 9688 | 41 |
| 20 | 7648 | 3669 | 6101 | 7652 | 8795 | 9701 | 40 |
| 21 | 7,7860 | 8,3723 | 8,6132 | 8,7674 | 8,8812 | 8,9715 | 39 |
| 22 | 8062 | 3776 | 6163 | 7696 | 8829 | 9729 | 38 |
| 23 | 8255 | 3829 | 6193 | 7717 | 8845 | 9742 | 37 |
| 24 | 7,8439 | 8,3881 | 8,6223 | 8,7739 | 8,8862 | 8,9756 | 36 |
| 25 | 8617 | 3932 | 6254 | 7760 | 8878 | 9769 | 35 |
| 26 | 8787 | 3983 | 6283 | 7781 | 8895 | 9782 | 34 |
| 27 | 7,8951 | 8,4033 | 8,6313 | 8,7802 | 8,8911 | 8,9796 | 33 |
| 28 | 9109 | 4083 | 6343 | 7823 | 8927 | 9809 | 32 |
| 29 | 9261 | 4132 | 6372 | 7844 | 8944 | 9823 | 31 |
| 30 | 7,9409 | 8,4181 | 8,6401 | 8,7865 | 8,8960 | 8,9836 | 30 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | ′ |

ctg

tg

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 7,9551 | 8,4229 | 8,6430 | 8,7886 | 8,8976 | 8,9849 | 29 |
| 32 | 9689 | 4276 | 6459 | 7906 | 8992 | 9862 | 28 |
| 33 | 7,9823 | 8,4323 | 8,6487 | 8,7927 | 8,9008 | 8,9875 | 27 |
| 34 | 9952 | 4370 | 6515 | 7947 | 9024 | 9888 | 26 |
| 35 | 8,0078 | 4416 | 6544 | 7967 | 9040 | 9901 | 25 |
| 36 | 8,0200 | 8,4461 | 8,6571 | 8,7988 | 8,9056 | 8,9915 | 24 |
| 37 | 0319 | 4506 | 6599 | 8008 | 9071 | 9928 | 23 |
| 38 | 0435 | 4551 | 6627 | 8028 | 9087 | 9940 | 22 |
| 39 | 8,0548 | 8,4595 | 8,6654 | 8,8048 | 8,9103 | 8,9953 | 21 |
| 40 | 0658 | 4638 | 6682 | 8067 | 9118 | 9966 | 20 |
| 41 | 0765 | 4682 | 6709 | 8087 | 9134 | 9979 | 19 |
| 42 | 8,0870 | 8,4725 | 8,6736 | 8,8107 | 8,9150 | 8,9992 | 18 |
| 43 | 0972 | 4767 | 6762 | 8126 | 9165 | 9,0005 | 17 |
| 44 | 1072 | 4809 | 6789 | 8146 | 9180 | 0017 | 16 |
| 45 | 8,1170 | 8,4851 | 8,6815 | 8,8165 | 8, 9196 | 9,0030 | 15 |
| 46 | 1265 | 4892 | 6842 | 8185 | 9211 | 0043 | 14 |
| 47 | 1359 | 4933 | 6868 | 8204 | 9226 | 0055 | 13 |
| 48 | 8,1450 | 8,4973 | 8,6894 | 8,8223 | 8,9241 | 9,0068 | 12 |
| 49 | 1540 | 5013 | 6920 | 8242 | 9256 | 0080 | 11 |
| 50 | 1627 | 5053 | 6945 | 8261 | 9272 | 0093 | 10 |
| 51 | 8,1713 | 8,5092 | 8,6971 | 8,8280 | 8,9287 | 9,0105 | 9 |
| 52 | 1798 | 5131 | 6996 | 8299 | 9302 | 0118 | 8 |
| 53 | 1880 | 5170 | 7021 | 8317 | 9316 | 0130 | 7 |
| 54 | 8,1962 | 8,5208 | 8,7046 | 8,8336 | 8,9331 | 9,0143 | 6 |
| 55 | 2041 | 5246 | 7071 | 8355 | 9346 | 0155 | 5 |
| 56 | 2120 | 5283 | 7096 | 8373 | 9361 | 0167 | 4 |
| 57 | 8,2196 | 8,5321 | 8,7121 | 8,8392 | 8,9376 | 9,0180 | 3 |
| 58 | 2272 | 5358 | 7145 | 8410 | 9390 | 0192 | 2 |
| 59 | 2346 | 5394 | 7170 | 8428 | 9405 | 0204 | 1 |
| 60 | 8,2419 | 8,5431 | 8,7194 | 8,8446 | 8,9420 | 9,0216 | 0 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | ′ |

ctg

| α | sin | $d$ | tg | $d \cdot c$ | ctg | cos | $d$ | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°00′ | $-\infty$ | | $-\infty$ | | $+\infty$ | 10,0000 | 0 | 90°00′ |
| 10 | 7,4637 | 3011 | 7,4637 | 3011 | 2,5363 | 0000 | 0 | 50 |
| 20 | 7648 | 1760 | 7648 | 1761 | 2352 | 0000 | 0 | 40 |
| 0°30′ | 7,9408 | 1250 | 7,9409 | 1249 | 2,0591 | 10,0000 | 0 | 89°30′ |
| 40 | 8,0658 | 969 | 8,0658 | 969 | 1,9342 | 0000 | 0 | 20 |
| 50 | 1627 | 792 | 1627 | 792 | 8373 | 0000 | 0 | 10 |
| 1°00′ | 8,2419 | 669 | 8,2419 | 670 | 1,7581 | 9,9999 | 0 | 89°00′ |
| 10 | 3088 | 580 | 3089 | 580 | 6911 | 9999 | 0 | 50 |
| 20 | 3668 | 511 | 3669 | 512 | 6331 | 9999 | 0 | 40 |
| 1°30′ | 8,4179 | 458 | 8,4181 | 457 | 1,5819 | 9,9999 | 1 | 88°30′ |
| 40 | 4637 | 413 | 4638 | 415 | 5362 | 9998 | 0 | 20 |
| 50 | 5050 | 378 | 5053 | 378 | 4947 | 9998 | 1 | 10 |
| 2°00′ | 8,5428 | 348 | 8,5431 | 348 | 1,4569 | 9,9997 | 0 | 88°00′ |
| 10 | 5776 | 321 | 5779 | 322 | 4221 | 9997 | 1 | 50 |
| 20 | 6097 | 300 | 6101 | 300 | 3899 | 9996 | 0 | 40 |
| 2°30′ | 8,6397 | 280 | 8,6401 | 281 | 1,3599 | 9,9996 | 1 | 87°30′ |
| 40 | 6677 | 263 | 6682 | 263 | 3318 | 9995 | 0 | 20 |
| 50 | 6940 | 248 | 6945 | 249 | 3055 | 9995 | 1 | 10 |
| 3°00′ | 8,7188 | 235 | 8,7194 | 235 | 1,2806 | 9,9994 | 1 | 87°00′ |
| 10 | 7423 | 222 | 7429 | 223 | 2571 | 9993 | 0 | 50 |
| 20 | 7645 | 212 | 2652 | 213 | 2348 | 9993 | 1 | 40 |
| 3°30′ | 8,7857 | 202 | 8,7865 | 202 | 1,2135 | 9,9992 | 1 | 86°30′ |
| 40 | 8059 | 192 | 8067 | 194 | 1933 | 9991 | 1 | 20 |
| 50 | 8251 | 185 | 8261 | 185 | 1739 | 9990 | 1 | 10 |
| 4°00′ | 8,8436 | 177 | 8,8446 | 178 | 1,1554 | 9,9989 | 0 | 86°00′ |
| 10 | *u* 8613 | 170 | 8624 | 171 | 1376 | 9989 | 1 | 50 |
| 20 | 8783 | 163 | 8795 | 165 | 1205 | 9988 | 1 | 40 |
| 4°30′ | 8,8946 | 158 | 8,8960 | 158 | 1,1040 | 9,9987 | 1 | 85°30′ |
| 40 | 9104 | 152 | 9118 | 154 | 0882 | 9986 | 1 | 20 |
| 50 | 9256 | 147 | 9272 | 148 | 0728 | 9985 | 2 | 10 |
| 5°00′ | 8,9403 | 142 | 8,9420 | 143 | 1,0580 | 9,9983 | 1 | 85°00′ |
| 10 | 9545 | 137 | 9563 | 138 | 0437 | 9982 | 1 | 50 |
| 20 | 9682 | 134 | 9701 | 135 | 0299 | 9981 | 1 | 40 |
| 5°30′ | 8,9816 | 129 | 8,9836 | 130 | 1,0164 | 9,9980 | 1 | 84°30′ |
| 40 | 9945 | 125 | 9966 | 127 | 0034 | 9979 | 2 | 20 |
| 50 | 9,0070 | 122 | 9,0093 | 123 | 0,9907 | 9977 | 1 | 10 |
| 6°00′ | 9,0192 | | 9,0216 | | 0,9784 | 9,9976 | | 84°00′ |
| α | cos | $d$ | ctg | $d \cdot c$ | tg | sin | $d$ | α |

*Продолжение табл. 16*

| α | sin | d | tg | d·c | ctg | cos | d | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6°00′ | 9,0192 | | 9,0216 | | 0,9784 | 9,9976 | | 84°00′ |
| 10 | 0311 | 119 | 0336 | 120 | 9664 | 9975 | 1 | 50 |
| 10 | 0426 | 115 | 0453 | 117 | 9547 | 9973 | 2 | 40 |
| | | 113 | | 114 | | | 1 | |
| 6°30′ | 9,0539 | | 9,0567 | | 0,9433 | 9972 | | 83°30′ |
| 40 | 0648 | 109 | 0678 | 111 | 9322 | 9971 | 1 | 20 |
| 50 | 0755 | 107 | 0786 | 108 | 9214 | 9969 | 2 | 10 |
| | | 104 | | 105 | | | 1 | |
| 7°00′ | 9,0859 | | 9,0891 | | 0,9109 | 9,9968 | | 83°00′ |
| 10 | 0961 | 102 | 0995 | 104 | 9005 | 9966 | 2 | 50 |
| 20 | 1060 | 99 | 1096 | 101 | 8904 | 9964 | 2 | 40 |
| | | 97 | | 98 | | | 1 | |
| 7°30′ | 9,1157 | | 9,1194 | | 0,8806 | 9,9963 | | 82°30′ |
| 40 | 1252 | 95 | 1291 | 97 | 8709 | 9961 | 2 | 20 |
| 50 | 1345 | 93 | 1385 | 94 | 8615 | 9959 | 2 | 10 |
| | | 91 | | 93 | | | 1 | |
| 8°00′ | 9,1436 | | 9,1478 | | 0,8522 | 9,9958 | | 82°00′ |
| α | cos | d | ctg | d. c | tg | sin | d | α |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| 2 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| 84 | 8,4 | 16,8 | 25,2 | 33,6 | 42,0 | 50,4 | 58,8 | 67,2 | 75,6 |
| 85 | 8,5 | 17,0 | 25,5 | 34,0 | 42,5 | 51,0 | 59,5 | 68,0 | 76,5 |
| 86 | 8,6 | 17,2 | 25,8 | 34,4 | 43,0 | 51,6 | 60,2 | 68,8 | 77,4 |
| 87 | 8,7 | 17,4 | 26,1 | 34,8 | 43,5 | 52,2 | 60,9 | 69,6 | 78,3 |
| 89 | 8,9 | 17,8 | 26,7 | 35,6 | 44,5 | 53,4 | 62,3 | 71,2 | 80,1 |
| 91 | 9,1 | 18,2 | 27,3 | 36,4 | 45,5 | 54,6 | 63,7 | 72,8 | 81,9 |
| 93 | 9,3 | 18,6 | 27,9 | 37,2 | 46,5 | 55,8 | 65,1 | 74,4 | 83,7 |
| 94 | 9,4 | 18,8 | 28,2 | 37,6 | 47,0 | 56,4 | 65,8 | 75,2 | 84,6 |
| 95 | 9,5 | 19,0 | 28,5 | 38,0 | 47,5 | 57,0 | 66,5 | 76,0 | 85,5 |
| 97 | 9,7 | 19,4 | 29,1 | 38,8 | 48,5 | 58,2 | 67,9 | 77,6 | 87,3 |
| 98 | 9,8 | 19,6 | 29,4 | 39,2 | 49,0 | 58,8 | 68,6 | 78,4 | 88,2 |
| 99 | 9,9 | 19,8 | 29,7 | 39,6 | 49,5 | 59,4 | 69,3 | 79,2 | 89,1 |
| 101 | 10,1 | 20,2 | 30,3 | 40,4 | 50,5 | 60,6 | 70,7 | 80,8 | 90,9 |
| 102 | 10,2 | 20,4 | 30,6 | 40,8 | 51,0 | 61,2 | 71,4 | 81,6 | 91,8 |
| 104 | 10,4 | 20,8 | 31,2 | 41,6 | 52,0 | 62,4 | 72,8 | 83,2 | 93,6 |
| 105 | 10,5 | 21,0 | 31,5 | 42,0 | 52,5 | 63,0 | 73,5 | 84,0 | 94,5 |
| 107 | 10,7 | 21,4 | 32,1 | 42,8 | 53,5 | 64,2 | 74,9 | 85,6 | 96,3 |
| 108 | 10,8 | 21,6 | 32,4 | 43,2 | 54,0 | 64,8 | 75,6 | 86,4 | 97,2 |
| 109 | 10,9 | 21,8 | 32,7 | 43,6 | 54,5 | 65,4 | 76,3 | 87,2 | 98,1 |
| 111 | 11,1 | 22,2 | 33,3 | 44,4 | 55,5 | 66,6 | 77,7 | 88,8 | 99,9 |
| 113 | 11,3 | 22,6 | 33,9 | 45,2 | 56,5 | 67,8 | 79,1 | 90,4 | 101,7 |
| 114 | 11,4 | 22,8 | 34,2 | 45,6 | 57,0 | 68,4 | 79,8 | 91,2 | 102,6 |
| 115 | 11,5 | 23,0 | 34,5 | 46,0 | 57,5 | 69,0 | 80,5 | 92,0 | 103,5 |
| 117 | 11,7 | 23,4 | 35,1 | 46,8 | 58,5 | 70,2 | 81,9 | 93,6 | 105,3 |
| 119 | 11,9 | 23,8 | 35,7 | 47,6 | 59,5 | 71,4 | 83,3 | 95,2 | 107,1 |
| 120 | 12,0 | 24,0 | 36,0 | 48,0 | 60,0 | 72,0 | 84,0 | 96,0 | 108,0 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8°00′ | 9,1436 | | 9,1478 | | 0,8522 | 9,9958 | | 82°00′ |
| 10 | 1525 | 89 | 1569 | 91 | 8431 | 9956 | 2 | 50 |
| 20 | 1612 | 87 | 1658 | 89 | 8342 | 9954 | 2 | 40 |
| | | 85 | | 87 | | | 2 | |
| 8°30′ | 9,1697 | | 9,1745 | | 0,8255 | 9,9952 | | 81°30′ |
| 40 | 1781 | 84 | 1831 | 86 | 8169 | 9950 | 2 | 20 |
| 50 | 1863 | 82 | 1915 | 84 | 8085 | 9948 | 2 | 10 |
| | | 80 | | 82 | | | 2 | |
| 9°00′ | 9,1943 | | 9,1997 | | 0,8003 | 9,9946 | | 81°00′ |
| 10 | 2022 | 79 | 2078 | 81 | 7922 | 9944 | 2 | 50 |
| 20 | 2100 | 78 | 2158 | 80 | 7842 | 9942 | 2 | 40 |
| | | 76 | | 78 | | | 2 | |
| 9°30′ | 9,2176 | | 9,2236 | | 0,7764 | 9,9940 | | 80°30′ |
| 40 | 2251 | 75 | 2313 | 77 | 7687 | 9938 | 2 | 20 |
| 50 | 2324 | 73 | 2389 | 76 | 7611 | 9936 | 2 | 10 |
| | | 73 | | 74 | | | 2 | |
| 10°00′ | 9,2397 | | 9,2463 | | 0,7537 | 9,9934 | | 80°00′ |
| 10 | 2468 | 71 | 2536 | 73 | 7464 | 9931 | 3 | 50 |
| 20 | 2538 | 70 | 2609 | 73 | 7391 | 9929 | 2 | 40 |
| | | 68 | | 71 | | | 2 | |
| 10°30′ | 9,2606 | | 9,2680 | | 0,7320 | 9,9927 | | 79°30′ |
| 40 | 2674 | 68 | 2750 | 70 | 7250 | 9924 | 3 | 20 |
| 50 | 2740 | 66 | 2819 | 69 | 7181 | 9922 | 2 | 10 |
| | | 66 | | 68 | | | 3 | |
| 11°00′ | 9,2806 | | 9,2887 | | 0,7113 | 9,9919 | | 79°00′ |
| 10 | 2870 | 64 | 2953 | 66 | 7047 | 9917 | 2 | 50 |
| 20 | 2934 | 64 | 3020 | 67 | 6980 | 9914 | 3 | 40 |
| | | 63 | | 65 | | | 2 | |
| 11°30′ | 9,2997 | | 9,3085 | | 0,6915 | 9,9912 | | 78°30′ |
| 40 | 3058 | 61 | 3149 | 64 | 6851 | 9909 | 3 | 20 |
| 50 | 3119 | 61 | 3212 | 63 | 6788 | 9907 | 2 | 10 |
| | | | | 63 | | | 3 | |
| 12°00′ | 9,3179 | 60 | 9,3275 | | 0,6725 | 9,9904 | | 78°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 61 | 6,1 | 12,2 | 18,3 | 24,4 | 30,5 | 36,6 | 42,7 | 48,8 | 54,9 |
| 63 | 6,3 | 12,6 | 18,9 | 25,2 | 31,5 | 37,8 | 44,1 | 50,4 | 56,7 |
| 64 | 6,4 | 12,8 | 19,2 | 25,6 | 32,0 | 38,4 | 44,8 | 51,2 | 57,6 |
| 65 | 6,5 | 13,0 | 19,5 | 26,0 | 32,5 | 39,0 | 45,5 | 52,0 | 58,5 |
| 66 | 6,6 | 13,2 | 19,8 | 26,4 | 33,0 | 39,6 | 46,2 | 52,8 | 59,4 |
| 67 | 6,7 | 13,4 | 20,1 | 26,8 | 33,5 | 40,2 | 46,9 | 53,6 | 60,3 |
| 68 | 6,8 | 13,6 | 20,4 | 27,2 | 34,0 | 40,8 | 47,6 | 54,4 | 61,2 |
| 69 | 6,9 | 13,8 | 20,7 | 27,6 | 34,5 | 41,4 | 48,3 | 55,2 | 62,1 |
| 71 | 7,1 | 14,2 | 21,3 | 28,4 | 35,5 | 42,6 | 49,7 | 56,8 | 63,9 |
| 73 | 7,3 | 14,6 | 21,9 | 29,2 | 36,5 | 43,8 | 51,1 | 58,4 | 65,7 |
| 74 | 7,4 | 14,8 | 22,2 | 29,6 | 37,0 | 44,4 | 51,8 | 59,2 | 66,6 |
| 75 | 7,5 | 15,0 | 22,5 | 30,0 | 37,5 | 45,0 | 52,5 | 60,0 | 67,5 |
| 76 | 7,6 | 15,2 | 22,8 | 30,4 | 38,0 | 45,6 | 53,2 | 60,8 | 68,4 |
| 77 | 7,7 | 15,4 | 23,1 | 30,8 | 38,5 | 46,2 | 53,9 | 61,6 | 69,3 |
| 78 | 7,8 | 15,6 | 23,4 | 31,2 | 39,0 | 46,8 | 54,6 | 62,4 | 70,2 |
| 79 | 7,9 | 15,8 | 23,7 | 31,6 | 39,5 | 47,4 | 55,3 | 63,2 | 71,1 |
| 81 | 8,1 | 16,2 | 24,3 | 32,4 | 40,5 | 48,6 | 56,7 | 64,8 | 72,9 |
| 82 | 8,2 | 16,4 | 24,6 | 32,8 | 41,0 | 49,2 | 57,4 | 65,6 | 73,8 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12°00′ | 9,3179 | | 9,3275 | | 0,6725 | 9,9904 | | 78°00′ |
| | | 59 | | 61 | | | 3 | |
| 10 | 3238 | | 3336 | | 6664 | 9901 | | 50 |
| | | 58 | | 61 | | | 2 | |
| 20 | 3296 | | 3397 | | 6603 | 9899 | | 40 |
| | | 57 | | 61 | | | 3 | |
| 12°30′ | 9,3353 | | 9,3458 | | 0,6542 | 9,9896 | | 77°30′ |
| | | 57 | | 59 | | | 3 | |
| 40 | 3410 | | 3517 | | 6483 | 9893 | | 20 |
| | | 56 | | 59 | | | 3 | |
| 50 | 3466 | | 3576 | | 6424 | 9890 | | 10 |
| | | 55 | | 58 | | | 3 | |
| 13°00′ | 9,3521 | | 9,3634 | | 0,6366 | 9,9887 | | 77°00′ |
| | | 54 | | 57 | | | 3 | |
| 10 | 3575 | | 3691 | | 6309 | 9884 | | 50 |
| | | 54 | | 57 | | | 3 | |
| 20 | 3629 | | 3748 | | 6252 | 9881 | | 40 |
| | | 53 | | 56 | | | 3 | |
| 13°30′ | 9,3682 | | 9,3804 | | 0,6196 | 9,9878 | | 76°30′ |
| | | 52 | | 55 | | | 3 | |
| 40 | 3734 | | 3859 | | 6141 | 9875 | | 20 |
| | | 52 | | 55 | | | 3 | |
| 50 | 3786 | | 3914 | | 6086 | 9872 | | 10 |
| | | 51 | | 54 | | | 3 | |
| 14°00′ | 9,3837 | | 9,3968 | | 0,6032 | 9,9869 | | 76°00′ |
| | | 50 | | 53 | | | 3 | |
| 10 | 3887 | | 4021 | | 5979 | 9866 | | 50 |
| | | 50 | | 53 | | | 3 | |
| 20 | 3937 | | 4074 | | 5926 | 9863 | | 40 |
| | | 49 | | 53 | | | 4 | |
| 14°30′ | 9,3986 | | 9,4127 | | 0,5873 | 9,9859 | | 75°30′ |
| | | 49 | | 51 | | | 3 | |
| 40 | 4035 | | 4178 | | 5822 | 9856 | | 20 |
| | | 48 | | 52 | | | 3 | |
| 50 | 4083 | | 4230 | | 5770 | 9853 | | 10 |
| | | 47 | | 51 | | | 4 | |
| 15°00′ | 9,4130 | | 9,4281 | | 0,5719 | 9,9849 | | 75°00′ |
| | | 47 | | 50 | | | 3 | |
| 10 | 4177 | | 4331 | | 5669 | 9846 | | 50 |
| | | 46 | | 50 | | | 3 | |
| 20 | 4223 | | 4381 | | 5619 | 9843 | | 40 |
| | | 46 | | 49 | | | 4 | |
| 15°30′ | 9,4269 | | 9,4430 | | 0,5570 | 9,9839 | | 74°30′ |
| | | 45 | | 49 | | | 3 | |
| 40 | 4314 | | 4479 | | 5521 | 9836 | | 20 |
| | | 45 | | 48 | | | 4 | |
| 50 | 4359 | | 4527 | | 5473 | 9832 | | 10 |
| | | 44 | | 48 | | | 4 | |
| 16°00′ | 9,4403 | | 9,4575 | | 0,5425 | 9,9828 | | 74°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |
| 46 | 4,6 | 9,2 | 13,8 | 18,4 | 23,0 | 27,6 | 32,2 | 36,8 | 41,4 |
| 48 | 4,8 | 9,6 | 14,4 | 19,2 | 24,0 | 28,8 | 33,6 | 38,4 | 43,2 |
| 49 | 4,9 | 9,8 | 14,7 | 19,6 | 24,5 | 29,4 | 34,3 | 39,2 | 44,1 |
| 50 | 5,0 | 10,0 | 15,0 | 20,0 | 25,0 | 30,0 | 35,0 | 40,0 | 45,0 |
| 51 | 5,1 | 10,2 | 15,3 | 20,4 | 25,5 | 30,6 | 35,7 | 40,8 | 45,9 |
| 52 | 5,2 | 10,4 | 15,6 | 20,8 | 26,0 | 31,2 | 36,4 | 41,6 | 46,8 |
| 53 | 5,3 | 10,6 | 15,9 | 21,2 | 26,5 | 31,8 | 37,1 | 42,4 | 47,7 |
| 54 | 5,4 | 10,8 | 16,2 | 21,6 | 27,0 | 32,4 | 37,8 | 43,2 | 48,6 |
| 55 | 5,5 | 11,0 | 16,5 | 22,0 | 27,5 | 33,0 | 38,5 | 44,0 | 49,5 |
| 56 | 5,6 | 11,2 | 16,8 | 22,4 | 28,0 | 33,6 | 39,2 | 44,8 | 50,4 |
| 57 | 5,7 | 11,4 | 17,1 | 22,8 | 28,5 | 34,2 | 39,9 | 45,6 | 51,3 |
| 58 | 5,8 | 11,6 | 17,4 | 23,2 | 29,0 | 34,8 | 40,6 | 46,4 | 52,2 |
| 59 | 5,9 | 11,8 | 17,7 | 23,6 | 29,5 | 35,4 | 41,3 | 47,2 | 53,1 |
| 61 | 6,1 | 12,2 | 18,3 | 24,4 | 30,5 | 36,6 | 42,7 | 48,8 | 54,9 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16°00′ | 9,4403 | | 9,4575̄ | | 0,5425 | 9,9828 | | 74°00′ |
| 10 | 4447 | 44 | 4622 | 47 | 5378 | 9825̄ | 3 | 50 |
| 20 | 4491 | 44 | 4669 | 47 | 5331 | 9821 | 4 | 40 |
| | | 42 | | 47 | | | 4 | |
| 16°30′ | 9,4533 | | 9,4716 | | 0,5284 | 9,9817 | | 73°30′ |
| 40 | 4576 | 43 | 4762 | 46 | 5238 | 9814 | 3 | 20 |
| 50 | 4618 | 42 | 4808 | 46 | 5192 | 9810 | 4 | 10 |
| | | 41 | | 45 | | | 4 | |
| 17°00′ | 9,4659 | | 9,4853 | | 0,5147 | 9,9806 | | 73°00′ |
| 10 | 4700 | 41 | 4898 | 45 | 5102 | 9802 | 4 | 50 |
| 20 | 4741 | 41 | 4943 | 45 | 5057 | 9798 | 4 | 40 |
| | | 40 | | 44 | | | 4 | |
| 17°30′ | 9,4781 | | 9,4987 | | 0,5013 | 9,9794 | | 72°30′ |
| 40 | 4821 | 40 | 5031 | 44 | 4969 | 9790 | 4 | 20 |
| 50 | 4861 | 40 | 5075̄ | 44 | 4925 | 9786 | 4 | 10 |
| | | 39 | | 43 | | | 4 | |
| 18°00′ | 9,4900 | | 9,5118 | | 0,4882 | 9,9782 | | 72°00′ |
| 10 | 4939 | 39 | 5161 | 43 | 4839 | 9778 | 4 | 50 |
| 20 | 4977 | 38 | 5203 | 42 | 4797 | 9774 | 4 | 40 |
| | | 38 | | 42 | | | 4 | |
| 18°30′ | 9,5015̄ | | 9,5245 | | 0,4755̄ | 9,9770 | | 71°30′ |
| 40 | 5052 | 37 | 5287 | 42 | 4713 | 9765 | 5 | 20 |
| 50 | 5090 | 38 | 5329 | 42 | 4671 | 9761 | 4 | 10 |
| | | 36 | | 41 | | | 4 | |
| 19°00′ | 9,5126 | | 9,5370 | | 0,4630 | 9,9757 | | 71°00′ |
| 10 | 5163 | 37 | 5411 | 41 | 4589 | 9752 | 5 | 50 |
| 20 | 5199 | 36 | 5451 | 40 | 4549 | 9748 | 4 | 40 |
| | | 36 | | 40 | | | 5 | |
| 19°30′ | 9,5235̄ | | 9,5491 | | 0,4509 | 9,9743 | | 70°30′ |
| 40 | 5270 | 35 | 5531 | 40 | 4469 | 9739 | 4 | 20 |
| 50 | 5306 | 36 | 5571 | 40 | 4429 | 9734 | 5 | 10 |
| | | 35 | | 40 | | | 4 | |
| 20°00′ | 9,5341 | | 9,5611 | | 0,4389 | 9,9730 | | 70°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3 | 0,3 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,4 | 2,7 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 5 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 35 | 3,5 | 7,0 | 10,5 | 14,0 | 17,5 | 21,0 | 24,5 | 28,0 | 31,5 |
| 36 | 3,6 | 7,2 | 10,8 | 14,4 | 18,0 | 21,6 | 25,2 | 28,8 | 32,4 |
| 37 | 3,7 | 7,4 | 11,1 | 14,8 | 18,5 | 22,2 | 25,9 | 29,6 | 33,3 |
| 38 | 3,8 | 7,6 | 11,4 | 15,2 | 19,0 | 22,8 | 26,6 | 30,4 | 34,2 |
| 39 | 3,9 | 7,8 | 11,7 | 15,6 | 19,5 | 23,4 | 27,3 | 31,2 | 35,1 |
| 40 | 4,0 | 8,0 | 12,0 | 16,0 | 20,0 | 24,0 | 28,0 | 32,0 | 36,0 |
| 41 | 4,1 | 8,2 | 12,3 | 16,4 | 20,5 | 24,6 | 28,7 | 32,8 | 36,9 |
| 42 | 4,2 | 8,4 | 12,6 | 16,8 | 21,0 | 25,2 | 29,4 | 33,6 | 37,8 |
| 43 | 4,3 | 8,6 | 12,9 | 17,2 | 21,5 | 25,8 | 30,1 | 34,4 | 38,7 |
| 44 | 4,4 | 8,8 | 13,2 | 17,6 | 22,0 | 26,4 | 30,8 | 35,2 | 39,6 |
| 45 | 4,5 | 9,0 | 13,5 | 18,0 | 22,5 | 27,0 | 31,5 | 36,0 | 40,5 |
| 47 | 4,7 | 9,4 | 14,1 | 18,8 | 23,5 | 28,2 | 32,9 | 37,6 | 42,3 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20°00′ | 9,5341 | | 9,5611 | | 0,4389 | 9,9730 | | 70°00′ |
| | | 34 | | 39 | | | 5 | |
| 10 | 5375 | | 5650 | | 4350 | 9725 | | 50 |
| | | 34 | | 39 | | | 4 | |
| 20 | 5409 | | 5689 | | 4311 | 9721 | | 40 |
| | | 34 | | 38 | | | 5 | |
| 20°30′ | 9,5443 | | 9,5727 | | 0,4273 | 9,9716 | | 69°30′ |
| | | 34 | | 39 | | | 5 | |
| 40 | 5477 | | 5766 | | 4234 | 9711 | | 20 |
| | | 33 | | 38 | | | 5 | |
| 50 | 5510 | | 5804 | | 4196 | 9706 | | 10 |
| | | 33 | | 38 | | | 4 | |
| 21°00′ | 9,5543 | | 9,5842 | | 0,4158 | 9,9702 | | 69°00′ |
| | | 33 | | 37 | | | 5 | |
| 10 | 5576 | | 5879 | | 4121 | 9697 | | 50 |
| | | 33 | | 38 | | | 5 | |
| 20 | 5609 | | 5917 | | 4083 | 9692 | | 40 |
| | | 32 | | 37 | | | 5 | |
| 21°30′ | 9,5641 | | 9,5954 | | 0,4046 | 9,9687 | | 68°30′ |
| | | 32 | | 37 | | | 5 | |
| 40 | 5673 | | 5991 | | 4009 | 9682 | | 20 |
| | | 31 | | 37 | | | 5 | |
| 50 | 5704 | | 6028 | | 3972 | 9677 | | 10 |
| | | 32 | | 36 | | | 5 | |
| 22°00′ | 9,5736 | | 9,6064 | | 0,3936 | 9,9672 | | 68°00′ |
| | | 31 | | 36 | | | 5 | |
| 10 | 5767 | | 6100 | | 3900 | 9667 | | 50 |
| | | 31 | | 36 | | | 6 | |
| 20 | 5798 | | 6136 | | 3864 | 9661 | | 40 |
| | | 30 | | 36 | | | 5 | |
| 22°30′ | 9,5828 | | 9,6172 | | 0,3828 | 9,9656 | | 67°30′ |
| | | 31 | | 36 | | | 5 | |
| 40 | 5859 | | 6208 | | 3792 | 9651 | | 20 |
| | | 30 | | 35 | | | 5 | |
| 50 | 5889 | | 6243 | | 3757 | 9646 | | 10 |
| | | 30 | | 36 | | | 6 | |
| 23°00′ | 9,5919 | | 9,6279 | | 0,3721 | 9,9640 | | 67°00′ |
| | | 29 | | 35 | | | 5 | |
| 10 | 5948 | | 6314 | | 3686 | 9635 | | 50 |
| | | 30 | | 34 | | | 6 | |
| 20 | 5978 | | 6348 | | 3652 | 9629 | | 40 |
| | | 29 | | 35 | | | 5 | |
| 23°30′ | 9,6007 | | 9,6383 | | 0,3617 | 9,9624 | | 66°30′ |
| | | 29 | | 34 | | | 6 | |
| 40 | 6036 | | 6417 | | 3583 | 9618 | | 20 |
| | | 29 | | 35 | | | 5 | |
| 50 | 6065 | | 6452 | | 3548 | 9613 | | 10 |
| | | 28 | | 34 | | | 6 | |
| 24°00′ | 9,6093 | | 9,6486 | | 0,3514 | 9,9607 | | 66°00′ |
| | | 28 | | 34 | | | 5 | |
| 10 | 6121 | | 6520 | | 3480 | 9602 | | 50 |
| | | 28 | | 33 | | | 6 | |
| 20 | 6149 | | 6553 | | 3447 | 9596 | | 40 |
| | | 28 | | 34 | | | 6 | |
| 24°30′ | 9,6177 | | 9,6587 | | 0,3413 | 9,9590 | | 65°30′ |
| | | 28 | | 33 | | | 6 | |
| 40 | 6205 | | 6620 | | 3380 | 9584 | | 20 |
| | | 27 | | 34 | | | 5 | |
| 50 | 6232 | | 6654 | | 3346 | 9579 | | 10 |
| | | 27 | | 33 | | | 6 | |
| 25°00′ | 9,6259 | | 9,6687 | | 0,3313 | 9,9573 | | 65°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 | 2,8 | 3,2 | 3,6 |
| 28 | 2,8 | 5,6 | 8,4 | 11,2 | 14,0 | 16,8 | 19,6 | 22,4 | 25,2 |
| 31 | 3,1 | 6,2 | 9,3 | 12,4 | 15,5 | 18,6 | 21,7 | 24,8 | 27,9 |
| 32 | 3,2 | 6,4 | 9,6 | 12,8 | 16,0 | 19,2 | 22,4 | 25,6 | 28,8 |
| 33 | 3,3 | 6,6 | 9,9 | 13,2 | 16,5 | 19,8 | 23,1 | 26,4 | 29,7 |
| 34 | 3,4 | 6,8 | 10,2 | 13,6 | 17,0 | 20,4 | 23,8 | 27,2 | 30,6 |
| 35 | 3,5 | 7,0 | 10,5 | 14,0 | 17,5 | 21,0 | 24,5 | 28,0 | 31,5 |
| 36 | 3,6 | 7,2 | 10,8 | 14,4 | 18,0 | 21,6 | 25,2 | 28,8 | 32,4 |
| 37 | 3,7 | 7,4 | 11,1 | 14,8 | 18,5 | 22,2 | 25,9 | 29,6 | 33,3 |
| 38 | 3,8 | 7,6 | 11,4 | 15,2 | 19,0 | 22,8 | 26,6 | 30,4 | 34,2 |
| 39 | 3,9 | 7,8 | 11,7 | 15,6 | 19,5 | 23,4 | 27,3 | 31,2 | 35,1 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25°00′ | 9,6259 | | 9,6687 | | 0,3313 | 9,9573 | | 65°00′ |
| 10 | 6286 | 27 | 6720 | 33 | 3280 | 9567 | 6 | 50 |
| 20 | 6312 | 27 | 6752 | 32 | 3248 | 9561 | 6 | 40 |
| | | 27 | | 33 | | | 6 | |
| 25°30′ | 9,6340 | | 9,6785 | | 0,3215 | 9,9555 | | 64°30′ |
| 40 | 6366 | 26 | 6817 | 32 | 3183 | 9549 | 6 | 20 |
| 50 | 6392 | 26 | 6850 | 33 | 3150 | 9543 | 6 | 10 |
| | | 26 | | 32 | | | 6 | |
| 26°00′ | 9,6418 | | 9,6882 | | 0,3118 | 9,9537 | | 64°00′ |
| 10 | 6444 | 26 | 6914 | 32 | 3086 | 9530 | 7 | 50 |
| 20 | 6470 | 26 | 6946 | 32 | 3054 | 9524 | 6 | 40 |
| | | 25 | | 31 | | | 6 | |
| 26°30′ | 9,6495 | | 9,6977 | | 0,3023 | 9,9518 | | 63°30′ |
| 40 | 6521 | 26 | 7009 | 32 | 2991 | 9512 | 6 | 20 |
| 50 | 6546 | 25 | 7040 | 31 | 2960 | 9505 | 7 | 10 |
| | | 24 | | 32 | | | 6 | |
| 27°00′ | 9,6570 | | 9,7072 | | 0,2928 | 9,9499 | | 63°00′ |
| 10 | 6595 | 25 | 7103 | 31 | 2897 | 9492 | 7 | 50 |
| 20 | 6620 | 25 | 7134 | 31 | 2866 | 9486 | 6 | 40 |
| | | 24 | | 31 | | | 7 | |
| 27°30′ | 9,6644 | | 9,7165 | | 0,2835 | 9,9479 | | 62°30′ |
| 40 | 6668 | 24 | 7196 | 31 | 2804 | 9473 | 6 | 20 |
| 50 | 6692 | 24 | 7226 | 30 | 2774 | 9466 | 7 | 10 |
| | | 24 | | 31 | | | 7 | |
| 28°00′ | 9,6716 | | 9,7257 | | 0,2743 | 9,9459 | | 62°00′ |
| 10 | 6740 | 24 | 7287 | 30 | 2713 | 9453 | 6 | 50 |
| 20 | 6763 | 23 | 7317 | 30 | 2683 | 9446 | 7 | 40 |
| | | 24 | | 31 | | | 7 | |
| 28°30′ | 9,6787 | | 9,7348 | | 0,2652 | 9,9439 | | 61°30′ |
| 40 | 6810 | 23 | 7378 | 30 | 2622 | 9432 | 7 | 20 |
| 50 | 6833 | 23 | 7408 | 30 | 2592 | 9425 | 7 | 10 |
| | | 23 | | 30 | | | 7 | |
| 29°00′ | 9,6856 | | 9,7438 | | 0 2562 | 9,9418 | | 61°00′ |
| 10 | 6878 | 22 | 7467 | 29 | 2533 | 9411 | 7 | 50 |
| 20 | 6901 | 23 | 7497 | 30 | 2503 | 9404 | 7 | 40 |
| | | 22 | | 29 | | | 7 | |
| 29°30′ | 9,6923 | | 9,7526 | | 0,2474 | 9,9397 | | 60°30′ |
| 40 | 6946 | 23 | 7556 | 30 | 2444 | 9390 | 7 | 20 |
| 50 | 6968 | 22 | 7585 | 29 | 2415 | 9383 | 7 | 10 |
| | | 22 | | 29 | | | 8 | |
| 30°00′ | 9,6990 | | 9,7614 | | 0,2386 | 9,9375 | | 60°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 6 | 0,6 | 1,2 | 1,8 | 2,4 | 3,0 | 3,6 | 4,2 | 4,8 | 5,4 |
| 7 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,8 | 3,5 | 4,2 | 4,9 | 5,6 | 6,3 |
| 8 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | 5,6 | 6,4 | 7,2 |
| 22 | 2,2 | 4,4 | 6,6 | 8,8 | 11,0 | 13,2 | 15,4 | 17,6 | 19,8 |
| 23 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 |
| 24 | 2,4 | 4,8 | 7,2 | 9,6 | 12,0 | 14,4 | 16,8 | 19,2 | 21,6 |
| 25 | 2,5 | 5,0 | 7,5 | 10,0 | 12,5 | 15,0 | 17,5 | 20,0 | 22,5 |
| 26 | 2,6 | 5,2 | 7,8 | 10,4 | 13,0 | 15,6 | 18,2 | 20,8 | 23,4 |
| 27 | 2,7 | 5,4 | 8,1 | 10,8 | 13,5 | 16,2 | 18,9 | 21,6 | 24,3 |
| 29 | 2,9 | 5,8 | 8,7 | 11,6 | 14,5 | 17,4 | 20,3 | 23,2 | 26,1 |
| 30 | 3,0 | 6,0 | 9,0 | 12,0 | 15,0 | 18,0 | 21,0 | 24,0 | 27,0 |

| α | sin | *d* | tg | *d. c.* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30°00′ | 9,6990 | | 9,7614 | | 0,2386 | 9,9375 | | 60°00′ |
| 10 | 7012 | 22 | 7644 | 30 | 2356 | 9368 | 7 | 50 |
| 20 | 7033 | 21 | 7673 | 29 | 2327 | 9361 | 7 | 40 |
| | | 22 | | 28 | | | 8 | |
| 30°30′ | 9,7055 | | 9,7701 | | 0,2299 | 9,9353 | | 59°30′ |
| 40 | 7076 | 21 | 7730 | 29 | 2270 | 9346 | 7 | 20 |
| 50 | 7097 | 21 | 7759 | 29 | 2241 | 9338 | 8 | 10 |
| | | 21 | | 29 | | | 7 | |
| 31°00′ | 9,7118 | | 9,7788 | | 0,2212 | 9,9331 | | 59°00′ |
| 10 | 7139 | 21 | 7816 | 28 | 2184 | 9323 | 8 | 50 |
| 20 | 7160 | 21 | 7845 | 29 | 2155 | 9315 | 8 | 40 |
| | | 21 | | 28 | | | 7 | |
| 31°30′ | 9,7181 | | 9,7873 | | 0,2127 | 9,9308 | | 58°30′ |
| 40 | 7201 | 20 | 7902 | 29 | 2098 | 9300 | 8 | 20 |
| 50 | 7222 | 21 | 7930 | 28 | 2070 | 9292 | 8 | 10 |
| | | 20 | | 28 | | | 8 | |
| 32°00′ | 9,7242 | | 9,7958 | | 0,2042 | 9,9284 | | 58°00′ |
| 10 | 7262 | 20 | 7986 | 28 | 2014 | 9276 | 8 | 50 |
| 20 | 7282 | 20 | 8014 | 28 | 1986 | 9268 | 8 | 40 |
| | | 20 | | 28 | | | 8 | |
| 32°30′ | 9,7302 | | 9,8042 | | 0,1958 | 9,9260 | | 57°30′ |
| 40 | 7322 | 20 | 8070 | 28 | 1930 | 9252 | 8 | 20 |
| 50 | 7342 | 20 | 8097 | 27 | 1903 | 9244 | 8 | 10 |
| | | 19 | | 28 | | | 8 | |
| 33°00′ | 9,7361 | | 9,8125 | | 0,1875 | 9,9236 | | 57°00′ |
| 10 | 7380 | 19 | 8153 | 27 | 1847 | 9228 | 8 | 50 |
| 20 | 7400 | 20 | 8180 | 28 | 1820 | 9219 | 8 | 40 |
| | | 19 | | 27 | | | 8 | |
| 33°30′ | 9,7419 | | 9,8208 | | 0,1792 | 9,9211 | | 56°30′ |
| 40 | 7438 | 19 | 8235 | 28 | 1765 | 9203 | 8 | 20 |
| 50 | 7457 | 19 | 8263 | 27 | 1737 | 9194 | 9 | 10 |
| | | 19 | | 27 | | | 8 | |
| 34°00′ | 9,7476 | | 9,8290 | | 0,1710 | 9,9186 | | 56°00′ |
| 10 | 7494 | 18 | 8317 | 27 | 1683 | 9177 | 9 | 50 |
| 20 | 7513 | 19 | 8344 | 27 | 1656 | 9169 | 8 | 40 |
| | | 18 | | 27 | | | 9 | |
| 34°30′ | 9,7531 | | 9,8371 | | 0,1629 | 9,9160 | | 55°30′ |
| 40 | 7550 | 19 | 8398 | 27 | 1602 | 9151 | 9 | 20 |
| 50 | 7568 | 18 | 8425 | 27 | 1575 | 9142 | 9 | 10 |
| | | 18 | | 27 | | | 8 | |
| 35°00′ | 9,7586 | | 9,8452 | | 0,1548 | 9,9134 | | 55°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 7 | 0,7 | 1,4 | 2,1 | 2,8 | 3,5 | 4,2 | 4,9 | 5,6 | 6,3 |
| 8 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4,0 | 4,8 | 5,6 | 6,4 | 7,2 |
| 18 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9,0 | 10,8 | 12,6 | 14,4 | 16,2 |
| 19 | 1,9 | 3,8 | 5,7 | 7,6 | 9,5 | 11,4 | 13,3 | 15,2 | 17,1 |
| 20 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 14,0 | 16,0 | 18,0 |
| 21 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,4 | 10,5 | 12,6 | 14,7 | 16,8 | 18,9 |
| 22 | 2,2 | 4,4 | 6,6 | 8,8 | 11,0 | 13,2 | 15,4 | 17,6 | 19,8 |
| 28 | 2,8 | 5,6 | 8,4 | 11,2 | 14,0 | 16,8 | 19,6 | 22,4 | 25,2 |
| 29 | 2,9 | 5,8 | 8,7 | 11,6 | 14,5 | 17,4 | 20,3 | 23,2 | 26,1 |
| 30 | 3,0 | 6,0 | 9,0 | 12,0 | 15,0 | 18,0 | 21,0 | 24,0 | 27,0 |

| α | sin | *d* | tg | *d*. *c* | ctg | cos | *d* | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35°00′ | 9,7586 | | 9,8452 | | 0,1548 | 9,9134 | | 55°00′ |
| 10 | 7604 | 18 | 8479 | 27 | 1521 | 9125̄ | 9 | 50 |
| 20 | 7622 | 18 | 8506 | 27 | 1494 | 9116 | 9 | 40 |
| | | 18 | | 27 | | | 9 | |
| 35°30′ | 9,7640 | | 9,8533 | | 0,1467 | 9,9107 | | 54°30′ |
| 40 | 7657 | 17 | 8559 | 26 | 1441 | 9098 | 9 | 20 |
| 50 | 7675̄ | 18 | 8586 | 27 | 1414 | 9089 | 9 | 10 |
| | | 17 | | 27 | | | 9 | |
| 36°00′ | 9,7692 | | 9,8613 | | 0,1387 | 9,9080 | | 54°00′ |
| 10 | 7710 | 18 | 8639 | 26 | 1361 | 9070 | 10 | 50 |
| 20 | 7727 | 17 | 8666 | 27 | 1334 | 9061 | 9 | 40 |
| | | 17 | | 26 | | | 9 | |
| 36°30′ | 9,7744 | | 9,8692 | | 0,1308 | 9,9052 | | 53°30′ |
| 40 | 7761 | 17 | 8718 | 26 | 1282 | 9042 | 10 | 20 |
| 50 | 7778 | 17 | 8745̄ | 27 | 1255 | 9033 | 9 | 10 |
| | | 17 | | 26 | | | 10 | |
| 37°00′ | 9,7795̄ | | 9,8771 | | 0,1229 | 9,9023 | | 53°00′ |
| 10 | 7811 | 16 | 8797 | 26 | 1203 | 9014 | 9 | 50 |
| 20 | 7828 | 17 | 8824 | 26 | 1176 | 9004 | 10 | 40 |
| | | 16 | | 27 | | | 9 | |
| 37°30′ | 9,7844 | | 9,8850 | | 0,1150 | 9,8995̄ | | 52°30′ |
| 40 | 7861 | 17 | 8876 | 26 | 1124 | 8985̄ | 10 | 20 |
| 50 | 7877 | 16 | 8902 | 26 | 1098 | 8975 | 10 | 10 |
| | | 16 | | 26 | | | 10 | |
| 38°00′ | 9,7893 | | 9,8928 | | 0,1072 | 9,8965 | | 52°00′ |
| 10 | 7910 | 17 | 8954 | 26 | 1046 | 8955 | 10 | 50 |
| 20 | 7926 | 16 | 8980 | 26 | 1020 | 8945 | 10 | 40 |
| | | 15 | | 26 | | | 10 | |
| 38°30′ | 9,7941 | | 9,9006 | | 0,0994 | 9,8935 | | 51°30′ |
| 40 | 7957 | 16 | 9032 | 26 | 0968 | 8925 | 10 | 20 |
| 50 | 7973 | 16 | 9058 | 26 | 0942 | 8915 | 10 | 10 |
| | | 16 | | 26 | | | 10 | |
| 39°00′ | 9,7989 | | 9,9084 | | 0,0916 | 9,8905 | | 51°00′ |
| 10 | 8004 | 16 | 9110 | 26 | 0890 | 8895̄ | 10 | 50 |
| 20 | 8020 | 16 | 9135 | 25 | 0865̄ | 8884 | 11 | 40 |
| | | 15 | | 26 | | | 10 | |
| 39°30′ | 9,8035 | | 9,9161 | | 0,0839 | 9,8874 | | 50°30′ |
| 40 | 8050 | 15 | 9187 | 26 | 0813 | 8864 | 10 | 20 |
| 50 | 8066 | 16 | 9212 | 25 | 0788 | 8853 | 11 | 10 |
| | | 15 | | 26 | | | 10 | |
| 40°00′ | 9,8081 | | 9,9238 | | 0,0762 | 9,8843 | | 50°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 9 | 0,9 | 1,8 | 2,7 | 3,6 | 4,5 | 5,4 | 6,3 | 7,2 | 8,1 |
| 10 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 11 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 | 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 |
| 15 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 7,5 | 9,0 | 10,5 | 12,0 | 13,5 |
| 16 | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 8,0 | 9,6 | 11,2 | 12,8 | 14,4 |
| 17 | 1,7 | 3,4 | 5,1 | 6,8 | 8,5 | 10,2 | 11,9 | 13,6 | 15,3 |
| 18 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9,0 | 10,8 | 12,6 | 14,4 | 16,2 |
| 25 | 2,5 | 5,0 | 7,5 | 10,0 | 12,5 | 15,0 | 17,5 | 20,0 | 22,5 |
| 26 | 2,6 | 5,2 | 7,8 | 10,4 | 13,0 | 15,6 | 18,2 | 20,8 | 23,4 |
| 27 | 2,7 | 5,4 | 8,1 | 10,8 | 13,5 | 16,2 | 18,9 | 21,6 | 24,3 |

| α | sin | d | tg | d. c. | ctg | cos | d | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40°00′ | 9,8081 | | 9,9238 | | 0,0762 | 9,8843 | | 50°00′ |
| 10 | 8096 | 15 | 9264 | 26 | 0736 | 8832 | 11 | 50 |
| 20 | 8111 | 15 | 9289 | 25 | 0711 | 8821 | 11 | 40 |
| 40°30′ | 9,8125 | 14 | 9,9315 | 26 | 0,0685 | 9,8810 | 11 | 49°30′ |
| 40 | 8140 | 15 | 9341 | 26 | 0659 | 8800 | 10 | 20 |
| 50 | 8155 | 15 | 9366 | 25 | 0634 | 8789 | 11 | 10 |
| 41°00′ | 9,8169 | 14 | 9,9392 | 26 | 0,0608 | 9,8778 | 11 | 49°00′ |
| 10 | 8184 | 15 | 9417 | 25 | 0583 | 8767 | 11 | 50 |
| 20 | 8198 | 14 | 9443 | 26 | 0557 | 8756 | 11 | 40 |
| 41°30′ | 9,8213 | 15 | 9,9468 | 25 | 0,0532 | 9,8745 | 12 | 48°30′ |
| 40 | 8227 | 14 | 9494 | 26 | 0506 | 8733 | 11 | 20 |
| 50 | 8241 | 14 | 9519 | 25 | 0481 | 8722 | 11 | 10 |
| 42°00′ | 9,8255 | 14 | 9,9544 | 25 | 0,0456 | 9,8711 | 12 | 48°00′ |
| 10 | 8269 | 14 | 9570 | 26 | 0430 | 8699 | 11 | 50 |
| 20 | 8283 | 14 | 9595 | 25 | 0405 | 8688 | 12 | 40 |
| 42°30′ | 9,8297 | 14 | 9,9621 | 26 | 0,0379 | 9,8676 | 11 | 47°30′ |
| 40 | 8311 | 13 | 9646 | 25 | 0354 | 8665 | 12 | 20 |
| 50 | 8324 | 14 | 9671 | 25 | 0329 | 8653 | 12 | 10 |
| 43°00′ | 9,8338 | 13 | 9,9697 | 26 | 0,0303 | 9,8641 | 12 | 47°00′ |
| 10 | 8351 | 14 | 9722 | 25 | 0278 | 8629 | 11 | 50 |
| 20 | 8365 | 13 | 9747 | 25 | 0253 | 8618 | 12 | 40 |
| 43°30′ | 9,8378 | 13 | 9,9772 | 25 | 0,0228 | 9,8606 | 12 | 46°30′ |
| 40 | 8391 | 14 | 9798 | 26 | 0202 | 8594 | 12 | 20 |
| 50 | 8405 | 13 | 9823 | 25 | 0177 | 8582 | 13 | 10 |
| 44°00′ | 9,8418 | 13 | 9,9848 | 25 | 0,0152 | 9,8569 | 12 | 46°00′ |
| 10 | 8431 | 13 | 9874 | 26 | 0126 | 8557 | 12 | 50 |
| 20 | 8444 | 13 | 9899 | 25 | 0101 | 8545 | 13 | 40 |
| 44°30′ | 9,8457 | 12 | 9,9924 | 25 | 0,0076 | 9,8532 | 12 | 45°30′ |
| 40 | 8469 | 13 | 9949 | 26 | 0051 | 8520 | 13 | 20 |
| 50 | 8482 | 13 | 9975 | 25 | 0025 | 8507 | 12 | 10 |
| 45°00′ | 9,8495 | | 0,0000 | | 0,0000 | 9,8495 | | 45°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 |
| 11 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 | 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 |
| 12 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,8 | 6,0 | 7,2 | 8,4 | 9,6 | 10,8 |
| 13 | 1,3 | 2,6 | 3,9 | 5,2 | 6,5 | 7,8 | 9,1 | 10,4 | 11,7 |
| 14 | 1,4 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 7,0 | 8,4 | 9,8 | 11,2 | 12,6 |
| 15 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 7,5 | 9,0 | 10,5 | 12,0 | 13,5 |
| 25 | 2,5 | 5,0 | 7,5 | 10,0 | 12,5 | 15,0 | 17,6 | 20,0 | 22,5 |
| 26 | 2,6 | 5,2 | 7,8 | 10,4 | 13,0 | 15,6 | 18,2 | 20,8 | 23,4 |

Таблица 17

## Десятичные логарифмы тригонометрических функций для углов в радианной мере

| Логарифмы синусов | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ρ° |
| 0,0 | — | 8,0000 | 3010 | 4771 | 6019 | 6988 | 7779 | 8447 | 9026 | 9537 | 0,0 |
| 0,1 | 8,9993 | ·0405 | ·0781 | ·1127 | ·1447 | ·1745 | ·2023 | ·2284 | ·2529 | ·2761 | 0,1 |
| 0,2 | 9,2981 | 3190 | 3389 | 3579 | 3760 | 3934 | 4101 | 4261 | 4415 | 4563 | 0,2 |
| 0,3 | 9,4706 | 4844 | 4977 | 5106 | 5231 | 5352 | 5469 | 5582 | 5693 | 5800 | 0,3 |
| 0,4 | 9,5904 | 6005 | 6104 | 6200 | 6293 | 6385 | 6473 | 6560 | 6644 | 6727 | 0,4 |
| 0,5 | 9,6807 | 6886 | 6963 | 7037 | 7111 | 7182 | 7252 | 7321 | 7388 | 7454 | 0,5 |
| 0,6 | 9,7518 | 7581 | 7642 | 7702 | 7761 | 7819 | 7875 | 7931 | 7985 | 8038 | 0,6 |
| 0,7 | 9,8090 | 8141 | 8191 | 8240 | 8288 | 8336 | 8382 | 8427 | 8471 | 8515 | 0,7 |
| 0,8 | 9,8557 | 8599 | 8640 | 8680 | 8719 | 8758 | 8796 | 8833 | 8869 | 8905 | 0,8 |
| 0,9 | 9,8939 | 8974 | 9007 | 9040 | 9072 | 9103 | 9134 | 9164 | 9193 | 9222 | 0,9 |
| 1,0 | 9,9250 | 9278 | 9305 | 9331 | 9357 | 9382 | 9407 | 9431 | 9454 | 9477 | 1,0 |
| 1,1 | 9,9500 | 9522 | 9543 | 9564 | 9584 | 9604 | 9623 | 9641 | 9660 | 9677 | 1,1 |
| 1,2 | 9,9694 | 9711 | 9727 | 9743 | 9758 | 9773 | 9787 | 9800 | 9814 | 9826 | 1,2 |
| 1,3 | 9,9839 | 9851 | 9862 | 9873 | 9883 | 9893 | 9903 | 9912 | 9920 | 9929 | 1,3 |
| 1,4 | 9,9936 | 9944 | 9950 | 9957 | 9963 | 9968 | 9973 | 9978 | 9982 | 9986 | 1,4 |
| 1,5 | 9,9989 | 9992 | 9994 | 9996 | 9998 | 9999 | 0,0000 | 0,0000 | — | — | 1,5 |

| $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 1,0101 | 0,9900 | 0,21 | 1,2337 | 0,8106 | 0,41 | 1,5068 | 0,6637 |
| 02 | 0202 | 9802 | 22 | 2461 | 8025 | 42 | 5220 | 6570 |
| 03 | 0305 | 9704 | 23 | 2586 | 7945 | 43 | 5373 | 6505 |
| 0,04 | 1,0408 | 0,9608 | 0,24 | 1,2712 | 0,7866 | 0,44 | 1,5527 | 0,6440 |
| 05 | 0513 | 9512 | 25 | 2840 | 7788 | 45 | 5683 | 6376 |
| 06 | 0618 | 9418 | 26 | 2969 | 7711 | 46 | 5841 | 6313 |
| 0,07 | 1,0725 | 0,9324 | 0,27 | 1,3100 | 0,7634 | 0,47 | 1,6000 | 0,6250 |
| 08 | 0833 | 9231 | 28 | 3231 | 7558 | 48 | 6161 | 6188 |
| 09 | 0942 | 9139 | 29 | 3364 | 7483 | 49 | 6323 | 6126 |
| 0,10 | 1,1052 | 0,9048 | 0,30 | 1,3499 | 0,7408 | 0,50 | 1,6487 | 0,6065 |
| 11 | 1163 | 8958 | 31 | 3634 | 7334 | 51 | 6653 | 6005 |
| 12 | 1275 | 8869 | 32 | 3771 | 7261 | 52 | 6820 | 5945 |
| 0,13 | 1,1388 | 0,8781 | 0,33 | 1,3910 | 0,7189 | 0,53 | 1,6989 | 0,5886 |
| 14 | 1503 | 8694 | 34 | 4049 | 7118 | 54 | 7160 | 5827 |
| 15 | 1618 | 8607 | 35 | 4191 | 7047 | 55 | 7333 | 5769 |
| 0,16 | 1,1735 | 0,8521 | 0,36 | 1,4333 | 0,6977 | 0,56 | 1,7507 | 0,5712 |
| 17 | 1853 | 8437 | 37 | 4477 | 6907 | 57 | 7683 | 5655 |
| 18 | 1972 | 8353 | 38 | 4623 | 6839 | 58 | 7860 | 5599 |
| 0,19 | 1,2092 | 0,8270 | 0,39 | 1,4770 | 0,6771 | 0,59 | 1,8040 | 0,5543 |
| 20 | 2214 | 8187 | 40 | 4918 | 6703 | 60 | 8221 | 5488 |

**Примеры:** 1. $\lg \sin 1{,}24 = 9{,}9758 = \bar{1}{,}9758 = -0{,}0242$.
2. $\lg \sin 0{,}19 = 9{,}2761 = \bar{1}{,}2761 = -0{,}7239$.
3. $e^{0{,}59} = 1{,}8040$.
4. $e^{-0{,}15} = 0{,}8607$.

| Логарифмы косинусов | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi°$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\varphi°$ |
| 0,0 | 0,0000 | 0000 | ·9999 | ·9998 | ·9997 | ·9995 | ·9992 | ·9989 | ·9986 | ·9982 | 0,0 |
| 0,1 | 9,9978 | 9974 | 9969 | 9963 | 9957 | 9951 | 9944 | 9937 | 9929 | 9921 | 0,1 |
| 0,2 | 9,9913 | 9904 | 9894 | 9884 | 9874 | 9863 | 9852 | 9840 | 9827 | 9815 | 0,2 |
| 0,3 | 9,9802 | 9788 | 9774 | 9759 | 9744 | 9728 | 9712 | 9696 | 9679 | 9661 | 0,3 |
| 0,4 | 9,9643 | 9624 | 9605 | 9585 | 9565 | 9545 | 9523 | 9502 | 9479 | 9456 | 0,4 |
| 0,5 | 9,9433 | 9409 | 9384 | 9359 | 9333 | 9307 | 9280 | 9253 | 9224 | 9196 | 0,5 |
| 0,6 | 9,9166 | 9136 | 9106 | 9074 | 9042 | 9010 | 8976 | 8942 | 8907 | 8872 | 0,6 |
| 0,7 | 9,8836 | 8799 | 8761 | 8723 | 8683 | 8643 | 8602 | 8561 | 8518 | 8475 | 0,7 |
| 0,8 | 9,8430 | 8385 | 8339 | 8292 | 8244 | 8195 | 8145 | 8094 | 8042 | 7989 | 0,8 |
| 0,9 | 9,7935 | 7880 | 7823 | 7766 | 7707 | 7647 | 7585 | 7523 | 7459 | 7393 | 0,9 |
| 1,0 | 9,7326 | 7258 | 7188 | 7117 | 7043 | 6969 | 6892 | 6814 | 6733 | 6651 | 1,0 |
| 1,1 | 9,6567 | 6480 | 6392 | 6301 | 6208 | 6112 | 6013 | 5912 | 5808 | 5701 | 1,1 |
| 1,2 | 9,5591 | 5478 | 5361 | 5241 | 5116 | 4988 | 4855 | 4717 | 4575 | 4427 | 1,2 |
| 1,3 | 9,4273 | 4114 | 3948 | 3774 | 3594 | 3405 | 3206 | 2998 | 2779 | 2548 | 1,3 |
| 1,4 | 9,2304 | 2044 | 1767 | 1472 | 1154 | 0810 | 0436 | 0027 | ·9575 | ·9069 | 1,4 |
| 1,5 | 8,8496 | 7836 | 7056 | 6105 | 4884 | 3180 | 0333 | 6,9012 | — | — | 1,5 |

| $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,61 | 1,8404 | 0,5434 | 0,81 | 2,2479 | 0,4449 | 1,01 | 2,7456 | 0,3642 | 1,21 |
| 62 | 8589 | 5379 | 82 | 2705 | 4404 | 02 | 7732 | 3606 | 22 |
| 63 | 8776 | 5326 | 83 | 2933 | 4360 | 03 | 8011 | 3570 | 23 |
| 0,64 | 1,8965 | 0,5273 | 0,84 | 2,3164 | 0,4317 | 1,04 | 2,8292 | 0,3535 | 1,24 |
| 65 | 9155 | 5220 | 85 | 3396 | 4274 | 05 | 8577 | 3499 | 25 |
| 66 | 9348 | 5169 | 86 | 3632 | 4232 | 06 | 8864 | 3465 | 26 |
| 0,67 | 1,9542 | 0,5117 | 0,87 | 2,3869 | 0,4190 | 1,07 | 2,9154 | 0,3430 | 1,27 |
| 68 | 9739 | 5066 | 88 | 4109 | 4148 | 08 | 9447 | 3396 | 28 |
| 69 | 9937 | 5016 | 89 | 4351 | 4107 | 09 | 9743 | 3362 | 29 |
| 0,70 | 2,0138 | 0,4966 | 0,90 | 2,4596 | 0,4066 | 1,10 | 3,0042 | 0,3329 | 1,30 |
| 71 | 0340 | 4916 | 91 | 4843 | 4025 | 11 | 0344 | 3296 | 31 |
| 72 | 0544 | 4868 | 92 | 5093 | 3985 | 12 | 0649 | 3263 | 32 |
| 0,73 | 2,0751 | 0,4819 | 0,93 | 2,5345 | 0,3946 | 1,13 | 3,0957 | 0,3230 | 1,33 |
| 74 | 0959 | 4771 | 94 | 5600 | 3906 | 14 | 1268 | 3198 | 34 |
| 75 | 1170 | 4724 | 95 | 5857 | 3867 | 15 | 1582 | 3166 | 35 |
| 0,76 | 2,1383 | 0,4677 | 0,96 | 2,6117 | 0,3829 | 1,16 | 3,1899 | 0,3135 | 1,36 |
| 77 | 1598 | 4630 | 97 | 6379 | 3791 | 17 | 2220 | 3104 | 37 |
| 78 | 1815 | 4584 | 98 | 6645 | 3753 | 18 | 2544 | 3073 | 38 |
| 0,79 | 2,2034 | 0,4538 | 0,99 | 2,6912 | 0,3716 | 1,19 | 3,2871 | 0,3042 | 1,39 |
| 80 | 2255 | 4493 | 1,00 | 7183 | 3679 | 20 | 3201 | 3012 | 40 |

Логарифмы тангенсов

| φ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | φ° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | — | 8,0000 | 3011 | 4773 | 6023 | 6993 | 7787 | 8458 | 9040 | 9554 | 0,0 |
| 0,1 | 9,0015 | 0431 | 0813 | 1164 | 1490 | 1794 | 2078 | 2347 | 2600 | 2840 | 0,1 |
| 0,2 | 9,3069 | 3287 | 3495 | 3695 | 3887 | 4071 | 4249 | 4421 | 4587 | 4748 | 0,2 |
| 0,3 | 9,4904 | 5056 | 5203 | 5347 | 5487 | 5623 | 5757 | 5887 | 6014 | 6139 | 0,3 |
| 0,4 | 9,6261 | 6381 | 6499 | 6615 | 6728 | 6840 | 6950 | 7058 | 7165 | 7270 | 0,4 |
| 0,5 | 9,7374 | 7477 | 7578 | 7678 | 7777 | 7875 | 7972 | 8068 | 8164 | 8258 | 0,5 |
| 0,6 | 9,8351 | 8444 | 8536 | 8628 | 8719 | 8809 | 8899 | 8989 | 9078 | 9166 | 0,6 |
| 0,7 | 9,9255 | 9343 | 9430 | 9518 | 9605 | 9692 | 9779 | 9866 | 9953 | ·0040 | 0,7 |
| 0,8 | 0,0127 | 0214 | 0301 | 0388 | 0475 | 0563 | 0650 | 0738 | 0827 | 0915 | 0,8 |
| 0,9 | 0,1004 | 1094 | 1184 | 1274 | 1365 | 1456 | 1548 | 1641 | 1735 | 1829 | 0,9 |
| 1,0 | 0,1924 | 2020 | 2117 | 2215 | 2314 | 2414 | 2515 | 2617 | 2721 | 2826 | 1,0 |
| 1,1 | 0,2933 | 3041 | 3151 | 3263 | 3376 | 3492 | 3609 | 3729 | 3851 | 3976 | 1,1 |
| 1,2 | 0,4103 | 4233 | 4366 | 4502 | 4642 | 4785 | 4932 | 5083 | 5239 | 5400 | 1,2 |
| 1,3 | 0,5566 | 5737 | 5914 | 6098 | 6290 | 6489 | 6696 | 6914 | 7141 | 7380 | 1,3 |
| 1,4 | 0,7633 | 7900 | 8183 | 8485 | 8809 | 9158 | 9537 | 9951 | ·0407 | ·0917 | 1,4 |
| 1,5 | 1,1493 | 2156 | 2938 | 3891 | 5114 | 6820 | 9667 | 3,0989 | — | — | 1,5 |

| $n$ | $n^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-1}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,21 | $3,353\bar{5}$ | 0,2982 | 1,41 | 4,0960 | 0,2441 | 1,61 | 5,0028 | 0,1999 |
| 22 | 3872 | 2952 | 42 | 1371 | 2417 | 62 | 0531 | 1979 |
| 23 | 4212 | 2923 | 43 | 1787 | 2393 | 63 | 1039 | 1959 |
| 1,24 | 3,4556 | 0,2894 | 1,44 | 4,2207 | 0,2369 | 1,64 | 5,1552 | 0,1940 |
| 25 | 4903 | 2865 | 45 | 2631 | 2346 | 65 | 2070 | 1920 |
| 26 | 5254 | 2837 | 46 | 3060 | 2322 | 66 | 2593 | 1901 |
| 1,27 | 3,5609 | 0,2808 | 1,47 | 4,3492 | 0,2299 | 1,67 | 5,3122 | 0,1882 |
| 28 | 5966 | 2780 | 48 | 3923 | 2276 | 68 | $3656$ | 1864 |
| 29 | 6328 | 2753 | 49 | 4371 | 2254 | 69 | $4195$ | 1845 |
| 1,30 | 3,6693 | 0,2725 | 1,50 | 4,4817 | 0,2231 | 1,70 | 5,4739 | 0,1827 |
| 31 | 7062 | 2698 | 51 | 5267 | 2209 | 71 | 5290 | 1809 |
| 32 | 7434 | 2671 | 52 | 5722 | 2187 | 72 | 5845 | 1791 |
| 1,33 | 3,7810 | $0,264\bar{5}$ | 1,53 | 4,6182 | 0,2165 | 1,73 | 5,6407 | 0,1773 |
| 34 | 8190 | 2618 | 54 | 6646 | 2144 | 74 | 6973 | 1755 |
| 35 | 8574 | 2592 | 55 | $711\bar{5}$ | 2122 | 75 | 7546 | 1738 |
| 1,36 | 3,8962 | 0,2567 | 1,56 | 4,7588 | 0,2101 | 1,76 | 5,8124 | 0,1720 |
| 37 | 9354 | 2541 | 57 | 8066 | 2080 | 77 | 8709 | 1703 |
| 38 | 9749 | 2516 | 58 | $855\bar{0}$ | 2060 | 78 | 9299 | 1686 |
| 1,39 | 4,0149 | 0,2491 | 1,59 | 4,9037 | 0,2039 | 1,79 | $5,989\bar{5}$ | 0,1670 |
| 40 | 0552 | 2466 | 60 | 9530 | 2019 | 80 | 6,0496 | 1653 |

| Логарифмы котангенсов | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| φ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | φ° |
| 0,0 | — | 2,000 | 1,6989 | 5227 | 3977 | 3007 | 2213 | 1542 | 0960 | 0446 | 0,0 |
| 0,1 | 0,9985 | 9569 | 9187 | 8836 | 8510 | 8206 | 7922 | 7653 | 7400 | 7160 | 0,1 |
| 0,2 | 0,6931 | 6713 | 6505 | 6305 | 6113 | 5929 | 5751 | 5579 | 5413 | 5252 | 0,2 |
| 0,3 | 0,5096 | 4944 | 4797 | 4653 | 4513 | 4377 | 4243 | 4113 | 3986 | 3861 | 0,3 |
| 0,4 | 0,3739 | 3619 | 3501 | 3385 | 3272 | 3160 | 3050 | 2922 | 2835 | 2730 | 0,4 |
| 0,5 | 0,2626 | 2523 | 2422 | 2322 | 2223 | 2125 | 2028 | 1932 | 1836 | 1742 | 0,5 |
| 0,6 | 0,1649 | 1556 | 1464 | 1372 | 1281 | 1191 | 1101 | 1011 | 0922 | 0834 | 0,6 |
| 0,7 | 0,0745 | 0657 | 0570 | 0482 | 0395 | 0308 | 0221 | 0134 | 0047 | ·9960 | 0,7 |
| 0,8 | 9,9873 | 9786 | 9699 | 9612 | 9525 | 9437 | 9350 | 9262 | 9173 | 9085 | 0,8 |
| 0,9 | 9,8996 | 8906 | 8816 | 8726 | 8635 | 8544 | 8452 | 8359 | 8265 | 8171 | 0,9 |
| 1,0 | 9,8076 | 7980 | 7883 | 7785 | 7686 | 7586 | 7485 | 7383 | 7279 | 7174 | 1,0 |
| 1,1 | 9,7067 | 6959 | 6849 | 6737 | 6624 | 6508 | 6391 | 6271 | 6149 | 6024 | 1,1 |
| 1,2 | 9,5897 | 5767 | 5634 | 5498 | 5358 | 5215 | 5068 | 4917 | 4761 | 4600 | 1,2 |
| 1,3 | 9,4434 | 4263 | 4086 | 3902 | 3710 | 3511 | 3304 | 3086 | 2859 | 2620 | 1,3 |
| 1,4 | 9,2367 | 2100 | 1817 | 1516 | 1191 | 0842 | 0463 | 0049 | ·9593 | ·9083 | 1,4 |
| 1,5 | 8,8507 | 7844 | 7062 | 6109 | 4886 | 3180 | 0333 | 6,9011 | — | — | 1,5 |

| $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ | $n$ | $e^n$ | $e^{-n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,81 | 6,1104 | 0,1637 | 2,01 | 7,4633 | 0,1340 | 2,21 | 9,1157 | 0,1097 |
| 82 | 1719 | 1620 | 02 | 5383 | 1327 | 22 | 2073 | 1086 |
| 83 | 2339 | 1604 | 03 | 6141 | 1313 | 23 | 2999 | 1075 |
| 1,84 | 6,2965 | 0,1588 | 2,04 | 7,6906 | 0,1300 | 2,24 | 9,3933 | $0,106\bar{5}$ |
| 85 | 3598 | 1572 | 05 | 7679 | $128\bar{7}$ | 25 | 4877 | 1054 |
| 86 | 4237 | 1557 | 06 | 8460 | $127\bar{5}$ | 26 | 5831 | 1043 |
| 1,87 | 6,4883 | 0,1541 | 2,07 | 7,9248 | 0,1262 | 2,27 | 9,6794 | 0,1033 |
| 88 | 5535 | 1526 | 08 | $8,004\bar{5}$ | 1249 | 28 | 7767 | 1023 |
| 89 | 6194 | 1511 | 09 | 0849 | 1237 | 29 | 8749 | 1013 |
| 1,90 | 6,6859 | 0,1496 | 2,10 | 8,1662 | $0,122\bar{5}$ | 2,30 | 9,9742 | 0,1003 |
| 91 | 7531 | 1481 | 11 | 2482 | 1212 | 31 | 10,0744 | 0993 |
| 92 | 8210 | 1466 | 12 | 3111 | 1200 | 32 | 1757 | 0983 |
| 1,93 | 6,8895 | 0,1451 | 2,13 | 8,4149 | 0,1188 | 2,33 | 10,2779 | 0,0973 |
| 94 | 9588 | 1437 | 14 | 4994 | $117\bar{7}$ | 34 | 3812 | 0963 |
| 95 | 7,0287 | 1423 | 15 | 5849 | $116\bar{5}$ | 35 | 4856 | 0954 |
| 1,96 | 7,0993 | 0,1409 | 2,16 | 8,6711 | 0,1153 | 2,36 | 10,5910 | 0,0944 |
| 97 | 1707 | $139\bar{5}$ | 17 | 7583 | 1142 | 37 | 6974 | $093\bar{5}$ |
| 98 | 2427 | 1381 | 18 | 8463 | 1130 | 38 | 8049 | 0926 |
| 1,99 | 7,3155 | 0,1367 | 2,19 | 8,9352 | 0,1119 | 2,39 | $10,913\bar{5}$ | 0,0916 |
| 2,00 | 3891 | 1353 | 20 | 9,0250 | 1108 | 40 | 11,0232 | 0907 |

Таблица 18

## Натуральные логарифмы чисел

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 0,0000 | 010 | 020 | 030 | 040 | $0\bar{5}0$ | 060 | 070 | 080 | 090 |
| 01 | 0,0100 | 109 | 119 | 129 | 139 | 149 | 159 | 169 | 178 | 188 |
| 02 | 0,0198 | 208 | 218 | 227 | 237 | 247 | 257 | 266 | 276 | 286 |
| 03 | 0,0296 | 305 | $31\bar{5}$ | $32\bar{5}$ | 334 | 344 | 354 | 363 | 373 | 383 |
| 04 | 0,0392 | 402 | 411 | 421 | 431 | 440 | $4\bar{5}0$ | 459 | 469 | 478 |
| 1,05 | 0,0488 | 497 | 507 | 516 | 526 | 535 | $54\bar{5}$ | 554 | 564 | 573 |
| 06 | 0,0583 | 592 | 602 | 611 | 620 | 630 | 639 | 649 | 658 | 667 |
| 07 | 0,0677 | 686 | 695 | $70\bar{5}$ | 714 | 723 | 733 | 742 | 751 | 760 |
| 08 | 0,0770 | 779 | 788 | 797 | 807 | 816 | 825 | 834 | $84\bar{3}$ | 853 |
| 09 | 0,0862 | 871 | 880 | 889 | 898 | 908 | 917 | 926 | $93\bar{5}$ | 944 |
| 1,10 | 0,0953 | 962 | 971 | 980 | 989 | 998 | ·007 | ·017 | ·026 | ·$03\bar{5}$ |
| 11 | 0,1044 | 053 | 062 | 071 | 080 | 089 | 098 | 106 | 115 | 124 |
| 12 | 0,1133 | 142 | 151 | 160 | 169 | 178 | 187 | 196 | 204 | 213 |
| 13 | 0,1222 | 231 | 240 | 249 | 258 | 266 | 275 | 284 | 293 | 302 |
| 14 | 0,1310 | 319 | 328 | 337 | 345 | 354 | 363 | 371 | 380 | 389 |
| 1,15 | 0,1397 | 406 | 415 | 424 | 432 | 441 | $4\bar{5}0$ | 458 | 467 | 476 |
| 16 | 0,1484 | 493 | 501 | 510 | 519 | 527 | 536 | 544 | 553 | 561 |
| 17 | 0,1570 | 579 | 587 | 596 | 604 | 613 | 621 | 630 | 638 | 647 |
| 18 | 0,1655 | 664 | 672 | 681 | 689 | 697 | 706 | 714 | 723 | 731 |
| 19 | 0,1740 | 748 | 756 | $76\bar{5}$ | 773 | 781 | 790 | 798 | 807 | 815 |
| 1,20 | 0,1823 | 832 | 840 | 848 | 856 | $86\bar{5}$ | 873 | 881 | 890 | 898 |
| 21 | 0,1906 | 914 | 923 | 931 | 939 | 947 | 956 | 964 | 972 | 980 |
| 22 | 0,1989 | 997 | ·005 | ·013 | ·021 | ·029 | ·038 | ·046 | ·054 | ·062 |
| 23 | 0,2070 | 078 | 086 | $09\bar{5}$ | 103 | 111 | 119 | 127 | $13\bar{5}$ | 143 |
| 24 | 0,2151 | 159 | 167 | 175 | 183 | 191 | 199 | 207 | 215 | 223 |
| 1,25 | 0,2231 | 239 | 247 | 255 | 263 | 271 | 279 | 287 | 295 | 303 |
| 26 | 0,2311 | 319 | 327 | $33\bar{5}$ | 343 | 351 | 359 | 367 | 374 | 382 |
| 27 | 0,2390 | 398 | 406 | 414 | 422 | 429 | 437 | 445 | 453 | 461 |
| 28 | 0,2469 | 476 | 484 | 492 | $\bar{5}00$ | 508 | 515 | 523 | 531 | 539 |
| 29 | 0,2546 | 554 | 562 | 570 | 577 | 585 | 593 | 601 | 608 | 616 |
| 1,30 | 0,2624 | 631 | 639 | 647 | 654 | 662 | 670 | 677 | $68\bar{5}$ | 693 |
| 31 | 0,2700 | 708 | 716 | 723 | 731 | 738 | 746 | 754 | 761 | 769 |
| 32 | 0,2776 | 784 | 791 | 799 | 807 | 814 | 822 | 829 | 837 | 844 |
| 33 | 0,2852 | 859 | 867 | 874 | 882 | 889 | 897 | 904 | 912 | 919 |
| 34 | 0,2927 | 934 | 942 | 949 | 957 | 964 | 971 | 979 | 986 | 994 |
| 1,35 | 0,3001 | 008 | 016 | 023 | 031 | 038 | 045 | 053 | 060 | 067 |
| 36 | 0,307$\bar{5}$ | 082 | 090 | 097 | 104 | 112 | 119 | 126 | $13\bar{3}$ | 141 |
| 37 | 0,3148 | 155 | 163 | 170 | 177 | $18\bar{5}$ | 192 | 199 | 206 | 214 |
| 38 | 0,3221 | 228 | 235 | $24\bar{3}$ | $2\bar{5}0$ | 257 | 264 | 271 | 279 | 286 |
| 39 | 0,3293 | 300 | 307 | $31\bar{5}$ | 322 | 329 | 336 | 343 | 350 | 358 |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 10^n$ | 2,3026 | 4,6052 | 6,9078 | 9,2103 | 11,5129 | 13,8155 | 16,1181 |

**Пример.** $\ln 1327 = \ln (1{,}327 \cdot 10^3) = \ln 1{,}327 + \ln 10^3 = 0{,}2839 + 6{,}9078 = 7{,}1907$.

*Продолжение табл. 18*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,40 | 0,3365 | 372 | 379 | 386 | 393 | 400 | 407 | 415 | 422 | 429 |
| 41 | 0,3436 | 443 | 450 | 457 | 464 | 471 | 478 | 485 | 492 | 500 |
| 42 | 0,3507 | 514 | 521 | 528 | 535 | 542 | 549 | 556 | 563 | 570 |
| 43 | 0,3577 | 584 | 591 | 598 | 605 | 612 | 619 | 626 | 633 | 639 |
| 44 | 0,3646 | 653 | 660 | 667 | 674 | 681 | 688 | 695 | 702 | 709 |
| 1,45 | 0,3716 | 723 | 729 | 736 | 743 | 750 | 757 | 764 | 771 | 778 |
| 46 | 0,3784 | 791 | 798 | 805 | 812 | 819 | 825 | 832 | 839 | 846 |
| 47 | 0,3853 | 859 | 866 | 873 | 880 | 887 | 893 | 900 | 907 | 914 |
| 48 | 0,3920 | 927 | 934 | 941 | 947 | 954 | 961 | 968 | 974 | 981 |
| 49 | 0,3988 | 994 | ·001 | ·008 | ·015 | ·021 | ·028 | ·035 | ·041 | ·048 |
| 1,50 | 0,4055 | 061 | 068 | 075 | 081 | 088 | 095 | 101 | 108 | 114 |
| 51 | 0,4121 | 128 | 134 | 141 | 148 | 154 | 161 | 167 | 174 | 181 |
| 52 | 0,4187 | 194 | 200 | 207 | 213 | 220 | 226 | 233 | 240 | 246 |
| 53 | 0,4253 | 259 | 266 | 272 | 279 | 285 | 292 | 298 | 305 | 311 |
| 54 | 0,4318 | 324 | 331 | 337 | 344 | 350 | 357 | 363 | 370 | 376 |
| 1,55 | 0,4383 | 389 | 395 | 402 | 408 | 415 | 421 | 428 | 434 | 440 |
| 56 | 0,4447 | 453 | 460 | 466 | 472 | 479 | 485 | 492 | 498 | 504 |
| 57 | 0,4511 | 517 | 523 | 530 | 536 | 543 | 549 | 555 | 562 | 568 |
| 58 | 0,4574 | 581 | 587 | 593 | 600 | 606 | 612 | 618 | 625 | 631 |
| 59 | 0,4637 | 644 | 650 | 656 | 662 | 669 | 675 | 681 | 688 | 694 |
| 1,60 | 0,4700 | 706 | 713 | 719 | 725 | 731 | 737 | 744 | 750 | 756 |
| 61 | 0,4762 | 769 | 775 | 781 | 787 | 793 | 800 | 806 | 812 | 818 |
| 62 | 0,4824 | 830 | 837 | 843 | 849 | 855 | 861 | 867 | 874 | 880 |
| 63 | 0,4886 | 892 | 898 | 904 | 910 | 916 | 923 | 929 | 935 | 941 |
| 64 | 0,4947 | 953 | 959 | 965 | 971 | 977 | 983 | 990 | 996 | ·002 |
| 1,65 | 0,5008 | 014 | 020 | 026 | 032 | 038 | 044 | 050 | 056 | 062 |
| 66 | 0,5068 | 074 | 080 | 086 | 092 | 098 | 104 | 110 | 116 | 122 |
| 67 | 0,5128 | 134 | 140 | 146 | 152 | 158 | 164 | 170 | 176 | 182 |
| 68 | 0,5188 | 194 | 200 | 206 | 212 | 2218 | 224 | 230 | 235 | 241 |
| 69 | 0,5247 | 253 | 259 | 265 | 271 | 277 | 283 | 289 | 295 | 300 |
| 1,70 | 0,5306 | 312 | 318 | 324 | 330 | 336 | 342 | 347 | 353 | 359 |
| 71 | 0,5365 | 371 | 377 | 382 | 388 | 394 | 400 | 406 | 412 | 417 |
| 72 | 0,5423 | 429 | 435 | 441 | 446 | 452 | 458 | 464 | 470 | 475 |
| 73 | 0,5481 | 487 | 493 | 499 | 504 | 510 | 516 | 522 | 527 | 533 |
| 74 | 0,5539 | 545 | 550 | 556 | 562 | 568 | 573 | 579 | 585 | 590 |
| 1,75 | 0,5596 | 602 | 608 | 613 | 619 | 625 | 630 | 636 | 642 | 647 |
| 76 | 0,5653 | 659 | 664 | 670 | 676 | 682 | 687 | 693 | 698 | 704 |
| 77 | 0,5710 | 715 | 721 | 727 | 732 | 738 | 744 | 749 | 755 | 761 |
| 78 | 0,5766 | 772 | 777 | 783 | 789 | 794 | 800 | 805 | 811 | 817 |
| 79 | 0,5822 | 828 | 833 | 839 | 844 | 850 | 856 | 861 | 867 | 872 |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 10^n$ | 2,3026 | 4,6052 | 6,9078 | 9,2103 | 11,5129 | 13,8155 | 16,1181 |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,80 | 0,5878 | 883 | 889 | 895 | 900 | 906 | 911 | 917 | 922 | 928 |
| 81 | 0,5933 | 939 | 944 | 950 | 955 | 961 | 966 | 972 | 977 | 983 |
| 82 | 0,5988 | 994 | 999 | ·005 | ·010 | ·016 | ·021 | ·027 | ·032 | ·038 |
| 83 | 0,6043 | 049 | 054 | 060 | 065 | 070 | 076 | 081 | 087 | 092 |
| 84 | 0,6098 | 103 | 109 | 114 | 119 | 125 | 130 | 136 | 141 | 146 |
| 1,85 | 0,6152 | 157 | 163 | 168 | 173 | 179 | 184 | 190 | 195 | 200 |
| 86 | 0,6206 | 211 | 217 | 222 | 227 | 233 | 238 | 243 | 249 | 254 |
| 87 | 0,6259 | 265 | 270 | 275 | 281 | 286 | 291 | 297 | 302 | 307 |
| 88 | 0,6313 | 318 | 323 | 329 | 334 | 339 | 345 | 350 | 355 | 360 |
| 89 | 0,6366 | 371 | 376 | 382 | 387 | 392 | 397 | 403 | 408 | 413 |
| 1,90 | 0,6419 | 424 | 429 | 434 | 440 | 445 | 450 | 455 | 461 | 466 |
| 91 | 0,6471 | 476 | 482 | 487 | 492 | 497 | 502 | 508 | 513 | 518 |
| 92 | 0,6523 | 528 | 534 | 539 | 544 | 549 | 554 | 560 | 565 | 570 |
| 93 | 0,6575 | 580 | 586 | 591 | 596 | 601 | 606 | 611 | 617 | 622 |
| 94 | 0,6627 | 632 | 637 | 642 | 647 | 653 | 658 | 663 | 668 | 673 |
| 1,95 | 0,6678 | 683 | 689 | 694 | 699 | 704 | 709 | 714 | 719 | 724 |
| 96 | 0,6729 | 735 | 740 | 745 | 750 | 755 | 760 | 765 | 770 | 775 |
| 97 | 0,6780 | 785 | 790 | 796 | 801 | 806 | 811 | 816 | 821 | 826 |
| 98 | 0,6831 | 836 | 841 | 846 | 851 | 856 | 861 | 866 | 871 | 876 |
| 99 | 0,6881 | 886 | 891 | 896 | 901 | 906 | 911 | 916 | 921 | 926 |
| 2,00 | 0,6931 | 936 | 941 | 946 | 951 | 956 | 961 | 966 | 971 | 976 |
| 01 | 0,6981 | 986 | 992 | 996 | ·001 | ·006 | ·011 | ·016 | ·021 | ·026 |
| 02 | 0,7031 | 036 | 041 | 046 | 051 | 056 | 061 | 066 | 071 | 075 |
| 03 | 0,7080 | 085 | 090 | 095 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 |
| 04 | 0,7129 | 134 | 139 | 144 | 149 | 154 | 159 | 164 | 169 | 174 |
| 2,05 | 0,7178 | 183 | 188 | 193 | 198 | 203 | 208 | 212 | 217 | 222 |
| 06 | 0,7227 | 232 | 237 | 242 | 246 | 251 | 256 | 261 | 266 | 271 |
| 07 | 0,7275 | 280 | 285 | 290 | 295 | 300 | 304 | 309 | 314 | 319 |
| 08 | 0,7324 | 328 | 333 | 338 | 343 | 348 | 352 | 357 | 362 | 367 |
| 09 | 0,7372 | 376 | 381 | 386 | 391 | 396 | 400 | 405 | 410 | 415 |
| 2,10 | 0,7419 | 424 | 429 | 434 | 438 | 443 | 448 | 453 | 457 | 462 |
| 11 | 0,7467 | 472 | 476 | 481 | 486 | 491 | 495 | 500 | 505 | 509 |
| 12 | 0,7514 | 519 | 524 | 528 | 533 | 538 | 542 | 547 | 552 | 557 |
| 13 | 0,7561 | 566 | 571 | 575 | 580 | 585 | 589 | 594 | 599 | 603 |
| 14 | 0,7608 | 613 | 617 | 622 | 627 | 631 | 636 | 641 | 645 | 650 |
| 2,15 | 0,7655 | 659 | 664 | 669 | 673 | 678 | 683 | 687 | 692 | 696 |
| 16 | 0,7701 | 706 | 710 | 715 | 720 | 724 | 729 | 733 | 738 | 743 |
| 17 | 0,7747 | 752 | 756 | 761 | 766 | 770 | 775 | 779 | 784 | 789 |
| 18 | 0,7793 | 798 | 802 | 807 | 812 | 816 | 821 | 825 | 830 | 834 |
| 19 | 0,7839 | 844 | 848 | 853 | 857 | 862 | 866 | 871 | 875 | 880 |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 10^n$ | 2,3026 | 4,6052 | 6,9073 | 9,2103 | 11,5129 | 13,8155 | 16,1181 |

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,20 | 0,788$\bar{5}$ | 889 | 894 | 898 | 903 | 907 | 912 | 916 | 921 | 925 |
| 21 | 0,7930 | 934 | 939 | 943 | 948 | 953 | 957 | 962 | 966 | 971 |
| 22 | 0,7975 | 980 | 984 | 989 | 993 | 998 | ·002 | ·007 | ·011 | ·016 |
| 23 | 0,8020 | 024 | 029 | 033 | 038 | 042 | 047 | 051 | 056 | 060 |
| 24 | 0,806$\bar{5}$ | 069 | 074 | 078 | 083 | 087 | 092 | 096 | 100 | 10$\bar{5}$ |
| 2,25 | 0,8109 | 114 | 118 | 123 | 127 | 132 | 136 | 140 | 14$\bar{5}$ | 149 |
| 26 | 0,8154 | 158 | 162 | 167 | 171 | 176 | 180 | 18$\bar{5}$ | 189 | 193 |
| 27 | 0,8198 | 202 | 207 | 21$\underline{1}$ | 215 | 220 | 224 | 229 | 233 | 237 |
| 28 | 0,8242 | 246 | 251 | 25$\bar{5}$ | 259 | 264 | 268 | 272 | 277 | 281 |
| 29 | 0,8286 | 290 | 294 | 299 | 303 | 307 | 312 | 316 | 320 | 32$\bar{5}$ |
| 3,30 | 0,8329 | 333 | 338 | 342 | 346 | 351 | 355 | 359 | 364 | 368 |
| 31 | 0,8372 | 377 | 381 | 385 | 390 | 394 | 398 | 403 | 407 | 411 |
| 32 | 0,8416 | 420 | 424 | 429 | 433 | 437 | 442 | 446 | 450 | 454 |
| 33 | 0,8459 | 463 | 467 | 472 | 476 | 480 | 484 | 489 | 493 | 497 |
| 34 | 0,8501 | 506 | 510 | 514 | 519 | 523 | 527 | 531 | 536 | 540 |
| 2,35 | 0,8544 | 548 | 553 | 557 | 561 | 565 | 570 | 574 | 578 | 58$\underline{2}$ |
| 36 | 0,8587 | 591 | 595 | 599 | 604 | 608 | 612 | 616 | 620 | 62$\bar{5}$ |
| 37 | 0,8629 | 633 | 637 | 642 | 646 | 65$\bar{0}$ | 654 | 658 | 66$\underline{3}$ | 667 |
| 38 | 0,8671 | 675 | 679 | 684 | 688 | 692 | 696 | 700 | 70$\bar{5}$ | 709 |
| 39 | 0,8713 | 717 | 721 | 725 | 730 | 734 | 738 | 742 | 746 | 751 |
| 2,40 | 0,875$\bar{5}$ | 759 | 76$\underline{3}$ | 767 | 771 | 776 | 780 | 784 | 788 | 792 |
| 41 | 0,8796 | 800 | 80$\bar{5}$ | 809 | 813 | 817 | 821 | 825 | 829 | 83$\underline{4}$ |
| 42 | 0,8838 | 842 | 846 | 850 | 854 | 858 | 862 | 867 | 871 | 87$\bar{5}$ |
| 43 | 0,8879 | 883 | 887 | 891 | 895 | 899 | 90$\underline{4}$ | 908 | 912 | 916 |
| 44 | 0,8920 | 924 | 928 | 932 | 936 | 940 | 94$\bar{5}$ | 949 | 953 | 957 |
| 2,45 | 0,8961 | 96$\bar{5}$ | 969 | 973 | 977 | 981 | 985 | 989 | 993 | 998 |
| 46 | 0,9002 | 006 | 010 | 014 | 018 | 022 | 026 | 030 | 03$\underline{4}$ | 038 |
| 47 | 0,9042 | 046 | 050 | 05$\underline{4}$ | 058 | 062 | 066 | 070 | 07$\bar{5}$ | 079 |
| 48 | 0,9083 | 087 | 091 | 09$\bar{5}$ | 099 | 103 | 107 | 111 | 11$\bar{5}$ | 119 |
| 49 | 0,9123 | 127 | 131 | 13$\bar{5}$ | 139 | 143 | 147 | 151 | 15$\bar{5}$ | 159 |
| 2,50 | 0,9163 | 167 | 171 | 17$\bar{5}$ | 179 | 183 | 187 | 191 | 19$\bar{5}$ | 199 |
| 51 | 0,9203 | 207 | 211 | 21$\bar{5}$ | 219 | 223 | 227 | 231 | 23$\bar{5}$ | 239 |
| 52 | 0,9243 | 247 | 251 | 254 | 258 | 262 | 266 | 270 | 274 | 278 |
| 53 | 0,9282 | 286 | 290 | 294 | 298 | 302 | 306 | 310 | 314 | 318 |
| 54 | 0,9322 | 326 | 330 | 333 | 337 | 341 | 345 | 349 | 353 | 357 |
| 2,55 | 0,9361 | 36$\bar{5}$ | 369 | 373 | 377 | 381 | 384 | 388 | 392 | 396 |
| 56 | 0,9400 | 404 | 408 | 412 | 41$\underline{6}$ | 420 | 423 | 427 | 431 | 435 |
| 57 | 0,9439 | 443 | 447 | 451 | 45$\bar{5}$ | 458 | 462 | 466 | 470 | 474 |
| 58 | 0,9478 | 482 | 486 | 490 | 493 | 497 | 501 | 50$\bar{5}$ | 509 | 513 |
| 59 | 0,9517 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 | 540 | 544 | 547 | 551 |

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 10^n$ | 2,3026 | 4,6052 | 6,9078 | 9,2103 | 11,5129 | 13,8155 | 16,1181 |

## Значения величин для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно

| Числа, кратные $M = 0{,}4343$ | | | | Числа, кратные $1:M = 2{,}3026$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,4343 | 26 | 11,2917 | 1 | 2,3026 | 26 | 59,8672 |
| 2 | 0,8686 | 27 | 11,7260 | 2 | 4,6052 | 27 | 62,1698 |
| 3 | 1,3029 | 28 | 12,1602 | 3 | 6,9078 | 28 | 64,4724 |
| 4 | 1,7372 | 29 | 12,5945 | 4 | 9,2103 | 29 | $66{,}77\overline{5}0$ |
| 5 | $2{,}171\overline{5}$ | 30 | 13,0288 | 5 | 11,5129 | 30 | 69,0776 |
| 6 | 2,6058 | 31 | 13,4631 | 6 | 13,8155 | 31 | 71,3801 |
| 7 | 3,0401 | 32 | 13,8974 | 7 | 16,1181 | 32 | 73,6827 |
| 8 | 3,4744 | 33 | 14,3317 | 8 | 18,4207 | 33 | 75,9853 |
| 9 | 3,9087 | 34 | 14,7660 | 9 | 20,7233 | 34 | 78,2879 |
| 10 | 4,3429 | 35 | 15,2003 | 10 | 23,0259 | 35 | $80{,}590\overline{5}$ |
| 11 | 4,7772 | 36 | 15,6346 | 11 | 25,3284 | 36 | 82,8931 |
| 12 | 5,2115 | 37 | 16,0689 | 12 | 27,6310 | 37 | 85,1956 |
| 13 | 5,6458 | 38 | 16,5032 | 13 | 29,9336 | 38 | 87,4982 |
| 14 | 6,0801 | 39 | $16{,}937\overline{5}$ | 14 | 32,2362 | 39 | 89,8008 |
| 15 | 6,5144 | 40 | 17,3718 | 15 | 34,5388 | 40 | 92,1034 |
| 16 | 6,9487 | 41 | 17,8061 | 16 | 36,8414 | 41 | 94,4060 |
| 17 | 7,3830 | 42 | 18,2404 | 17 | 39,1439 | 42 | 96,7086 |
| 18 | 7,8173 | 43 | 18,6747 | 18 | 41,4465 | 43 | 99,0112 |
| 19 | 8,2516 | 44 | 19,1090 | 19 | 43,7491 | 44 | 101,3137 |
| 20 | 8,6859 | 45 | 19,5433 | 20 | 46,0517 | 45 | 103,6161 |
| 21 | 9,1202 | 46 | 19,9775 | 21 | 48,3543 | 46 | 105,9189 |
| 22 | $9{,}554\overline{5}$ | 47 | 20,4118 | 22 | $55{,}656\overline{9}$ | 47 | $108{,}221\overline{5}$ |
| 23 | 9,9888 | 48 | 20,8461 | 23 | $52{,}959\overline{5}$ | 48 | 110,5241 |
| 24 | 10,4231 | 49 | 21,2804 | 24 | 55,2620 | 49 | 112,8267 |
| 25 | 10,8574 | 50 | 21,7147 | 25 | 57,5646 | 50 | 115,1293 |

Основание десятичных логарифмов равно 10
Основание натуральных логарифмов $e \approx 2{,}7183$
Натуральный логарифм числа 10 равен $1:M = \ln 10 \approx 2{,}3026$
Десятичный логарифм числа e равен $M = \lg e \approx 0{,}4343$
$\ln A = 2{,}3026 \cdot \lg A$ (здесь $A$ — любое число)
$\lg A = 0{,}4343 \cdot \ln A$

Таблица 20

## Натуральные значения тригонометрнческих функций для углов от 0 до 90° через каждые 10′

ctg

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 57,29 | 28,64 | 19,08 | 14,30 | 11,43 | 9,514 | 8,144 | 7,115 | 6,314 | 60 |
| 1 | 3437,7 | 56,35 | 28,40 | 18,98 | 14,24 | 39 | 488 | 125 | 100 | 302 | 59 |
| 2 | 1718,9 | 55,44 | 28,17 | 18,87 | 14,18 | 35 | 461 | 105 | 085 | 290 | 58 |
| 3 | 1145,9 | 54,56 | 27,94 | 18,77 | 14,12 | 11,32 | 9,435 | 8,086 | 7,071 | 6,278 | 57 |
| 4 | 859,4 | 53,71 | 27,71 | 18,67 | 14,07 | 28 | 409 | 067 | 056 | 267 | 56 |
| 5 | 687,5 | 52,88 | 27,49 | 18,56 | 14,01 | 24 | 383 | 048 | 041 | 255 | 55 |
| 6 | 573,0 | 52,08 | 27,27 | 18,46 | 13,95 | 11,20 | 9,357 | 8,028 | 7,026 | 6,243 | 54 |
| 7 | 491,1 | 51,30 | 27,06 | 18,37 | 13,89 | 17 | 332 | 009 | 012 | 232 | 53 |
| 8 | 429,7 | 50,55 | 26,84 | 18,27 | 13,84 | 13 | 306 | 7,991 | 6,997 | 220 | 52 |
| 9 | 382,0 | 49,82 | 26,64 | 18,17 | 13,78 | 11,10 | 9,281 | 7,972 | 6,983 | 6,209 | 51 |
| 10 | 343,8 | 49,10 | 26,43 | 18,07 | 13,73 | 06 | 255 | 953 | 968 | 197 | 50 |
| 11 | 312,5 | 48,41 | 26,23 | 17,98 | 13,67 | 02 | 230 | 934 | 954 | 186 | 49 |
| 12 | 286,5 | 47,74 | 26,03 | 17,89 | 13,62 | 10,99 | 9,205 | 7,916 | 6,940 | 6,174 | 48 |
| 13 | 264,4 | 47,09 | 25,83 | 17,79 | 13,56 | 95 | 180 | 897 | 925 | 163 | 47 |
| 14 | 245,6 | 46,45 | 25,64 | 17,70 | 13,51 | 92 | 156 | 879 | 911 | 152 | 46 |
| 15 | 229,2 | 45,83 | 25,45 | 17,61 | 13,46 | 10,88 | 9,131 | 7,861 | 6,897 | 6,140 | 45 |
| 16 | 214,9 | 45,23 | 25,26 | 17,52 | 13,40 | 85 | 106 | 842 | 883 | 129 | 44 |
| 17 | 202,2 | 44,64 | 25,08 | 17,43 | 13,35 | 81 | 082 | 824 | 869 | 188 | 43 |
| 18 | 191,0 | 44,07 | 24,90 | 17,34 | 13,30 | 10,78 | 9,058 | 7,806 | 6,855 | 6,107 | 42 |
| 19 | 180,9 | 43,51 | 24,72 | 17,26 | 13,25 | 75 | 034 | 788 | 841 | 096 | 41 |
| 20 | 171,9 | 42,96 | 24,54 | 17,17 | 13,20 | 71 | 010 | 770 | 827 | 084 | 40 |
| 21 | 163,7 | 42,43 | 24,37 | 17,08 | 13,15 | 10,68 | 8,986 | 7,753 | 6,813 | 6,073 | 39 |
| 22 | 156,3 | 41,92 | 24,20 | 17,00 | 13,10 | 64 | 962 | 735 | 799 | 062 | 38 |
| 23 | 149,5 | 41,41 | 24,03 | 16,92 | 13,05 | 61 | 939 | 717 | 786 | 051 | 37 |
| 24 | 143,2 | 40,92 | 23,86 | 16,83 | 13,00 | 10,58 | 8,915 | 7,700 | 6,772 | 6,041 | 36 |
| 25 | 137,5 | 40,44 | 23,69 | 16,75 | 12,95 | 55 | 892 | 682 | 758 | 030 | 35 |
| 26 | 132,2 | 39,97 | 23,53 | 16,67 | 12,90 | 51 | 869 | 665 | 745 | 019 | 34 |
| 27 | 127,3 | 39,51 | 23,37 | 16,59 | 12,85 | 10,48 | 8,846 | 7,647 | 6,731 | 6,008 | 33 |
| 28 | 122,8 | 39,06 | 23,21 | 16,51 | 12,80 | 45 | 823 | 630 | 718 | 5,997 | 32 |
| 29 | 118,5 | 38,62 | 23,06 | 16,43 | 12,75 | 42 | 800 | 613 | 704 | 986 | 31 |
| 30 | 114,6 | 38,19 | 22,90 | 16,35 | 12,71 | 10,39 | 8,777 | 7,596 | 6,691 | 5,976 | 30 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | 83° | 82° | 81° | 80° | ′ |

tg

cosec

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 57,30 | 28,65 | 19,11 | 14,34 | 11,47 | 9,567 | 8,206 | 7,185 | 6,392 | 60 |
| 1 | 3437,7 | 56,36 | 28,42 | 19,00 | 14,28 | 44 | 540 | 186 | 170 | 381 | 59 |
| 2 | 1718,9 | 55,45 | 28,18 | 18,90 | 14,22 | 40 | 514 | 167 | 156 | 369 | 58 |
| 3 | 1145,9 | 54,57 | 27,96 | 18,79 | 14,16 | 11,36 | 9,488 | 8,148 | 7,141 | 6,357 | 57 |
| 4 | 859,4 | 53,72 | 27,73 | 18,69 | 14,10 | 32 | 462 | 128 | 126 | 346 | 56 |
| 5 | 687,5 | 52,89 | 27,51 | 18,59 | 14,04 | 29 | 436 | 109 | 112 | 334 | 55 |
| 6 | 573,0 | 52,09 | 27,29 | 18,49 | 13,99 | 11,25 | 9,411 | 8,091 | 7,097 | 6,323 | 54 |
| 7 | 491,1 | 51,31 | 27,08 | 18,39 | 13,93 | 21 | 385 | 072 | 083 | 311 | 53 |
| 8 | 429,7 | 50,56 | 26,80 | 18,30 | 13,87 | 18 | 360 | 053 | 068 | 300 | 52 |
| 9 | 382,0 | 49,83 | 26,66 | 18,20 | 13,82 | 11,14 | 9,334 | 8,034 | 7,054 | 6,289 | 51 |
| 10 | 343,8 | 49,11 | 26,45 | 18,10 | 13,76 | 10 | 309 | 016 | 040 | 277 | 50 |
| 11 | 312,5 | 48,42 | 26,25 | 18,01 | 13,71 | 07 | 284 | 7,997 | 025 | 266 | 49 |
| 12 | 286,5 | 47,75 | 26,05 | 17,91 | 13,65 | 11,03 | 9,259 | 7,979 | 7,011 | 6,255 | 48 |
| 13 | 264,4 | 47,10 | 25,85 | 17,82 | 13,60 | 00 | 235 | 960 | 6,997 | 243 | 47 |
| 14 | 245,6 | 46,46 | 25,66 | 17,73 | 13,55 | 10,96 | 210 | 942 | 983 | 232 | 46 |
| 15 | 229,2 | 45,84 | 25,47 | 17,64 | 13,49 | 10,93 | 9,186 | 7,924 | 6,969 | 6,221 | 45 |
| 16 | 214,9 | 45,24 | 25,28 | 17,55 | 13,44 | 89 | 161 | 906 | 955 | 210 | 44 |
| 17 | 202,2 | 44,65 | 25,10 | 17,46 | 13,39 | 86 | 137 | 888 | 941 | 199 | 43 |
| 18 | 191,0 | 44,08 | 24,92 | 17,37 | 13,34 | 10,83 | 9,113 | 7,870 | 6,927 | 6,188 | 42 |
| 19 | 180,9 | 43,52 | 24,74 | 17,28 | 13,29 | 79 | 089 | 852 | 914 | 177 | 41 |
| 20 | 171,9 | 42,98 | 24,56 | 17,20 | 13,23 | 76 | 065 | 834 | 900 | 166 | 40 |
| 21 | 163,7 | 42,45 | 24,39 | 17,11 | 13,18 | 10,73 | 9,041 | 7,817 | 6,886 | 6,155 | 39 |
| 22 | 156,3 | 41,93 | 24,22 | 17,03 | 13,13 | 69 | 018 | 799 | 872 | 144 | 38 |
| 23 | 149,5 | 41,42 | 24,05 | 16,94 | 13,08 | 66 | 8,994 | 782 | 859 | 134 | 37 |
| 24 | 143,2 | 40,93 | 23,88 | 16,86 | 13,03 | 10,63 | 8,971 | 7,764 | 6,845 | 6,123 | 36 |
| 25 | 137,5 | 40,45 | 23,72 | 16,78 | 12,99 | 59 | 948 | 747 | 832 | 112 | 35 |
| 26 | 132,2 | 39,98 | 23,55 | 16,70 | 12,94 | 56 | 925 | 730 | 819 | 101 | 34 |
| 27 | 127,3 | 39,52 | 23,39 | 16,62 | 12,89 | 10,53 | 8,902 | 7,712 | 6,805 | 6,091 | 33 |
| 28 | 122,8 | 39,07 | 23,24 | 16,54 | 12,84 | 50 | 879 | 695 | 792 | 080 | 32 |
| 29 | 118,5 | 38,63 | 23,08 | 16,46 | 12,79 | 47 | 856 | 678 | 779 | 069 | 31 |
| 30 | 114,6 | 38,20 | 22,93 | 16,38 | 12,75 | 10,43 | 8,834 | 7,661 | 6,765 | 6,059 | 30 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | 83° | 82° | 81° | 80° | ′ |

ces

ctg

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 114,59 | 38,19 | 22,90 | 16,35 | 12,71 | 10,385 | 8,777 | 7,596 | 6,691 | 5,976 | 30 |
| 31 | 110,89 | 37,77 | 22,75 | 16,27 | 12,66 | 354 | 754 | 579 | 678 | 965 | 29 |
| 32 | 107,43 | 37,36 | 22,60 | 16,20 | 12,61 | 322 | 732 | 562 | 665 | 954 | 28 |
| 33 | 104,17 | 36,96 | 22,45 | 16,12 | 12,57 | 10,291 | 8,709 | 7,545 | 6,651 | 5,944 | 27 |
| 34 | 101,11 | 36,56 | 22,31 | 16,04 | 12,52 | 260 | 687 | 528 | 638 | 933 | 26 |
| 35 | 98,22 | 36,18 | 22,16 | 15,97 | 12,47 | 229 | 665 | 511 | 625 | 923 | 25 |
| 36 | 95,49 | 35,80 | 22,02 | 15,89 | 12,43 | 10,199 | 8,643 | 7,495 | 6,612 | 5,912 | 24 |
| 37 | 92,91 | 35,43 | 21,88 | 15,82 | 12,38 | 168 | 621 | 478 | 599 | 902 | 23 |
| 38 | 90,46 | 35,07 | 21,74 | 15,75 | 12,34 | 138 | 599 | 462 | 586 | 892 | 22 |
| 39 | 88,14 | 34,72 | 21,61 | 15,68 | 12,29 | 10,108 | 8,577 | 7,445 | 6,573 | 5,881 | 21 |
| 40 | 85,94 | 34,37 | 21,47 | 15,60 | 12,25 | 078 | 556 | 429 | 561 | 871 | 20 |
| 41 | 83,84 | 34,03 | 21,34 | 15,53 | 12,21 | 048 | 534 | 412 | 548 | 861 | 19 |
| 42 | 81,85 | 33,69 | 21,20 | 15,46 | 12,16 | 10,019 | 8,513 | 7,396 | 6,535 | 5,850 | 18 |
| 43 | 79,94 | 33,37 | 21,07 | 15,39 | 12,12 | 9,989 | 491 | 380 | 522 | 840 | 17 |
| 44 | 78,13 | 33,05 | 20,95 | 15,33 | 12,08 | 960 | 470 | 364 | 510 | 830 | 16 |
| 45 | 76,39 | 32,73 | 20,82 | 15,26 | 12,03 | 9,931 | 8,449 | 7,348 | 6,497 | 5,820 | 15 |
| 46 | 74,73 | 32,42 | 20,69 | 15,19 | 11,99 | 902 | 428 | 332 | 485 | 810 | 14 |
| 47 | 73,14 | 32,12 | 20,57 | 15,12 | 11,95 | 873 | 407 | 316 | 472 | 799 | 13 |
| 48 | 71,62 | 31,82 | 20,45 | 15,06 | 11,91 | 9,845 | 8,386 | 7,300 | 6,460 | 5,789 | 12 |
| 49 | 70,15 | 31,53 | 20,33 | 14,99 | 11,87 | 816 | 366 | 284 | 447 | 779 | 11 |
| 50 | 68,75 | 31,24 | 20,21 | 14,92 | 11,83 | 788 | 345 | 269 | 435 | 769 | 10 |
| 51 | 67,40 | 30,96 | 20,09 | 14,86 | 11,79 | 9,760 | 8,324 | 7,253 | 6,423 | 5,759 | 9 |
| 52 | 66,11 | 30,68 | 19,97 | 14,80 | 11,74 | 732 | 304 | 238 | 410 | 749 | 8 |
| 53 | 64,86 | 30,41 | 19,85 | 14,73 | 11,70 | 704 | 284 | 222 | 398 | 740 | 7 |
| 54 | 63,66 | 30,14 | 19,74 | 14,67 | 11,66 | 9,677 | 8,264 | 7,207 | 6,386 | 5,730 | 6 |
| 55 | 62,50 | 29,88 | 19,63 | 14,61 | 11,62 | 649 | 243 | 191 | 374 | 720 | 5 |
| 56 | 61,38 | 29,62 | 19,52 | 14,54 | 11,59 | 622 | 223 | 176 | 362 | 710 | 4 |
| 57 | 60,31 | 29,37 | 19,41 | 14,48 | 11,55 | 9,595 | 8,204 | 7,161 | 6,350 | 5,700 | 3 |
| 58 | 59,27 | 29,12 | 19,30 | 14,42 | 11,51 | 568 | 184 | 146 | 338 | 691 | 2 |
| 59 | 58,26 | 28,88 | 19,19 | 14,36 | 11,47 | 541 | 164 | 130 | 326 | 681 | 1 |
| 60 | 57,29 | 28,64 | 19,08 | 14,30 | 11,43 | 9,514 | 8,144 | 7,115 | 6,314 | 5,671 | 0 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | 83° | 82° | 81° | 80° | ′ |

tg

cosec

| ′ | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° | ′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 114,62 | 38,20 | 22,93 | 16,38 | 12,75 | 10,433 | 8,834 | 7,661 | 6,765 | 6,059 | 30 |
| 31 | 110,94 | 37,78 | 22,77 | 16,30 | 12,70 | 402 | 811 | 644 | 752 | 048 | 29 |
| 32 | 107,45 | 37,37 | 22,62 | 16,23 | 12,65 | 371 | 789 | 628 | 739 | 038 | 28 |
| 33 | 104,23 | 36,97 | 22,48 | 16,15 | 12,61 | 10,340 | 8,767 | 7,611 | 6,726 | 6,027 | 27 |
| 34 | 101,11 | 36,58 | 22,33 | 16,07 | 12,56 | 309 | 744 | 594 | 713 | 017 | 26 |
| 35 | 98,22 | 36,19 | 22,19 | 16,00 | 12,51 | 278 | 722 | 578 | 700 | 007 | 25 |
| 36 | 95,49 | 35,81 | 22,04 | 15,93 | 12,47 | 10,248 | 8,700 | 7,561 | 6,687 | 5,996 | 24 |
| 37 | 92,91 | 35,45 | 21,90 | 15,85 | 12,42 | 217 | 679 | 545 | 675 | 986 | 23 |
| 38 | 90,47 | 35,08 | 21,77 | 15,78 | 12,38 | 187 | 657 | 528 | 662 | 976 | 22 |
| 39 | 88,15 | 34,73 | 21,63 | 15,71 | 12,34 | 10,157 | 8,635 | 7,512 | 6,649 | 5,966 | 21 |
| 40 | 85,95 | 34,38 | 21,49 | 15,64 | 12,29 | 128 | 614 | 496 | 636 | 955 | 20 |
| 41 | 82,85 | 34,04 | 21,36 | 15,57 | 12,25 | 098 | 592 | 480 | 624 | 945 | 19 |
| 42 | 81,85 | 33,71 | 21,23 | 15,50 | 12,20 | 10,068 | 8,571 | 7,463 | 6,611 | 5,935 | 18 |
| 43 | 79,95 | 33,38 | 21,10 | 15,43 | 12,16 | 039 | 550 | 447 | 599 | 925 | 17 |
| 44 | 78,13 | 33,06 | 20,97 | 15,36 | 12,12 | 010 | 529 | 431 | 586 | 915 | 16 |
| 45 | 76,40 | 32,75 | 20,84 | 15,29 | 12,08 | 9,981 | 8,508 | 7,416 | 6,574 | 5,905 | 15 |
| 46 | 74,74 | 32,44 | 20,72 | 15,22 | 12,03 | 952 | 487 | 400 | 561 | 895 | 14 |
| 47 | 73,15 | 32,13 | 20,59 | 15,16 | 11,99 | 924 | 466 | 384 | 549 | 885 | 13 |
| 48 | 71,62 | 31,84 | 20,47 | 15,09 | 11,95 | 9,895 | 8,446 | 7,368 | 6,537 | 5,875 | 12 |
| 49 | 70,16 | 31,54 | 20,35 | 15,02 | 11,91 | 867 | 425 | 353 | 524 | 865 | 11 |
| 50 | 68,76 | 31,26 | 20,23 | 14,96 | 11,87 | 839 | 405 | 337 | 512 | 855 | 10 |
| 51 | 67,41 | 30,98 | 20,11 | 14,89 | 11,83 | 9,811 | 8,384 | 7,322 | 6,500 | 5,846 | 9 |
| 52 | 66,11 | 30,70 | 20,00 | 14,83 | 11,79 | 783 | 364 | 306 | 488 | 836 | 8 |
| 53 | 64,87 | 30,43 | 19,88 | 14,77 | 11,75 | 756 | 344 | 291 | 476 | 826 | 7 |
| 54 | 63,66 | 30,16 | 19,77 | 14,70 | 11,71 | 9,728 | 8,324 | 7,276 | 6,464 | 5,816 | 6 |
| 55 | 62,51 | 29,90 | 19,65 | 14,64 | 11,67 | 701 | 304 | 260 | 452 | 807 | 5 |
| 56 | 61,39 | 29,64 | 19,54 | 14,58 | 11,63 | 674 | 284 | 245 | 440 | 797 | 4 |
| 57 | 60,31 | 29,39 | 19,43 | 14,52 | 11,59 | 9,647 | 8,264 | 7,230 | 6,428 | 5,787 | 3 |
| 58 | 59,27 | 29,14 | 19,32 | 14,46 | 11,55 | 620 | 245 | 215 | 416 | 778 | 2 |
| 59 | 58,27 | 28,89 | 19,21 | 14,40 | 11,51 | 593 | 225 | 200 | 404 | 768 | 1 |
| 60 | 57,30 | 28,65 | 19,11 | 14,34 | 11,47 | 9,567 | 8,206 | 7,185 | 6,392 | 5,759 | 0 |
| ′ | 89° | 88° | 87° | 86° | 85° | 84° | 83° | 82° | 81° | 80° | ′ |

sec

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°00′ | 0,000000 | ∞ | 0,000000 | ∞ | 1,0000 | 1,0000 | 90°00′ |
| 10 | 2909 | 343,78 | 2909 | 343,77 | 0000 | 0000 | 50 |
| 20 | 5818 | 171,89 | 5818 | 171,89 | 0000 | 0000 | 40 |
| 0°30′ | 0,008727 | 114,59 | 0,008727 | 114,59 | 1,0000 | 1,0000 | 89°30′ |
| 40 | 01164 | 85,95̄ | 01164 | 85,94 | 0001 | 0,9999 | 20 |
| 50 | 1454 | 68,76 | 1455̄ | 68,75 | 0001 | 9999 | 10 |
| 1°00′ | 0,01745 | 57,30 | 0,01746 | 57,29 | 1,0002 | 0,9998 | 89°00′ |
| 10 | 2036 | 49,11 | 2036 | 49,10 | 0002 | 9998 | 50 |
| 20 | 2327 | 42,98 | 2328 | 42,96 | 0003 | 9997 | 40 |
| 1°30′ | 0,02618 | 38,20 | 0,02619 | 38,19 | 1,0003 | 0,9997 | 88°30′ |
| 40 | 2908 | 34,38 | 2910 | 34,37 | 0004 | 9996 | 20 |
| 50 | 3199 | 31,26 | 3201 | 31,24 | 0005 | 9995̄ | 10 |
| 2°00′ | 0,03490 | 28,65 | 0,03492 | 28,64 | 1,0006 | 0,9994 | 88°00′ |
| 10 | 3781 | 26,45 | 3783 | 26,43 | 0007 | 9993 | 50 |
| 20 | 4071 | 24,56 | 4075̄ | 24,54 | 0008 | 9992 | 40 |
| 2°30′ | 0,04362 | 22,93 | 0,04366 | 22,90 | 1,0010 | 0,9990 | 87°30′ |
| 40 | 4653 | 21,49 | 4658 | 21,47 | 0011 | 9989 | 20 |
| 50 | 4943 | 20,23 | 4949 | 20,21 | 0012 | 9988 | 10 |
| 3°00′ | 0,05234 | 19,11 | 0,05241 | 19,08 | 1,0014 | 0,9986 | 87°00′ |
| 10 | 5524 | 18,10 | 5533 | 18,07 | 0015 | 9985̄ | 50 |
| 20 | 5814 | 17,20 | 5824 | 17,17 | 0017 | 9983 | 40 |
| 3°30′ | 0,06105 | 16,38 | 0,06116 | 16,35̄ | 1,0019 | 0,9981 | 86°30′ |
| 40 | 6395 | 15,64 | 6408 | 15,60 | 0021 | 9980 | 20 |
| 50 | 6685 | 14,96 | 6700 | 14,92 | 0022 | 9978 | 10 |
| 4°00′ | 0,06976 | 14,34 | 0,06993 | 14,30 | 1,0024 | 0,9976 | 86°00′ |
| 10 | 7266 | 13,76 | 7285 | 13,73 | 0027 | 9974 | 50 |
| 20 | 7556 | 13,23 | 7578 | 13,20 | 0029 | 9971 | 40 |
| 4°30′ | 0,07846 | 12,75̄ | 0,07870 | 12,71 | 1,0031 | 0,9969 | 85°30′ |
| 40 | 8136 | 12,29 | 8163 | 12,25 | 0033 | 9967 | 20 |
| 50 | 8426 | 11,87 | 8456 | 11,83 | 0036 | 9964 | 10 |
| 5°00′ | 0,08716 | 11,47 | 0,08749 | 11,43 | 1,0038 | 0,9962 | 85°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5°00′ | 0,08716 | 11,474 | 0,08749 | 11,430 | 1,0038 | 0,9962 | 85°00′ |
| 10 | 9005 | 11,105̄ | 9042 | 11,059 | 0041 | 9959 | 50 |
| 20 | 9295̄ | 10,758 | 9335 | 10,712 | 0043 | 9957 | 40 |
| 5°30′ | 0,09585̄ | 10,433 | 0,09629 | 10,385 | 1,0046 | 0,9954 | 84°30′ |
| 40 | 9874 | 10,128 | 9923 | 10,078 | 0049 | 9951 | 20 |
| 50 | 0,1016 | 9,839 | 0,1022 | 9,788 | 0052 | 9948 | 10 |
| 6°00′ | 0,1045 | 9,567 | 0,1051 | 9,514 | 1,0055 | 0,9945 | 84°00′ |
| 10 | 1074 | 9,309 | 1080 | 9,255 | 0058 | 9942 | 50 |
| 20 | 1103 | 9,065 | 1110 | 9,010 | 0061 | 9939 | 40 |
| 6°30′ | 0,1132 | 8,834 | 0,1139 | 8,777 | 1,0065̄ | 0,9936 | 83°30′ |
| 40 | 1161 | 8,614 | 1169 | 8,556 | 0068 | 9932 | 20 |
| 50 | 1190 | 8,405̄ | 1198 | 8,345̄ | 0072 | 9929 | 10 |
| 7°00′ | 0,1219 | 8,206 | 0,1228 | 8,144 | 1,0075 | 0,9925 | 83°00′ |
| 10 | 1248 | 8,016 | 1257 | 7,953 | 0079 | 9922 | 50 |
| 20 | 1276 | 7,834 | 1287 | 7,770 | 0082 | 9918 | 40 |
| 7°30′ | 0,1305 | 7,661 | 0,1317 | 7,596 | 1,0086 | 0,9914 | 82°30′ |
| 40 | 1334 | 7,496 | 1346 | 7,429 | 0090 | 9911 | 20 |
| 50 | 1363 | 7,337 | 1376 | 7,269 | 0094 | 9907 | 10 |
| 8°00′ | 0,1392 | 7,185 | 0,1405 | 7,115 | 1,0098 | 0,9903 | 82°00′ |
| 10 | 1422 | 7,040 | 1435 | 6,968 | 0102 | 9899 | 50 |
| 20 | 1449 | 6,900 | 1465̄ | 6,827 | 0107 | 9894 | 40 |
| 8°30′ | 0,1478 | 6,765 | 0,1495̄ | 6,691 | 1,0111 | 0,9890 | 81°30′ |
| 40 | 1507 | 6,636 | 1524 | 6,561 | 0116 | 9886 | 20 |
| 50 | 1536 | 6,512 | 1554 | 6,435̄ | 0120 | 9881 | 10 |
| 9°00′ | 0,1564 | 6,392 | 0,1584 | 6,314 | 1,0125̄ | 0,9877 | 81°00′ |
| 10 | 1593 | 6,277 | 1614 | 6,197 | 0129 | 9872 | 50 |
| 20 | 1622 | 6,166 | 1644 | 6,084 | 0134 | 9868 | 40 |
| 9°30′ | 0,1650 | 6,059 | 0,1673 | 5,976 | 1,0139 | 0,9863 | 80°30′ |
| 40 | 1679 | 5,955 | 1703 | 5,871 | 0144 | 9858 | 20 |
| 50 | 1708 | 5,855 | 1733 | 5,769 | 0149 | 9853 | 10 |
| 10°00′ | 0,1736 | 5,759 | 0,1763 | 5,671 | 1,0154 | 0,9848 | 80°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10°00′ | 0,1736 | 5,759 | 0,1763 | 5,671 | 1,0154 | 0,9848 | 80°00′ |
| 10 | 1765 | 665 | 1793 | 576 | 0160 | 9843 | 50 |
| 20 | 1794 | 575 | 1823 | 485 | 0165 | 9838 | 40 |
| 10°30′ | 0,1822 | 5,487 | 0,1853 | 5,396 | 1,0170 | 0,9833 | 79°30′ |
| 40 | 1851 | 403 | 1883 | 309 | 0176 | 9827 | 20 |
| 50 | 1880 | 320 | 1914 | 226 | 0181 | 9822 | 10 |
| 11°00′ | 0,1908 | 5,241 | 0,1944 | 5,145 | 1,0187 | 0,9816 | 79°00′ |
| 10 | 1937 | 164 | 1974 | 066 | 0193 | 9811 | 50 |
| 20 | 1965 | 089 | 2004 | 4,989 | 0199 | 9805 | 40 |
| 11°30′ | 0,1994 | 5,016 | 0,2035 | 4,915 | 1,0205 | 0,9799 | 78°30′ |
| 40 | 2022 | 4,945 | 2065 | 843 | 0211 | 9793 | 20 |
| 50 | 2051 | 876 | 2095 | 773 | 0217 | 9787 | 10 |
| 12°00′ | 0,2079 | 4,810 | 0,2126 | 4,705 | 1,0223 | 0,9781 | 78°00′ |
| 10 | 2108 | 745 | 2156 | 638 | 0230 | 9775 | 50 |
| 20 | 2136 | 682 | 2186 | 574 | 0236 | 9769 | 40 |
| 12°30′ | 0,2164 | 4,620 | 0,2217 | 4,511 | 1,0243 | 9763 | 77°30′ |
| 40 | 2193 | 560 | 2247 | 449 | 0249 | 9757 | 20 |
| 50 | 2221 | 502 | 2278 | 390 | 0256 | 9750 | 10 |
| 13°00′ | 0,2250 | 4,445 | 0,2309 | 4,331 | 1,0263 | 0,9744 | 77°00′ |
| 10 | 2278 | 390 | 2339 | 275 | 0270 | 9737 | 50 |
| 20 | 2306 | 336 | 2370 | 219 | 0277 | 9730 | 40 |
| 13°30′ | 0,2334 | 4,284 | 0,2401 | 4,165 | 1,0284 | 0,9724 | 76°30° |
| 40 | 2363 | 232 | 2432 | 113 | 0291 | 9717 | 20 |
| 50 | 2391 | 182 | 2462 | 061 | 0299 | 9710 | 10 |
| 14°00′ | 0,2419 | 4,134 | 0,2493 | 4,011 | 1,0306 | 0,9703 | 76°00′ |
| 10 | 2447 | 086 | 2524 | 3,962 | 0314 | 9696 | 50 |
| 20 | 2476 | 039 | 2555 | 914 | 0321 | 9689 | 40 |
| 14°30′ | 0,2504 | 3,994 | 0,2586 | 3,867 | 1,0329 | 0,9681 | 75°30′ |
| 40 | 2532 | 950 | 2617 | 821 | 0337 | 9674 | 20 |
| 50 | 2560 | 906 | 2648 | 776 | 0345 | 9667 | 10 |
| 15°00′ | 0,2588 | 3,864 | 0,2679 | 3,732 | 1,0353 | 0,9659 | 75′00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15°00′ | 0,2588 | 3,864 | 0,2679 | 3,732 | 1,0353 | 0,9659 | 75°00′ |
| 10 | 2616 | 822 | 2711 | 689 | 0361 | 9652 | 50 |
| 20 | 2644 | 782 | 2742 | 647 | 0369 | 9644 | 40 |
| 15°30′ | 0,2672 | 3,742 | 0,2773 | 3,606 | 1,0377 | 0,9636 | 74°30′ |
| 40 | 2700 | 703 | 2805 | 566 | 0386 | 9628 | 20 |
| 50 | 2728 | 665 | 2836 | 526 | 0394 | 9621 | 10 |
| 16°00′ | 0,2756 | 3,628 | 0,2867 | 3,487 | 1,0403 | 0,9613 | 74°00′ |
| 10 | 2784 | 592 | 2899 | 450 | 0412 | 9605 | 50 |
| 20 | 2812 | 556 | 2931 | 412 | 0421 | 9596 | 40 |
| 16°30′ | 0,2840 | 3,521 | 0,2962 | 3,376 | 1,0429 | 0,9588 | 73°30′ |
| 40 | 2868 | 487 | 2994 | 340 | 0439 | 9580 | 20 |
| 50 | 2896 | 453 | 3026 | 305 | 0448 | 9572 | 10 |
| 17°00′ | 0,2924 | 3,420 | 0,3057 | 3,271 | 1,0457 | 0,9563 | 73°00′ |
| 10 | 2952 | 388 | 3089 | 237 | 0466 | 9555 | 50 |
| 20 | 2979 | 356 | 3121 | 204 | 0476 | 9546 | 40 |
| 17°30′ | 0,3007 | 3,326 | 0,3153 | 3,172 | 1,0485 | 0,9537 | 72°30′ |
| 40 | 3035 | 295 | 3185 | 140 | 0495 | 9528 | 20 |
| 50 | 3062 | 265 | 3217 | 108 | 0505 | 9520 | 10 |
| 18°00′ | 0,3090 | 3,236 | 0,3249 | 3,078 | 1,0515 | 0,9511 | 72°00′ |
| 10 | 3118 | 207 | 3281 | 047 | 0525 | 9502 | 50 |
| 20 | 3145 | 179 | 3314 | 018 | 0535 | 9492 | 40 |
| 18°30′ | 0,3173 | 3,152 | 0,3346 | 2,989 | 1,0545 | 0,9483 | 71°30′ |
| 40 | 3201 | 124 | 3378 | 960 | 0555 | 9474 | 20 |
| 50 | 3228 | 098 | 3411 | 932 | 0566 | 9465 | 10 |
| 19°00′ | 0,3256 | 3,072 | 0,3443 | 2,904 | 1,0576 | 0,9455 | 71°00′ |
| 10 | 3283 | 046 | 3476 | 877 | 0587 | 9446 | 50 |
| 20 | 3311 | 021 | 3508 | 850 | 0598 | 9436 | 40 |
| 19°30′ | 0,3338 | 2,996 | 0,3541 | 2,824 | 1,0608 | 0,9426 | 70°30′ |
| 40 | 3365 | 971 | 3574 | 798 | 0619 | 9417 | 20 |
| 50 | 3393 | 947 | 3607 | 773 | 0631 | 9407 | 10 |
| 20°00′ | 0,3420 | 2,924 | 0,3640 | 2,747 | 1,0642 | 0,9397 | 70°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20°00′ | 0,3420 | 2,924 | 0,3640 | 2,747 | 1,0642 | 0,9397 | 70°00′ |
| 10 | 3448 | 901 | 3673 | 723 | 0653 | 9387 | 50 |
| 20 | 3475 | 878 | 3706 | 699 | 0665 | 9377 | 40 |
| 20°30′ | 0,3502 | 2,855 | 0,3739 | 2,675 | 1,0676 | 0,9367 | 60°30′ |
| 40 | 3529 | 833 | 3772 | 651 | 0688 | 9356 | 20 |
| 50 | 3557 | 812 | 3805 | 628 | 0700 | 9346 | 10 |
| 21°00′ | 0,3584 | 2,790 | 0,3839 | 2,605 | 1,0711 | 0,9336 | 69°00′ |
| 10 | 3611 | 769 | 3872 | 583 | 0723 | 9325 | 50 |
| 20 | 3638 | 749 | 3906 | 560 | 0736 | 9315 | 40 |
| 21°30′ | 0,3665 | 2,729 | 0,3939 | 2,539 | 1,0748 | 0,9304 | 68°30′ |
| 40 | 3692 | 709 | 3973 | 517 | 0760 | 9293 | 20 |
| 50 | 3719 | 689 | 4006 | 496 | 0773 | 9283 | 10 |
| 22°00′ | 0,3746 | 2,669 | 0,4040 | 2,475 | 1,0785 | 0,9272 | 68°00′ |
| 10 | 3773 | 650 | 4074 | 455 | 0798 | 9261 | 50 |
| 20 | 3800 | 632 | 4108 | 434 | 0811 | 9250 | 40 |
| 22°30′ | 0,3827 | 2,613 | 0,4142 | 2,414 | 1,0824 | 0,9239 | 67°30′ |
| 40 | 3854 | 595 | 4176 | 394 | 0837 | 9228 | 20 |
| 50 | 3881 | 577 | 4210 | 375 | 0850 | 9216 | 10 |
| 23°00′ | 0,3907 | 2,559 | 0,4245 | 2,356 | 1,0864 | 0,9205 | 67°00′ |
| 10 | 3934 | 542 | 4279 | 337 | 0877 | 9194 | 50 |
| 20 | 3961 | 525 | 4314 | 318 | 0891 | 9182 | 40 |
| 23°30′ | 0,3987 | 2,508 | 0,4348 | 2,300 | 1,0904 | 0,9171 | 66°30′ |
| 40 | 4014 | 491 | 4383 | 282 | 0918 | 9159 | 20 |
| 50 | 4041 | 475 | 4417 | 264 | 0932 | 9147 | 10 |
| 24°00′ | 0,4067 | 2,459 | 0,4452 | 2,246 | 1,0946 | 0,9135 | 66°00′ |
| 10 | 4094 | 443 | 4487 | 229 | 0961 | 9124 | 50 |
| 20 | 4120 | 427 | 4522 | 211 | 0975 | 9112 | 40 |
| 24°30′ | 0,4147 | 2,411 | 0,4557 | 2,194 | 1,0989 | 0,9100 | 65°30′ |
| 40 | 4173 | 396 | 4592 | 177 | 1004 | 9088 | 20 |
| 50 | 4200 | 381 | 4628 | 161 | 1019 | 9075 | 10 |
| 25°00′ | 0,4226 | 2,366 | 0,4663 | 2,145 | 1,1034 | 0,9063 | 65°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25°00′ | 0,4226 | 2,366 | 0,4663 | 2,1445 | 1,1034 | 0,9063 | 65°00′ |
| 10 | 4253 | 352 | 4699 | 1283 | 1049 | 9051 | 50 |
| 20 | 4279 | 337 | 4734 | 1123 | 1064 | 9038 | 40 |
| 25°30′ | 0,4305 | 2,323 | 0,4770 | 2,0965 | 1,1079 | 0,9026 | 64°30′ |
| 40 | 4331 | 309 | 4806 | 0809 | 1095 | 9013 | 20 |
| 50 | 4358 | 295 | 4841 | 0655 | 1110 | 9001 | 10 |
| 26°00′ | 0,4384 | 2,281 | 0,4877 | 2,0503 | 1,1126 | 0,8988 | 64°00′ |
| 10 | 4410 | 268 | 4913 | 0353 | 1142 | 8975 | 50 |
| 20 | 4436 | 254 | 4950 | 0204 | 1158 | 8962 | 40 |
| 26°30′ | 0,4462 | 2,241 | 0,4986 | 2,0057 | 1,1174 | 0,8949 | 63°30′ |
| 40 | 4488 | 228 | 5022 | 1,9912 | 1190 | 8936 | 20 |
| 50 | 4514 | 215 | 5059 | 9768 | 1207 | 8923 | 10 |
| 27°00′ | 0,4540 | 2,203 | 0,5095 | 1,9626 | 1,1223 | 0,8910 | 63°00′ |
| 10 | 4566 | 190 | 5132 | 9486 | 1240 | 8897 | 50 |
| 20 | 4592 | 178 | 5169 | 9347 | 1257 | 8884 | 40 |
| 27°30′ | 0,4617 | 2,166 | 0,5206 | 1,9210 | 1,1274 | 0,8870 | 62°30′ |
| 40 | 4643 | 154 | 5243 | 9074 | 1291 | 8857 | 20 |
| 50 | 4669 | 142 | 5280 | 8940 | 1308 | 8843 | 10 |
| 28°00′ | 0,4695 | 2,130 | 0,5317 | 1,8807 | 1,1326 | 0,8829 | 62°00′ |
| 10 | 4720 | 118 | 5354 | 8676 | 1343 | 8816 | 50 |
| 20 | 4746 | 107 | 5392 | 8546 | 1361 | 8802 | 40 |
| 28°30′ | 0,4772 | 2,096 | 0,5430 | 1,8418 | 1,1379 | 0,8788 | 61°30′ |
| 40 | 4797 | 085 | 5467 | 8291 | 1397 | 8774 | 20 |
| 50 | 4823 | 074 | 5505 | 8165 | 1415 | 8760 | 10 |
| 29°00′ | 0,4848 | 2,063 | 0,5543 | 1,8040 | 1,1434 | 0,8746 | 61°00′ |
| 10 | 4874 | 052 | 5581 | 7917 | 1452 | 8732 | 50 |
| 20 | 4899 | 041 | 5619 | 7796 | 1471 | 8718 | 40 |
| 29°30′ | 0,4924 | 2,031 | 0,5658 | 1,7675 | 1,1490 | 0,8704 | 60°30′ |
| 40 | 4950 | 020 | 5696 | 7556 | 1509 | 8689 | 20 |
| 50 | 4975 | 010 | 5735 | 7437 | 1528 | 8675 | 10 |
| 30°00′ | 0,5000 | 2,000 | 0,5774 | 1,7321 | 1,1547 | 0,8660 | 60°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30°00′ | 0,5000 | 2,0000 | 0,5774 | 1,7321 | 1,1547 | 0,8660 | 60°00′ |
| 10 | 5025 | 1,9900 | 5812 | 7205 | 1566 | 8646 | 50 |
| 20 | 5050 | 9801 | 5851 | 7090 | 1586 | 8631 | 40 |
| 30°30′ | 0,5075 | 1,9703 | 0,5890 | 1,6977 | 1,1606 | 0,8616 | 59°30′ |
| 40 | 5100 | 9606 | 5930 | 6864 | 1626 | 8601 | 20 |
| 50 | 5125 | 9511 | 5969 | 6753 | 1646 | 8587 | 10 |
| 31°00′ | 0,5150 | 1,9416 | 0,6009 | 1,6643 | 1,1666 | 0,8572 | 59°00′ |
| 10 | 5175 | 9323 | 6048 | 6534 | 1687 | 8557 | 50 |
| 20 | 5200 | 9230 | 6088 | 6426 | 1707 | 8542 | 40 |
| 31°30′ | 0,5225 | 1,9139 | 0,6128 | 1,6319 | 1,1728 | 0,8526 | 58°30′ |
| 40 | 5250 | 9048 | 6168 | 6212 | 1749 | 8511 | 20 |
| 50 | 5275 | 8959 | 6208 | 6107 | 1770 | 8496 | 10 |
| 32°00′ | 0,5299 | 1,8871 | 0,6249 | 1,6003 | 1,1792 | 0,8480 | 58°00′ |
| 10 | 5324 | 8783 | 6289 | 5900 | 1813 | 8465 | 50 |
| 20 | 5348 | 8697 | 6330 | 5798 | 1835 | 8450 | 40 |
| 32°30′ | 0,5373 | 1,8612 | 0,6371 | 1,5697 | 1,1857 | 0,8434 | 57°30′ |
| 40 | 5398 | 8527 | 6412 | 5597 | 1879 | 8418 | 20 |
| 50 | 5422 | 8443 | 6453 | 5497 | 1901 | 8403 | 10 |
| 33°00′ | 0,5446 | 1,8361 | 0,6494 | 1,5399 | 1,1924 | 0,8387 | 57°00′ |
| 10 | 5471 | 8279 | 6536 | 5301 | 1946 | 8371 | 50 |
| 20 | 5495 | 8198 | 6577 | 5204 | 1969 | 8355 | 40 |
| 33°30′ | 0,5519 | 1,8118 | 0,6619 | 1,5108 | 1,1992 | 0,8339 | 56°30′ |
| 40 | 5544 | 8039 | 6661 | 5013 | 2015 | 8323 | 20 |
| 50 | 5568 | 7960 | 6703 | 4919 | 2039 | 8307 | 10 |
| 34°00′ | 0,5592 | 1,7883 | 0,6745 | 1,4826 | 1,2062 | 0,8290 | 56°00′ |
| 10 | 5616 | 7806 | 6787 | 4733 | 2086 | 8274 | 50 |
| 20 | 5640 | 7730 | 6830 | 4641 | 2110 | 8258 | 40 |
| 34°30′ | 0,5664 | 1,7655 | 0,6873 | 1,4550 | 1,2134 | 0,8241 | 55°30′ |
| 40 | 5688 | 7581 | 6916 | 4460 | 2158 | 8225 | 20 |
| 50 | 5712 | 7507 | 6959 | 4370 | 2183 | 8208 | 10 |
| 35°00′ | 0,5736 | 1,7434 | 0,7002 | 1,4281 | 1,2208 | 0,8192 | 55°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35°00′ | 0,5736 | 1,7434 | 0,7002 | 1,4281 | 1,2208 | 0,8192 | 55°00′ |
| 10 | 5760 | 7362 | 7046 | 4193 | 2233 | 8175 | 50 |
| 20 | 5783 | 7291 | 7089 | 4106 | 2258 | 8158 | 40 |
| 35°30′ | 0,5807 | 1,7221 | 0,7133 | 1,4019 | 1,2283 | 0,8141 | 54°30′ |
| 40 | 5831 | 7151 | 7177 | 3934 | 2309 | 8124 | 20 |
| 50 | 5854 | 7081 | 7221 | 3848 | 2335 | 8107 | 10 |
| 36°00′ | 0,5878 | 1,7013 | 0,7265 | 1,3764 | 1,2361 | 0,8090 | 54°00′ |
| 10 | 5901 | 6945 | 7310 | 3680 | 2387 | 8073 | 50 |
| 20 | 5925 | 6878 | 7355 | 3597 | 2413 | 8056 | 40 |
| 36°30′ | 0,5948 | 1,6812 | 0,7400 | 1,3514 | 1,2440 | 0,8039 | 53°30′ |
| 40 | 5972 | 6746 | 7445 | 3432 | 2467 | 8021 | 20 |
| 50 | 5995 | 6681 | 7490 | 3351 | 2494 | 8004 | 10 |
| 37°00′ | 0,6018 | 1,6616 | 0,7536 | 1,3270 | 1,2521 | 0,7986 | 53°00′ |
| 10 | 6041 | 6553 | 7581 | 3190 | 2549 | 7969 | 50 |
| 20 | 6065 | 6489 | 7627 | 3111 | 2577 | 7951 | 40 |
| 37°30′ | 0,6088 | 1,6427 | 0,7673 | 1,3032 | 1,2605 | 0,7934 | 52°30′ |
| 40 | 6111 | 6365 | 7720 | 2954 | 2633 | 7916 | 20 |
| 50 | 6134 | 6303 | 7766 | 2876 | 2661 | 7898 | 10 |
| 38°00′ | 0,6157 | 1,6243 | 0,7813 | 1,2799 | 1,2690 | 0,7880 | 52′00′ |
| 10 | 6180 | 6183 | 7860 | 2723 | 2719 | 7862 | 50 |
| 20 | 6202 | 6123 | 7907 | 2647 | 2748 | 7844 | 40 |
| 38°30′ | 0,6225 | 1,6064 | 0,7954 | 1,2572 | 1,2778 | 0,7826 | 51°30′ |
| 40 | 6248 | 6005 | 8002 | 2497 | 2807 | 7808 | 20 |
| 50 | 6271 | 5948 | 8050 | 2423 | 2837 | 7790 | 10 |
| 39°00′ | 0,6293 | 1,5890 | 0,8098 | 1,2349 | 1,2868 | 0,7771 | 51°00′ |
| 10 | 6316 | 5833 | 8146 | 2276 | 2898 | 7753 | 50 |
| 20 | 6338 | 5777 | 8195 | 2203 | 2929 | 7735 | 40 |
| 39°30′ | 0,6361 | 1,5721 | 0,8243 | 1,2131 | 1,2960 | 0,7716 | 50°30′ |
| 40 | 6383 | 5666 | 8292 | 2059 | 2991 | 7698 | 20 |
| 50 | 6406 | 5611 | 8342 | 1988 | 3022 | 7679 | 10 |
| 40°00′ | 0,6428 | 1,5557 | 0,8391 | 1,1918 | 1,3054 | 0,7660 | 50°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| α | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40°00′ | 0,6428 | 1,5557 | 0,8391 | 1;1918 | 1,3054 | 0,7660 | 50°00′ |
| 10 | 6450 | 5504 | 8441 | 1847 | 3086 | 7642 | 50 |
| 20 | 6472 | 5450 | 8491 | 1778 | 3118 | 7623 | 40 |
| 40°30′ | 0,6494 | 1,5398 | 0,8541 | 1,1708 | 1,3151 | 0,7604 | 49°30′ |
| 40 | 6517 | 5345 | 8591 | 1640 | 3184 | 7585 | 20 |
| 50 | 6539 | 5294 | 8642 | 1571 | 3217 | 7566 | 10 |
| 41°00′ | 0,6561 | 1,5243 | 0,8693 | 1,1504 | 1,3250 | 0,7547 | 49°00′ |
| 10 | 6583 | 5192 | 8744 | 1436 | 3284 | 7528 | 50 |
| 20 | 6604 | 5141 | 8796 | 1369 | 3318 | 7509 | 40 |
| 41°30′ | 0,6626 | 1,5092 | 0,8447 | 1,1303 | 1,3352 | 0,7490 | 48°30′ |
| 40 | 6648 | 5042 | 8899 | 1237 | 3386 | 7470 | 20 |
| 50 | 6670 | 4993 | 8952 | 1171 | 3421 | 7451 | 10 |
| 42°00′ | 0,6691 | 1,4945 | 0,9004 | 1,1106 | 1,3456 | 0,7431 | 48°00′ |
| 10 | 6713 | 4897 | 9057 | 1041 | 3492 | 7412 | 50 |
| 20 | 6734 | 4849 | 9110 | 0977 | 3527 | 7392 | 40 |
| 42°30′ | 0,6756 | 1,4802 | 0,9163 | 1,0913 | 1,3563 | 0,7373 | 47°30′ |
| 40 | 6777 | 4755 | 9217 | 0850 | 3600 | 7353 | 20 |
| 50 | 6799 | 4709 | 9271 | 0786 | 3636 | 7333 | 10 |
| 43°00′ | 0,6820 | 1,4663 | 0,9325 | 1,0724 | 1,3673 | 0,7314 | 47°00′ |
| 10 | 6841 | 4617 | 9380 | 0661 | 3711 | 7294 | 50 |
| 20 | 6862 | 4572 | 9435 | 0599 | 3748 | 7274 | 40 |
| 43°30′ | 0,6884 | 1,4527 | 0,9490 | 1,0538 | 1,3786 | 0,7254 | 46°30′ |
| 40 | 6905 | 4483 | 9545 | 0477 | 3824 | 7234 | 20 |
| 50 | 6926 | 4439 | 9601 | 0416 | 3863 | 7214 | 10 |
| 44°00′ | 0,6947 | 1,4396 | 0,9657 | 1,0355 | 1,3902 | 0,7193 | 46°00′ |
| 10 | 6967 | 4352 | 9713 | 0295 | 3941 | 7173 | 50 |
| 20 | 6988 | 4310 | 9770 | 0235 | 3980 | 7153 | 40 |
| 44°30′ | 0,7009 | 1,4267 | 0,9827 | 1,0176 | 1,4020 | 0,7133 | 45°30′ |
| 40 | 7030 | 4225 | 9884 | 0117 | 4061 | 7112 | 20 |
| 50 | 7050 | 4183 | 9942 | 0058 | 4101 | 7092 | 10 |
| 45°00′ | 0,7071 | 1,4142 | 1,0000 | 1,0000 | 1,4142 | 0,7071 | 45°00′ |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Таблица 21

**Натуральные значения шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90° через каждые 0°,1**

| ctg | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°,0 | ∞ | 5729,6 | 2864,8 | 1909,9 | 1432,4 | 1145,9 | 954,9 | 818,5 | 716,2 | 636,6 | 89°,0 |
| 1 | 573,0 | 520,9 | 477,5̄ | 440,7 | 409,3 | 382,0 | 358,1 | 337,0 | 318,3 | 301,6 | 8 |
| 2 | 286,5̄ | 272,8 | 260,4 | 249,1 | 238,7 | 229,2 | 220,4 | 212,2 | 204,6 | 197,6 | 7 |
| 3 | 191,0 | 184,8 | 179,0 | 173,6 | 168,5 | 163,7 | 159,2 | 154,9 | 150,8 | 146,9 | 6 |
| 4 | 143,2 | 139,7 | 136,4 | 133,2 | 130,2 | 127,3 | 124,6 | 121,9 | 119,4 | 116,9 | 5 |
| 0°,5 | 114,6 | 112,3 | 110,2 | 108,1 | 106,1 | 104,2 | 102,3 | 100,5 | 98,78 | 97,11 | 89°,4 |
| 6 | 95,49 | 93,92 | 92,41 | 90,94 | 89,52 | 88,14 | 86,81 | 85,51 | 84,25 | 83,03 | 3 |
| 7 | 81,85̄ | 80,69 | 79,57 | 78,48 | 77,42 | 76,39 | 75,38 | 74,41 | 73,45 | 72,52 | 2 |
| 8 | 71,62 | 70,73 | 69,87 | 69,03 | 68,20 | 67,40 | 66,62 | 65,85 | 65,10 | 64,37 | 1 |
| 0°,9 | 63,66 | 62,96 | 62,27 | 61,60 | 60,95 | 60,31 | 59,68 | 59,06 | 58,46 | 57,87 | 80°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | tg |

| cosec | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°,0 | ∞ | 5729,6 | 2864,8 | 1909,9 | 1432,4 | 1145,9 | 954,9 | 818,5 | 716,2 | 636,6 | 89°,9 |
| 1 | 573,0 | 520,9 | 477,5̄ | 440,7 | 409,3 | 382,0 | 358,1 | 337,0 | 318,3 | 301,6 | 8 |
| 2 | 286,5̄ | 272,8 | 260,4 | 249,1 | 238,7 | 229,2 | 220,4 | 212,2 | 204,6 | 197,6 | 7 |
| 3 | 191,0 | 184,8 | 179,1 | 173,6 | 168,5 | 163,7 | 159,2 | 154,9 | 150,8 | 146,9 | 6 |
| 4 | 143,2 | 139,7 | 136,4 | 133,2 | 130,2 | 127,3 | 124,6 | 121,9 | 119,4 | 116,9 | 5 |
| 0°,5 | 114,6 | 112,3 | 110,2 | 108,1 | 106,1 | 104,2 | 102,3 | 100,5 | 98,79 | 97,11 | 89°,4 |
| 6 | 95,49 | 93,92 | 92,41 | 90,95 | 89,53 | 88,15̄ | 86,81 | 85,52 | 84,26 | 83,04 | 3 |
| 7 | 81,85 | 80,70 | 79,58 | 78,49 | 77,43 | 76,40 | 75,39 | 74,41 | 73,46 | 72,53 | 2 |
| 8 | 71,62 | 70,74 | 69,88 | 69,03 | 68,21 | 67,41 | 66,63 | 65,86 | 65,11 | 64,38 | 1 |
| 0°,9 | 63,66 | 62,97 | 62,28 | 61,61 | 60,96 | 60,31 | 59,69 | 59,07 | 58,47 | 57,88 | 89°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | sec |

| ctg | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1°,0 | 57,29 | 56,72 | 56,17 | 55,62 | 55,09 | 54,56 | 54,05 | 53,54 | 53,05 | 52,56 | 88°,9 |
| 1 | 52,08 | 51,61 | 51,15 | 50,70 | 50,25 | 49,82 | 49,39 | 48,96 | 48,55 | 48,14 | 8 |
| 2 | 47,74 | 47,34 | 46,96 | 46,57 | 46,20 | 45,83 | 45,47 | 45,11 | 44,75 | 44,41 | 7 |
| 3 | 44,07 | 43,73 | 43,40 | 43,07 | 42,75 | 42,43 | 42,12 | 41,81 | 41,51 | 41,21 | 6 |
| 4 | 40,92 | 40,63 | 40,34 | 40,06 | 39,78 | 39,51 | 39,24 | 38,97 | 38,70 | 38,44 | 5 |
| 1°,5 | 38,19 | 37,94 | 37,69 | 37,44 | 37,20 | 39,96 | 36,72 | 36,48 | 36,25 | 36,03 | 88°,4 |
| 6 | 35,80 | 35,58 | 35,36 | 35,14 | 34,93 | 34,72 | 34,51 | 34,30 | 34,09 | 33,89 | 3 |
| 7 | 33,69 | 33,50 | 33,30 | 33,11 | 32,92 | 32,73 | 32,54 | 32,36 | 32,18 | 32,00 | 2 |
| 8 | 31,82 | 31,64 | 31,47 | 31,30 | 31,13 | 30,96 | 30,79 | 30,63 | 30,47 | 30,30 | 1 |
| 1°,9 | 30,14 | 29,99 | 29,83 | 29,68 | 29,52 | 29,37 | 29,22 | 29,07 | 28,93 | 28,78 | 88°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | tg |

| cosec | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1°,0 | 57,30 | 56,73 | 56,18 | 55,63 | 55,10 | 54,57 | 54,06 | 53,55 | 53,05 | 52,57 | 88°,9 |
| 1 | 52,09 | 51,62 | 51,16 | 50,71 | 50,26 | 49,83 | 49,40 | 48,97 | 48,56 | 48,15 | 8 |
| 2 | 47,75 | 47,36 | 46,97 | 46,59 | 46,21 | 45,84 | 45,48 | 45,12 | 44,77 | 44,42 | 7 |
| 3 | 44,08 | 43,74 | 43,41 | 43,08 | 42,76 | 42,45 | 42,13 | 41,83 | 41,52 | 41,22 | 6 |
| 4 | 40,93 | 40,64 | 40,35 | 40,07 | 39,79 | 39,52 | 39,25 | 38,98 | 38,72 | 38,46 | 5 |
| 1°,5 | 38,20 | 37,95 | 37,70 | 37,45 | 37,21 | 36,97 | 36,73 | 36,50 | 36,27 | 36,04 | 88°,4 |
| 6 | 35,81 | 35,59 | 35,37 | 35,16 | 34,94 | 34,73 | 34,52 | 34,31 | 34,11 | 33,91 | 3 |
| 7 | 33,71 | 33,51 | 33,32 | 33,12 | 32,93 | 32,75 | 32,56 | 32,38 | 32,19 | 32,01 | 2 |
| 8 | 31,84 | 31,66 | 31,49 | 31,31 | 31,14 | 30,98 | 30,81 | 30,64 | 30,48 | 30,32 | 1 |
| 1°,9 | 30,16 | 30,00 | 29,85 | 29,69 | 29,54 | 29,39 | 29,24 | 29,09 | 28,94 | 28,80 | 80°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | sec |

| ctg | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2°,0 | 28,64 | 28,49 | 28,35 | 28,21 | 28,07 | 27,94 | 27,80 | 27,67 | 27,53 | 27,40 | 87°,9 |
| 1 | 27,27 | 27,14 | 27,01 | 26,89 | 26,76 | 26,64 | 26,51 | 26,39 | 26,27 | 26,15 | 8 |
| 2 | 26,03 | 25,91 | 25,80 | 25,68 | 25,57 | 25,45 | 25,34 | 25,23 | 25,12 | 25,01 | 7 |
| 3 | 24,90 | 24,79 | 24,68 | 24,58 | 24,47 | 24,37 | 24,26 | 24,16 | 24,06 | 23,96 | 6 |
| 4 | 23,86 | 23,76 | 23,66 | 23,56 | 23,47 | 23,37 | 23,28 | 23,18 | 23,09 | 23,00 | 5 |
| 2°,5 | 22,90 | 22,81 | 22,72 | 22,63 | 22,54 | 22,45 | 22,37 | 22,28 | 22,19 | 22,11 | 87°,4 |
| 6 | 22,02 | 21,94 | 21,85 | 21,77 | 21,69 | 21,61 | 21,52 | 21,44 | 21,36 | 21,28 | 3 |
| 7 | 21,20 | 21,13 | 21,05 | 20,97 | 20,89 | 20,82 | 20,74 | 20,67 | 20,59 | 20,52 | 2 |
| 8 | 20,45 | 20,37 | 20,30 | 20,23 | 20,16 | 20,09 | 20,02 | 19,95 | 19,88 | 19,81 | 1 |
| 2°,9 | 19,74 | 19,67 | 19,60 | 19,54 | 19,47 | 19,41 | 19,34 | 19,27 | 19,21 | 19,15 | 87°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | tg |

| cosec | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2°,0 | 28,65 | 28,51 | 28,37 | 28,23 | 28,09 | 27,96 | 27,82 | 27,69 | 27,55 | 27,42 | 87°,9 |
| 1 | 27,29 | 27,16 | 27,03 | 26,91 | 26,78 | 26,66 | 26,53 | 26,41 | 26,29 | 26,17 | 8 |
| 2 | 26,05 | 25,93 | 25,82 | 25,70 | 25,58 | 25,47 | 25,36 | 25,25 | 25,14 | 25,03 | 7 |
| 3 | 24,92 | 24,81 | 24,70 | 24,60 | 24,49 | 24,39 | 24,28 | 24,18 | 24,08 | 23,98 | 6 |
| 4 | 23,88 | 23,78 | 23,68 | 23,59 | 23,49 | 23,39 | 23,30 | 23,20 | 23,11 | 23,02 | 5 |
| 2°,5 | 22,93 | 22,83 | 22,74 | 22,65 | 22,56 | 22,48 | 22,39 | 22,30 | 22,22 | 22,13 | 87°,4 |
| 6 | 22,04 | 21,96 | 21,88 | 21,79 | 21,71 | 21,63 | 21,55 | 21,47 | 21,39 | 21,31 | 3 |
| 7 | 21,23 | 21,15 | 21,07 | 21,00 | 20,92 | 20,84 | 20,77 | 20,69 | 20,62 | 20,54 | 2 |
| 8 | 20,47 | 20,40 | 20,33 | 20,25 | 20,18 | 20,11 | 20,04 | 19,97 | 19,90 | 19,83 | 1 |
| 2°,9 | 19,77 | 19,70 | 19,63 | 19,56 | 19,50 | 19,43 | 19,37 | 19,30 | 19,24 | 19,17 | 87°,0 |
| | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | sec |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 0,0 | 0,000000 | ∞ | 0,000000 | ∞ | 1,0000 | 1,0000 | 90,0 |
| 1 | 001745 | 572,96 | 001745 | 572,96 | 0000 | 0000 | 9 |
| 2 | 003491 | 286,48 | 003491 | 286,48 | 0000 | 0000 | 8 |
| 3 | 005236 | 190,99 | 005236 | 190,98 | 0000 | 0000 | 7 |
| 4 | 006981 | 143,24 | 006981 | 143,24 | 0000 | 0000 | 6 |
| 0,5 | 0,008727 | 114,59 | 0,008727 | 114,59 | 1,0000 | 1,0000 | 89,5 |
| 6 | 010472 | 95,49 | 010472 | 95,49 | 0001 | 0,9999 | 4 |
| 7 | 012217 | 81,85 | 012218 | 81,85 | 0001 | 9999 | 3 |
| 8 | 013962 | 71,62 | 013964 | 71,62 | 0001 | 9999 | 2 |
| 9 | 015707 | 63,66 | 015709 | 63,66 | 0001 | 9999 | 1 |
| 1,0 | 0,017452 | 57,30 | 0,017455 | 57,29 | 1,0002 | 0,9998 | 89,0 |
| 1 | 019197 | 52,09 | 019201 | 52,08 | 0002 | 9998 | 9 |
| 2 | 020942 | 47,75 | 020947 | 47,74 | 0002 | 9998 | 8 |
| 3 | 022687 | 44,08 | 022693 | 44,07 | 0003 | 9997 | 7 |
| 4 | 024432 | 40,93 | 024439 | 40,92 | 0003 | 9997 | 6 |
| 1,5 | 0,026177 | 38,20 | 0,026186 | 38,19 | 1,0003 | 0,9997 | 88,5 |
| 6 | 027922 | 35,81 | 027933 | 35,80 | 0004 | 9996 | 4 |
| 7 | 029666 | 33,71 | 029679 | 33,69 | 0004 | 9996 | 3 |
| 8 | 031411 | 31,84 | 031426 | 31,82 | 0005 | 9995 | 2 |
| 9 | 033155 | 30,16 | 033173 | 30,14 | 0006 | 9995 | 1 |
| 2,0 | 0,034899 | 28,65 | 0,034921 | 28,64 | 1,0006 | 0,9994 | 88,0 |
| 1 | 036644 | 27,29 | 036668 | 27,27 | 0007 | 9993 | 9 |
| 2 | 038388 | 26,05 | 038416 | 26,03 | 0007 | 9993 | 8 |
| 3 | 040132 | 24,92 | 040164 | 24,90 | 0008 | 9992 | 7 |
| 4 | 041876 | 23,88 | 041912 | 23,86 | 0009 | 9991 | 6 |
| 2,5 | 0,043619 | 22,93 | 0,043661 | 22,90 | 1,0010 | 0,9990 | 87,5 |
| 6 | 045363 | 22,04 | 045410 | 22,02 | 0010 | 9990 | 4 |
| 7 | 047106 | 21,23 | 047159 | 21,20 | 0011 | 9989 | 3 |
| 8 | 048850 | 20,47 | 048908 | 20,45 | 0012 | 9988 | 2 |
| 9 | 050593 | 19,77 | 050658 | 19,74 | 0013 | 9987 | 1 |
| 3,0 | 0,052336 | 19,11 | 0,052408 | 19,08 | 1,0014 | 0,9986 | 87,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 3,0 | 0,05234 | 19,11 | 0,05241 | 19,08 | 1,0014 | 0,9986 | 87,0 |
| 1 | 05408 | 18,49 | 05416 | 18,46 | 0015 | 9985 | 9 |
| 2 | 05582 | 17,91 | 05591 | 17,89 | 0016 | 9984 | 8 |
| 3 | 05756 | 17,37 | 05766 | 17,34 | 0017 | 9983 | 7 |
| 4 | 05931 | 16,86 | 05941 | 16,83 | 0018 | 9982 | 6 |
| 3,5 | 0,06105 | 16,38 | 0,06116 | 16,35 | 1,0019 | 0,9981 | 86,5 |
| 6 | 06279 | 15,93 | 06291 | 15,89 | 0020 | 9980 | 4 |
| 7 | 06453 | 15,50 | 06467 | 15,46 | 0021 | 9979 | 3 |
| 8 | 06627 | 15,09 | 06642 | 15,06 | 0022 | 9978 | 2 |
| 9 | 06802 | 14,70 | 06817 | 14,67 | 0023 | 9977 | 1 |
| 4,0 | 0,06976 | 14,34 | 0,06993 | 14,30 | 1,0024 | 0,9976 | 86,0 |
| 1 | 07150 | 13,99 | 07168 | 13,95 | 0026 | 9974 | 9 |
| 2 | 07324 | 13,65 | 07344 | 13,62 | 0027 | 9973 | 8 |
| 3 | 07498 | 13,34 | 07519 | 13,30 | 0028 | 9972 | 7 |
| 4 | 07672 | 13,03 | 07695 | 13,00 | 0030 | 9971 | 6 |
| 4,5 | 0,07846 | 12,75 | 0,07870 | 12,71 | 1,0031 | 0,9969 | 85,5 |
| 6 | 08020 | 12,47 | 08046 | 12,43 | 0032 | 9968 | 4 |
| 7 | 08194 | 12,20 | 08221 | 12,16 | 0034 | 9966 | 3 |
| 8 | 08368 | 11,95 | 08397 | 11,91 | 0035 | 9965 | 2 |
| 9 | 08542 | 11,71 | 08573 | 11,66 | 0037 | 8963 | 1 |
| 5,0 | 0,08716 | 11,47 | 0,08749 | 11,43 | 1,0038 | 0,9962 | 85,0 |
| 1 | 08889 | 11,25 | 08925 | 11,20 | 0040 | 9960 | 9 |
| 2 | 09063 | 11,03 | 09101 | 10,99 | 0041 | 9959 | 8 |
| 3 | 09237 | 10,83 | 09277 | 10,78 | 0043 | 9957 | 7 |
| 4 | 09411 | 10,63 | 09453 | 10,58 | 0045 | 9956 | 6 |
| 5,5 | 0,09585 | 10,433 | 0,09629 | 10,385 | 1,0046 | 0,9954 | 84,5 |
| 6 | 09758 | 10,248 | 09805 | 10,199 | 0048 | 9952 | 4 |
| 7 | 09932 | 10,068 | 09981 | 10,019 | 0050 | 9951 | 3 |
| 8 | 10106 | 9,895 | 10158 | 9,845 | 0051 | 9949 | 2 |
| 9 | 10279 | 9,728 | 10334 | 9,677 | 0051<br>0053 | 9947 | 1 |
| 6,0 | 0,10453 | 9,567 | 0,10510 | 9,514 | 1,0055 | 0,9945 | 84,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 6,0 | 0,1045 | 9,567 | 0,1051 | 9,514 | 1,0055 | 0,9945 | 84,0 |
| 1 | 1063 | 411 | 1069 | 357 | 0057 | 9943 | 9 |
| 2 | 1080 | 259 | 1086 | 205 | 0059 | 9942 | 8 |
| 3 | 1097 | 113 | 1104 | 058 | 0061 | 9940 | 7 |
| 4 | 1115 | 8,971 | 1122 | 8,915 | 0063 | 9938 | 6 |
| 6,5 | 0,1132 | 8,834 | 0,1139 | 8,777 | 1,0065 | 0,9936 | 83,5 |
| 6 | 1149 | 700 | 1157 | 643 | 0067 | 9934 | 4 |
| 7 | 1167 | 571 | 1175 | 513 | 0069 | 9932 | 3 |
| 8 | 1184 | 446 | 1192 | 386 | 0071 | 9930 | 2 |
| 9 | 1201 | 324 | 1210 | 264 | 0073 | 9928 | 1 |
| 7,0 | 0,1219 | 8,206 | 0,1228 | 8,144 | 1,0075 | 0,9925 | 83,0 |
| 1 | 1236 | 091 | 1246 | 028 | 0077 | 9923 | 9 |
| 2 | 1253 | 7,979 | 1263 | 7,916 | 0079 | 9921 | 8 |
| 3 | 1271 | 870 | 1281 | 806 | 0082 | 9919 | 7 |
| 4 | 1288 | 764 | 1299 | 700 | 0084 | 9917 | 6 |
| 7,5 | 0,1305 | 7,661 | 0,1317 | 7,596 | 1,0086 | 0,9914 | 82,5 |
| 6 | 1323 | 561 | 1334 | 495 | 0089 | 9912 | 4 |
| 7 | 1340 | 463 | 1352 | 396 | 0091 | 9910 | 3 |
| 8 | 1357 | 368 | 1370 | 300 | 0093 | 9907 | 2 |
| 9 | 1374 | 276 | 1388 | 207 | 0096 | 9905 | 1 |
| 8,0 | 0,1392 | 7,185 | 0,1405 | 7,115 | 1,0098 | 0,9903 | 82,0 |
| 1 | 1409 | 097 | 1423 | 026 | 0101 | 9900 | 9 |
| 2 | 1426 | 011 | 1441 | 6,940 | 0103 | 9898 | 8 |
| 3 | 1444 | 6,927 | 1459 | 855 | 0106 | 9895 | 7 |
| 4 | 1461 | 845 | 1477 | 772 | 0108 | 9893 | 6 |
| 8,5 | 0,1478 | 6,765 | 0,1495 | 6,691 | 1,0111 | 0,9890 | 81,5 |
| 6 | 1495 | 687 | 1512 | 612 | 0114 | 9888 | 4 |
| 7 | 1513 | 611 | 1530 | 535 | 0116 | 9885 | 3 |
| 8 | 1530 | 537 | 1548 | 460 | 0119 | 9882 | 2 |
| 9 | 1547 | 464 | 1566 | 386 | 0122 | 9880 | 1 |
| 9,0 | 0,1564 | 6,392 | 0,1584 | 6,314 | 1,0125 | 0,9877 | 81,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 9,0 | 0,1564 | 6,392 | 0,1584 | 6,314 | 1,0125 | 0,9877 | 81,0 |
| 1 | 1582 | 323 | 1602 | 243 | 0127 | 9874 | 9 |
| 2 | 1599 | 255 | 1620 | 174 | 0130 | 9871 | 8 |
| 3 | 1616 | 188 | 1638 | 107 | 0133 | 9869 | 7 |
| 4 | 1633 | 123 | 1655 | 041 | 0136 | 9866 | 6 |
| 9,5 | 0,1650 | 6,059 | 0,1673 | 5,976 | 1,0139 | 0,9863 | 80,5 |
| 6 | 1668 | 5,996 | 1691 | 912 | 0142 | 9860 | 4 |
| 7 | 1685 | 935 | 1709 | 850 | 0145 | 9857 | 3 |
| 8 | 1702 | 875 | 1727 | 789 | 0148 | 9854 | 2 |
| 9 | 1719 | 816 | 1745 | 730 | 0151 | 9851 | 1 |
| 10,0 | 0,1736 | 5,759 | 0,1763 | 5,671 | 1,0154 | 0,9848 | 80,0 |
| 1 | 1754 | 702 | 1781 | 614 | 0157 | 9845 | 9 |
| 2 | 1771 | 647 | 1799 | 558 | 0161 | 9842 | 8 |
| 3 | 1788 | 593 | 1817 | 503 | 0164 | 9839 | 7 |
| 4 | 1805 | 540 | 1835 | 449 | 0167 | 9836 | 6 |
| 10,5 | 0,1822 | 5,487 | 0,1853 | 5,396 | 1,0170 | 0,9833 | 79,5 |
| 6 | 1840 | 436 | 1871 | 343 | 0174 | 9829 | 4 |
| 7 | 1857 | 386 | 1890 | 292 | 0177 | 9826 | 3 |
| 8 | 1874 | 337 | 1908 | 242 | 0180 | 9823 | 2 |
| 9 | 1891 | 288 | 1926 | 193 | 0184 | 9820 | 1 |
| 11,0 | 0,1908 | 5,241 | 0,1944 | 5,145 | 1,0187 | 0,9816 | 79,0 |
| 1 | 1925 | 194 | 1962 | 097 | 0191 | 9813 | 9 |
| 2 | 1942 | 148 | 1980 | 050 | 0194 | 9810 | 8 |
| 3 | 1959 | 103 | 1998 | 005 | 0198 | 9806 | 7 |
| 4 | 1977 | 059 | 2016 | 4,959 | 0201 | 9803 | 6 |
| 11,5 | 0,1994 | 5,016 | 0,2035 | 4,915 | 1,0205 | 0,9799 | 78,5 |
| 6 | 2011 | 4,973 | 2053 | 872 | 0209 | 9796 | 4 |
| 7 | 2028 | 931 | 2071 | 829 | 0212 | 9792 | 3 |
| 8 | 2045 | 890 | 2089 | 787 | 0216 | 9789 | 2 |
| 9 | 2062 | 850 | 2107 | 745 | 0220 | 9785 | 1 |
| 12,0 | 0,2079 | 4,810 | 0,2126 | 4,705 | 1,0223 | 0,9781 | 78,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 12,0 | 0,2079 | 4,810 | 0,2126 | 4,705 | 1,0223 | 0,9781 | 78,0 |
| 1 | 2096 | 771 | 2144 | 665 | 0227 | 9778 | 9 |
| 2 | 2113 | 732 | 2162 | 625 | 0231 | 9774 | 8 |
| 3 | 2130 | 694 | 2180 | 586 | 0235 | 9770 | 7 |
| 4 | 2147 | 657 | 2199 | 548 | 0239 | 9767 | 6 |
| 12,5 | 0,2164 | 4,620 | 0,2217 | 4,511 | 1,0243 | 0,9763 | 77,5 |
| 6 | 2181 | 584 | 2235 | 474 | 0247 | 9759 | 4 |
| 7 | 2198 | 549 | 2254 | 437 | 0251 | 9755 | 3 |
| 8 | 2215 | 514 | 2272 | 402 | 0255 | 9751 | 2 |
| 9 | 2233 | 479 | 2290 | 366 | 0259 | 9748 | 1 |
| 13,0 | 0,2250 | 4,445 | 0,2309 | 3,331 | 1,0263 | 0,9744 | 77,0 |
| 1 | 2267 | 412 | 2327 | 297 | 0267 | 9740 | 9 |
| 2 | 2284 | 379 | 2345 | 264 | 0271 | 9736 | 8 |
| 3 | 2300 | 347 | 2364 | 230 | 0276 | 9732 | 7 |
| 4 | 2317 | 315 | 2382 | 198 | 0280 | 9728 | 6 |
| 13,5 | 0,2334 | 4,284 | 0,2401 | 4,165 | 1,0284 | 0,9724 | 76,5 |
| 6 | 2351 | 253 | 2419 | 134 | 0288 | 9720 | 4 |
| 7 | 2368 | 222 | 2438 | 102 | 0293 | 9715 | 3 |
| 8 | 2385 | 192 | 2456 | 071 | 0297 | 9711 | 2 |
| 9 | 2402 | 163 | 2475 | 041 | 0302 | 9707 | 1 |
| 14,0 | 0,2419 | 4,134 | 0,2493 | 4,011 | 1,0306 | 0,9703 | 76,0 |
| 1 | 2436 | 105 | 2512 | 3,981 | 0311 | 9699 | 9 |
| 2 | 2453 | 077 | 2530 | 952 | 0315 | 9694 | 8 |
| 3 | 2470 | 049 | 2549 | 923 | 0320 | 9690 | 7 |
| 4 | 2487 | 021 | 2568 | 895 | 0324 | 9686 | 6 |
| 14,5 | 0,2504 | 3,994 | 0,2586 | 3,867 | 2,0329 | 0,9681 | 75,5 |
| 6 | 2521 | 967 | 2605 | 839 | 0334 | 9677 | 4 |
| 7 | 2538 | 941 | 2623 | 812 | 0338 | 9673 | 3 |
| 8 | 2554 | 915 | 2642 | 785 | 0343 | 9668 | 2 |
| 9 | 2571 | 889 | 2661 | 758 | 0348 | 9664 | 1 |
| 15,0 | 0,2588 | 3,864 | 0,2679 | 3,732 | 1,0353 | 0,9659 | 75,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 15,0 | 0,2588 | 3,864 | 0,2679 | 3,732 | 1,0353 | 0,9659 | 75,0 |
| 1 | 2605 | 839 | 2698 | 706 | 0358 | 9655 | 9 |
| 2 | 2622 | 814 | 2717 | 681 | 0363 | 9650 | 8 |
| 3 | 2639 | 790 | 2736 | 655 | 0367 | 9646 | 7 |
| 4 | 2656 | 766 | 2754 | 630 | 0372 | 9641 | 6 |
| 15,5 | 0,2672 | 3,742 | 0,2773 | 3,606 | 1,0377 | 0,9636 | 74,5 |
| 6 | 2689 | 719 | 2792 | 582 | 0382 | 9632 | 4 |
| 7 | 2706 | 695 | 2811 | 558 | 0388 | 9627 | 3 |
| 8 | 2723 | 673 | 2830 | 534 | 0393 | 9622 | 2 |
| 9 | 2740 | 650 | 2849 | 511 | 0398 | 9617 | 1 |
| 16,0 | 0,2756 | 3,628 | 0,2867 | 3,487 | 1,0403 | 0,9613 | 74,0 |
| 1 | 2773 | 606 | 2886 | 465 | 0408 | 9608 | 9 |
| 2 | 2790 | 584 | 2905 | 442 | 0413 | 9603 | 8 |
| 3 | 2807 | 563 | 2924 | 420 | 0419 | 9598 | 7 |
| 4 | 2823 | 542 | 2943 | 398 | 0424 | 9593 | 6 |
| 16,5 | 0,2840 | 3,521 | 0,2962 | 3,376 | 1,0429 | 0,9588 | 73,5 |
| 6 | 2857 | 500 | 2981 | 354 | 0435 | 9583 | 4 |
| 7 | 2874 | 480 | 3000 | 333 | 0440 | 9578 | 3 |
| 8 | 2890 | 460 | 3019 | 312 | 0446 | 9573 | 2 |
| 9 | 2907 | 440 | 3038 | 291 | 0451 | 9568 | 1 |
| 17,0 | 0,2924 | 3,420 | 0,3057 | 3,271 | 1,0457 | 0,9563 | 73,0 |
| 1 | 2940 | 401 | 3076 | 251 | 0463 | 9558 | 9 |
| 2 | 2957 | 382 | 3096 | 230 | 0468 | 9553 | 8 |
| 3 | 2974 | 363 | 3115 | 211 | 0474 | 9548 | 7 |
| 4 | 2990 | 344 | 3134 | 191 | 0480 | 9542 | 6 |
| 17,5 | 0,3007 | 3,326 | 0,3153 | 3,172 | 1,0485 | 0,9537 | 72,5 |
| 6 | 3024 | 307 | 3172 | 152 | 0491 | 9532 | 4 |
| 7 | 3040 | 289 | 3191 | 133 | 0497 | 9527 | 3 |
| 8 | 3057 | 271 | 3211 | 115 | 0503 | 9521 | 2 |
| 9 | 3074 | 254 | 3230 | 096 | 0509 | 9516 | 1 |
| 18,0 | 0,3090 | 3,236 | 0,3249 | 3,078 | 1,0515 | 0,9511 | 72,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 18,0 | 0,3090 | 3,236 | 0,3249 | 3,078 | 1,0515 | 0,9511 | 72,0 |
| 1 | 3107 | 219 | 3269 | 060 | 0521 | 9505 | 9 |
| 2 | 3123 | 202 | 3288 | 042 | 0527 | 9500 | 8 |
| 3 | 3140 | 185 | 3307 | 024 | 0533 | 9494 | 7 |
| 4 | 3156 | 168 | 3327 | 006 | 0539 | 9489 | 6 |
| 18,5 | 0,3173 | 3,152 | 0,3346 | 2,989 | 1,0545 | 0,9483 | 71,5 |
| 6 | 3190 | 135 | 3365 | 971 | 0551 | 9478 | 4 |
| 7 | 3206 | 119 | 3385 | 954 | 0557 | 9472 | 3 |
| 8 | 3223 | 103 | 3404 | 937 | 0564 | 9466 | 2 |
| 9 | 3239 | 087 | 3424 | 921 | 0570 | 9461 | 1 |
| 19,0 | 0,3256 | 3,072 | 0,3443 | 2,904 | 1,0576 | 0,9455 | 71,0 |
| 1 | 3272 | 056 | 3463 | 888 | 0583 | 9449 | 9 |
| 2 | 3289 | 041 | 3482 | 872 | 0589 | 9444 | 8 |
| 3 | 3305 | 026 | 3502 | 856 | 0595 | 9438 | 7 |
| 4 | 3322 | 011 | 3522 | 840 | 0602 | 9432 | 6 |
| 19,5 | 0,3338 | 2,996 | 0,3541 | 2,824 | 1,0608 | 0,9426 | 70,5 |
| 6 | 3355 | 981 | 3561 | 808 | 0615 | 9421 | 4 |
| 7 | 3371 | 967 | 3581 | 793 | 0622 | 9415 | 3 |
| 8 | 3387 | 952 | 3600 | 778 | 0628 | 9409 | 2 |
| 9 | 3404 | 938 | 3620 | 762 | 0635 | 9403 | 1 |
| 20,0 | 0,3420 | 2,924 | 0,3640 | 2,747 | 1,0642 | 0,9397 | 70,0 |
| 1 | 3437 | 910 | 3659 | 733 | 0649 | 9391 | 9 |
| 2 | 3453 | 896 | 3679 | 718 | 0655 | 9385 | 8 |
| 3 | 3469 | 882 | 3699 | 703 | 0662 | 9379 | 7 |
| 4 | 3486 | 869 | 3719 | 689 | 0669 | 9373 | 6 |
| 20,5 | 0,3502 | 2,855 | 0,3739 | 2,675 | 1,0676 | 0,9367 | 69,5 |
| 6 | 3518 | 842 | 3759 | 660 | 0683 | 9361 | 4 |
| 7 | 3535 | 829 | 3779 | 646 | 0690 | 9354 | 3 |
| 8 | 3551 | 816 | 3799 | 633 | 0697 | 9348 | 2 |
| 9 | 3567 | 803 | 3819 | 619 | 0704 | 9342 | 1 |
| 21,0 | 0,3584 | 2,790 | 0,3839 | 2,605 | 1,0711 | 0,9336 | 69,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| | Натуральные значения | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 21,0 | 0,3584 | 2,790 | 0,3839 | 2,605 | 1,0711 | 0,9336 | 69,0 |
| 1 | 3600 | 778 | 3859 | 592 | 0719 | 9330 | 9 |
| 2 | 3616 | 765 | 3879 | 578 | 0726 | 9323 | 8 |
| 3 | 3633 | 753 | 3899 | 565 | 0733 | 9317 | 7 |
| 4 | 3649 | 741 | 3919 | 552 | 0740 | 9311 | 6 |
| 21,5 | 0,3665 | 2,729 | 0,3939 | 2,539 | 1,0748 | 0,9304 | 68,5 |
| 6 | 3681 | 716 | 3959 | 526 | 0755 | 9298 | 4 |
| 7 | 3697 | 705 | 3979 | 513 | 0763 | 9291 | 3 |
| 8 | 3714 | 693 | 4000 | 500 | 0770 | 9285 | 2 |
| 9 | 3730 | 681 | 4020 | 488 | 0778 | 9278 | 1 |
| 22,0 | 0,3746 | 2,669 | 0,4040 | 2,475 | 1,0785 | 0,9272 | 68,0 |
| 1 | 3762 | 658 | 4061 | 463 | 0793 | 9265 | 9 |
| 2 | 3778 | 647 | 4081 | 450 | 0801 | 9259 | 8 |
| 3 | 3795 | 635 | 4101 | 438 | 0808 | 9252 | 7 |
| 4 | 3811 | 624 | 4122 | 426 | 0816 | 9245 | 6 |
| 22,5 | 0,3827 | 2,613 | 0,4142 | 2,414 | 1,0824 | 0,9239 | 67,5 |
| 6 | 3843 | 602 | 4163 | 402 | 0832 | 9232 | 4 |
| 7 | 3859 | 591 | 4183 | 391 | 0840 | 9225 | 3 |
| 8 | 3875 | 581 | 4204 | 379 | 0848 | 9219 | 2 |
| 9 | 3891 | 570 | 4224 | 367 | 0856 | 9212 | 1 |
| 23,0 | 0,3907 | 2,559 | 0,4245 | 2,356 | 1,0864 | 0,9205 | 67,0 |
| 1 | 3923 | 549 | 4265 | 344 | 0872 | 9198 | 9 |
| 2 | 3939 | 538 | 4286 | 333 | 0880 | 9191 | 8 |
| 3 | 3955 | 528 | 4307 | 322 | 0888 | 9184 | 7 |
| 4 | 3971 | 518 | 4327 | 311 | 0896 | 9178 | 6 |
| 23,5 | 0,3987 | 2,508 | 0,4348 | 2,300 | 1,0904 | 0,9171 | 66,5 |
| 6 | 4003 | 498 | 4369 | 289 | 0913 | 9164 | 4 |
| 7 | 4019 | 488 | 4390 | 278 | 0921 | 9157 | 3 |
| 8 | 4035 | 478 | 4411 | 267 | 0929 | 9150 | 2 |
| 9 | 4051 | 468 | 4431 | 257 | 0938 | 9143 | 1 |
| 24,0 | 0,4067 | 2,459 | 0,4452 | 2,246 | 1,0946 | 0,9135 | 66,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 24,0 | 0,4067 | 2,459 | 0,4452 | 2,246 | 1,0946 | 0,9135 | 66,0 |
| 1 | 4083 | 449 | 4473 | 236 | 0955 | 9128 | 9 |
| 2 | 4099 | 439 | 4494 | 225 | 0963 | 9121 | 8 |
| 3 | 4115 | 430 | 4515 | 215 | 0972 | 9114 | 7 |
| 4 | 4131 | 421 | 4536 | 204 | 0981 | 9107 | 6 |
| 24,5 | 0,4147 | 2,411 | 0,4557 | 2,194 | 1,0989 | 0,9100 | 65,5 |
| 6 | 4163 | 402 | 4578 | 184 | 0998 | 9092 | 4 |
| 7 | 4179 | 393 | 4599 | 174 | 1007 | 9085 | 3 |
| 8 | 4195 | 384 | 4621 | 164 | 1016 | 9078 | 2 |
| 9 | 4210 | 375 | 4642 | 154 | 1025 | 9070 | 1 |
| 25,0 | 0,4226 | 2,366 | 0,4663 | 2,145 | 1,1034 | 0,9063 | 65,0 |
| 1 | 4242 | 357 | 4684 | 135 | 1043 | 9056 | 9 |
| 2 | 4258 | 349 | 4706 | 125 | 1052 | 9048 | 8 |
| 3 | 4274 | 340 | 4727 | 116 | 1061 | 9041 | 7 |
| 4 | 4289 | 331 | 4748 | 106 | 1070 | 9033 | 6 |
| 25,5 | 0,4305 | 2,323 | 0,4770 | 2,097 | 1,1079 | 0,9026 | 64,5 |
| 6 | 4321 | 314 | 4791 | 087 | 1089 | 9018 | 4 |
| 7 | 4337 | 306 | 4813 | 078 | 1098 | 9011 | 3 |
| 8 | 4352 | 298 | 4834 | 069 | 1107 | 9003 | 2 |
| 9 | 4368 | 289 | 4856 | 059 | 1117 | 8996 | 1 |
| 26,0 | 0,4384 | 2,281 | 0,4877 | 2,050 | 1,1126 | 0,8988 | 64,0 |
| 1 | 4399 | 273 | 4899 | 041 | 1136 | 8980 | 9 |
| 2 | 4415 | 265 | 4921 | 032 | 1145 | 8973 | 8 |
| 3 | 4431 | 257 | 4942 | 023 | 1155 | 8965 | 7 |
| 4 | 4446 | 249 | 4964 | 014 | 1164 | 8957 | 6 |
| 26,5 | 0,4462 | 2,241 | 0,4986 | 2,0057 | 1,1174 | 0,8949 | 63,5 |
| 6 | 4478 | 233 | 5008 | 1,9970 | 1184 | 8942 | 4 |
| 7 | 4493 | 226 | 5029 | 9883 | 1194 | 8934 | 3 |
| 8 | 4509 | 218 | 5051 | 9797 | 1203 | 8926 | 2 |
| 9 | 4524 | 210 | 5073 | 9711 | 1213 | 8918 | 1 |
| 27,0 | 0,4540 | 2,203 | 0,5095 | 1,9626 | 1,1223 | 0,8910 | 63,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 27,0 | 0,4540 | 2,203 | 0,5095 | 1,9626 | 1,1223 | 0,8910 | 63,0 |
| 1 | 4555 | 195 | 5117 | 9542 | 1233 | 8902 | 9 |
| 2 | 4571 | 188 | 5139 | 9458 | 1243 | 8894 | 8 |
| 3 | 4586 | 180 | 5161 | 9375 | 1253 | 8886 | 7 |
| 4 | 4602 | 173 | 5184 | 9292 | 1264 | 8878 | 6 |
| 27,5 | 0,4617 | 2,166 | 0,5206 | 1,9210 | 1,1274 | 0,8870 | 62,5 |
| 6 | 4633 | 158 | 5228 | 9128 | 1284 | 8862 | 4 |
| 7 | 4648 | 151 | 5250 | 9047 | 1294 | 8854 | 3 |
| 8 | 4664 | 144 | 5272 | 8967 | 1305 | 8846 | 2 |
| 9 | 4679 | 137 | 5295 | 8887 | 1315 | 8838 | 1 |
| 28,0 | 0,4695 | 2,130 | 0,5317 | 1,8807 | 1,1326 | 0,8829 | 62,0 |
| 1 | 4710 | 123 | 5340 | 8728 | 1336 | 8821 | 9 |
| 2 | 4726 | 116 | 5362 | 8650 | 1347 | 8813 | 8 |
| 3 | 4741 | 109 | 5384 | 8572 | 1357 | 8805 | 7 |
| 4 | 4756 | 102 | 0,5407 | 8495 | 1368 | 8796 | 6 |
| 28,5 | 0,4772 | 2,096 | 5430 | 8418 | 1,1379 | 0,8788 | 61,5 |
| 6 | 4787 | 089 | 5452 | 1,8341 | 1390 | 8780 | 4 |
| 7 | 4802 | 082 | 5475 | 8265 | 1401 | 8771 | 3 |
| 8 | 4818 | 076 | 5498 | 8190 | 1412 | 8763 | 2 |
| 9 | 4833 | 069 | 0,5520 | 8115 | 1423 | 8755 | 1 |
| 29,0 | 0,4848 | 2,063 | 5543 | 1,8040 | 1,1434 | 0,8746 | 61,0 |
| 1 | 4863 | 056 | 5566 | 7966 | 1445 | 8738 | 9 |
| 2 | 4879 | 050 | 5589 | 7893 | 1456 | 8729 | 8 |
| 3 | 4894 | 043 | 5612 | 7820 | 1467 | 8721 | 7 |
| 4 | 4909 | 037 | 5635 | 7747 | 1478 | 8712 | 6 |
| 29,5 | 0,4924 | 2,031 | 0,5658 | 1,7675 | 1,1490 | 0,8704 | 60,5 |
| 6 | 4939 | 025 | 5681 | 7603 | 1501 | 8695 | 4 |
| 7 | 4955 | 018 | 5704 | 7532 | 1512 | 8686 | 3 |
| 8 | 4970 | 012 | 5727 | 7461 | 1524 | 8678 | 2 |
| 9 | 4985 | 006 | 5750 | 7391 | 1535 | 8669 | 1 |
| 30,0 | 0,5000 | 2,000 | 0,5774 | 1,7321 | 1,1547 | 0,8660 | 60,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 30,0 | 0,5000 | 2,0000 | 0,5774 | 1,7321 | 1,1547 | 0,8660 | 60,0 |
| 1 | 5015 | 1,9940 | 5797 | 7251 | 1559 | 8652 | 9 |
| 2 | 5030 | 9880 | 5820 | 7182 | 1570 | 8643 | 8 |
| 3 | 5045 | 9821 | 5844 | 7113 | 1582 | 8634 | 7 |
| 4 | 5060 | 9762 | 5867 | 7045 | 1594 | 8625 | 6 |
| 30,5 | 0,5075 | 1,9703 | 0,5890 | 1,6977 | 1,1606 | 0,8616 | 59,5 |
| 6 | 5090 | 9645 | 5914 | 6909 | 1618 | 8607 | 4 |
| 7 | 5105 | 9587 | 5938 | 6842 | 1630 | 8599 | 3 |
| 8 | 5120 | 9530 | 5961 | 6775 | 1642 | 8590 | 2 |
| 9 | 5135 | 9473 | 5985 | 6709 | 1654 | 8581 | 1 |
| 31,0 | 0,5150 | 1,9416 | 0,6009 | 1,6643 | 1,1666 | 0,8572 | 59,0 |
| 1 | 5165 | 9360 | 6032 | 6577 | 1679 | 8563 | 9 |
| 2 | 5180 | 9304 | 6056 | 6512 | 1691 | 8554 | 8 |
| 3 | 5195 | 9249 | 6080 | 6447 | 1703 | 8545 | 7 |
| 4 | 5210 | 9194 | 6104 | 6383 | 1716 | 8536 | 6 |
| 31,5 | 0,5225 | 1,9139 | 0,6128 | 1,6319 | 1,1728 | 0,8526 | 58,5 |
| 6 | 5240 | 9084 | 6152 | 6255 | 1741 | 8517 | 4 |
| 7 | 5225 | 9031 | 6176 | 6191 | 1753 | 8508 | 3 |
| 8 | 5270 | 8977 | 6200 | 6128 | 1766 | 8499 | 2 |
| 9 | 5284 | 8924 | 6224 | 6066 | 1779 | 8490 | 1 |
| 32,0 | 0,5299 | 1,8871 | 0,6249 | 1,6003 | 1,1792 | 0,8480 | 58,0 |
| 1 | 5314 | 8818 | 6273 | 5941 | 1805 | 8471 | 9 |
| 2 | 5329 | 8766 | 6297 | 5880 | 1818 | 8462 | 8 |
| 3 | 5344 | 8714 | 6322 | 5818 | 1831 | 8453 | 7 |
| 4 | 5358 | 8663 | 6346 | 5757 | 1844 | 8443 | 6 |
| 32,5 | 0,5373 | 1,8612 | 0,6371 | 1,5697 | 1,1857 | 0,8334 | 57,5 |
| 6 | 5388 | 8561 | 6395 | 5637 | 1870 | 8425 | 4 |
| 7 | 5402 | 8510 | 6420 | 5577 | 1883 | 8415 | 3 |
| 8 | 5417 | 8460 | 6445 | 5517 | 1897 | 8406 | 2 |
| 9 | 5432 | 8410 | 6469 | 5458 | 1910 | 8396 | 1 |
| 33,0 | 0,5446 | 1,8361 | 0,6494 | 1,5399 | 1,1924 | 0,8387 | 57,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 33,0 | 0,5446 | 1,8361 | 0,6494 | 1,5399 | 1,1924 | 0,8387 | 57,0 |
| 1 | 5461 | 8312 | 6519 | 5340 | 1937 | 8377 | 9 |
| 2 | 5476 | 8263 | 6544 | 5282 | 1951 | 8368 | 8 |
| 3 | 5490 | 8214 | 6569 | 5224 | 1964 | 8358 | 7 |
| 4 | 5505 | 8166 | 6594 | 5166 | 1978 | 8348 | 6 |
| 33,5 | 0,5519 | 1,8118 | 0,6619 | 1,5108 | 1,1992 | 0,8339 | 56,5 |
| 6 | 5534 | 8070 | 6644 | 5051 | 2006 | 8329 | 4 |
| 7 | 5548 | 8023 | 6669 | 4994 | 2020 | 8320 | 3 |
| 8 | 5563 | 7976 | 6694 | 4938 | 2034 | 8310 | 2 |
| 9 | 5577 | 7929 | 6720 | 4882 | 2048 | 8300 | 1 |
| 34,0 | 0,5592 | 1,7883 | 0,6745 | 1,4826 | 1,2062 | 0,8290 | 56,0 |
| 1 | 5606 | 7837 | 6771 | 4770 | 2076 | 8281 | 9 |
| 2 | 5621 | 7791 | 6796 | 4715 | 2091 | 8271 | 8 |
| 3 | 5635 | 7745 | 6822 | 4659 | 2105 | 8261 | 7 |
| 4 | 5650 | 7700 | 6847 | 4605 | 2120 | 8251 | 6 |
| 34,5 | 0,5664 | 1,7655 | 0,6873 | 1,4550 | 1,2134 | 0,8241 | 55,5 |
| 6 | 5678 | 7610 | 6899 | 4496 | 2149 | 8231 | 4 |
| 7 | 5693 | 7566 | 6924 | 4442 | 2163 | 8221 | 3 |
| 8 | 5707 | 7522 | 6950 | 4388 | 2178 | 8211 | 2 |
| 9 | 5721 | 7478 | 6976 | 4335 | 2193 | 8202 | 1 |
| 35,0 | 0,5736 | 1,7434 | 0,7002 | 1,4281 | 1,2208 | 0,8192 | 55,0 |
| 1 | 5750 | 7391 | 7028 | 4229 | 2223 | 8181 | 9 |
| 2 | 5764 | 7348 | 7054 | 4176 | 2238 | 8171 | 8 |
| 3 | 5779 | 7305 | 7080 | 3124 | 2253 | 8161 | 7 |
| 4 | 5793 | 7263 | 7107 | 4071 | 2268 | 8151 | 6 |
| 35,5 | 0,5807 | 1,7221 | 0,7133 | 1,4019 | 1,2283 | 0,8141 | 54,5 |
| 6 | 5821 | 7179 | 7159 | 3968 | 2299 | 8131 | 4 |
| 7 | 5835 | 7137 | 7186 | 3916 | 2314 | 8121 | 3 |
| 8 | 5850 | 7095 | 7212 | 3865 | 2329 | 8111 | 2 |
| 9 | 5864 | 7054 | 7239 | 3814 | 2345 | 8100 | 1 |
| 36,0 | 0,5878 | 1,7013 | 0,7265 | 1,3764 | 1,2361 | 0,8090 | 54,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| | Натуральные значения | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 36,0 | 0,5878 | 1,7013 | 0,7265 | 1,3764 | 1,2361 | 0,8090 | 54,0 |
| 1 | 5892 | 6972 | 7292 | 3713 | 2376 | 8080 | 9 |
| 2 | 5906 | 6932 | 7319 | 3663 | 2392 | 8070 | 8 |
| 3 | 5920 | 6892 | 7346 | 3613 | 2408 | 8059 | 7 |
| 4 | 5934 | 6852 | 7373 | 3564 | 2424 | 8049 | 6 |
| 36,5 | 0,5948 | 1,6812 | 0,7400 | 1,3514 | 1,2440 | 0,8039 | 53,5 |
| 6 | 5962 | 6772 | 7427 | 3465 | 2456 | 8028 | 4 |
| 7 | 5976 | 6733 | 7454 | 3416 | 2472 | 8018 | 3 |
| 8 | 5990 | 6694 | 7481 | 3367 | 2489 | 8007 | 2 |
| 9 | 6004 | 6655 | 7508 | 3319 | 2505 | 7997 | 1 |
| 37,0 | 0,6018 | 1,6616 | 0,7536 | 1,3270 | 1,2521 | 0,7966 | 53,0 |
| 1 | 6032 | 6578 | 7563 | 3222 | 2538 | 7976 | 9 |
| 2 | 6046 | 6540 | 7590 | 3175 | 2554 | 7965 | 8 |
| 3 | 6060 | 6502 | 7618 | 3127 | 2571 | 7955 | 7 |
| 4 | 6074 | 6464 | 7646 | 3079 | 2588 | 7944 | 6 |
| 37,5 | 0,6088 | 1,6427 | 0,7673 | 1,3032 | 1,2605 | 0,7934 | 52,5 |
| 6 | 6101 | 6390 | 7701 | 2985 | 2622 | 7923 | 4 |
| 7 | 6115 | 6353 | 7729 | 2938 | 2639 | 7912 | 3 |
| 8 | 6129 | 6316 | 7757 | 2892 | 2656 | 7902 | 2 |
| 9 | 6143 | 6279 | 7785 | 2846 | 2673 | 7891 | 1 |
| 38,0 | 0,6157 | 1,6243 | 0,7813 | 1,2799 | 1,2690 | 0,7880 | 52,0 |
| 1 | 6170 | 6207 | 7841 | 2753 | 2708 | 7869 | 9 |
| 2 | 6184 | 6171 | 7869 | 2708 | 2725 | 7859 | 8 |
| 3 | 6198 | 6135 | 7898 | 2662 | 2742 | 7848 | 7 |
| 4 | 6211 | 6099 | 7926 | 2617 | 2760 | 7837 | 6 |
| 38,5 | 0,6225 | 1,6064 | 0,7954 | 1,2572 | 1,2778 | 0,7826 | 51,5 |
| 6 | 6239 | 6029 | 7983 | 2527 | 2796 | 7815 | 4 |
| 7 | 6252 | 5994 | 8012 | 2482 | 2813 | 7804 | 3 |
| 8 | 6266 | 5959 | 8040 | 2437 | 2831 | 7793 | 2 |
| 9 | 6280 | 5925 | 8069 | 2393 | 2849 | 7782 | 1 |
| 39,0 | 0,6293 | 1,5890 | 0,8098 | 1,2349 | 1,2868 | 0,7771 | 51,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 39,0 | 0,6293 | 1,5890 | 0,8098 | 1,2349 | 1,2868 | 0,7771 | 51,0 |
| 1 | 6307 | 5856 | 8127 | 2305 | 2886 | 7760 | 9 |
| 2 | 6320 | 5822 | 8156 | 2261 | 2904 | 7749 | 8 |
| 3 | 6334 | 5788 | 8185 | 2218 | 2923 | 7738 | 7 |
| 4 | 6347 | 5755 | 8214 | 2174 | 2941 | 7727 | 6 |
| 39,5 | 0,6361 | 1,5721 | 0,8243 | 1,2131 | 1,2960 | 0,7716 | 50,5 |
| 6 | 6374 | 5688 | 8273 | 2088 | 2978 | 7705 | 4 |
| 7 | 6388 | 5655 | 8302 | 2045 | 2997 | 7694 | 3 |
| 8 | 6401 | 5622 | 8332 | 2002 | 3016 | 7683 | 2 |
| 9 | 6414 | 5590 | 8361 | 1960 | 3035 | 7672 | 1 |
| 40,0 | 0,6428 | 1,5557 | 0,8391 | 1,1918 | 1,3054 | 0,7660 | 50,0 |
| 1 | 6441 | 5525 | 8421 | 1875 | 3073 | 7649 | 9 |
| 2 | 6455 | 5493 | 8451 | 1833 | 3093 | 7638 | 8 |
| 3 | 6468 | 5461 | 8481 | 1792 | 3112 | 7627 | 7 |
| 4 | 6481 | 5429 | 8511 | 1750 | 3131 | 7615 | 6 |
| 40,5 | 0,6494 | 1,5398 | 0,8541 | 1,1708 | 1,3151 | 0,7604 | 49,5 |
| 6 | 6508 | 5366 | 8571 | 1667 | 3171 | 7593 | 4 |
| 7 | 6521 | 5335 | 8601 | 1626 | 3190 | 7581 | 3 |
| 8 | 6534 | 5304 | 8632 | 1585 | 3210 | 7570 | 2 |
| 9 | 6547 | 5273 | 8662 | 1544 | 3230 | 7559 | 1 |
| 41,0 | 0,6561 | 1,5243 | 0,8693 | 1,1504 | 1,3250 | 0,7547 | 49,0 |
| 1 | 6574 | 5212 | 8724 | 1463 | 3270 | 7536 | 9 |
| 2 | 6587 | 5182 | 8754 | 1423 | 3291 | 7524 | 8 |
| 3 | 6600 | 5151 | 8785 | 1383 | 3311 | 7513 | 7 |
| 4 | 6613 | 5121 | 8816 | 1343 | 3331 | 7501 | 6 |
| 41,5 | 0,6626 | 1,5092 | 0,8847 | 1,1303 | 1,3352 | 0,7490 | 48,5 |
| 6 | 6639 | 5062 | 8878 | 1263 | 3373 | 7478 | 4 |
| 7 | 6652 | 5032 | 8910 | 1224 | 3393 | 7466 | 3 |
| 8 | 6665 | 5003 | 8941 | 1184 | 3414 | 7455 | 2 |
| 9 | 6678 | 4974 | 8972 | 1145 | 3435 | 7443 | 1 |
| 42,0 | 0,6691 | 1,4945 | 0,9004 | 1,1106 | 1,3456 | 0,7431 | 48,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

| Натуральные значения | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α° | sin | cosec | tg | ctg | sec | cos | α° |
| 42,0 | 0,6691 | 1,4945 | 0,9004 | 1,1106 | 1,3456 | 0,7431 | 48,0 |
| 1 | 6704 | 4916 | 9036 | 1067 | 3478 | 7420 | 9 |
| 2 | 6717 | 4887 | 9067 | 1028 | 3499 | 7408 | 8 |
| 3 | 6730 | 4859 | 9099 | 0990 | 3520 | 7396 | 7 |
| 4 | 6743 | 4830 | 9131 | 0951 | 3542 | 7385 | 6 |
| 42,5 | 0,6756 | 1,4802 | 0,9163 | 1,0913 | 1,3563 | 0,7373 | 47,5 |
| 6 | 6769 | 4774 | 9195 | 0875 | 3585 | 7361 | 4 |
| 7 | 6782 | 4746 | 9228 | 0837 | 3607 | 7349 | 3 |
| 8 | 6794 | 4718 | 9260 | 0799 | 3629 | 7337 | 2 |
| 9 | 6807 | 4690 | 9293 | 0761 | 3651 | 7325 | 1 |
| 43,0 | 0,6820 | 1,4663 | 0,9325 | 1,0724 | 1,3673 | 0,7314 | 47,0 |
| 1 | 6833 | 4635 | 9358 | 0686 | 3696 | 7302 | 9 |
| 2 | 6845 | 4608 | 9391 | 0649 | 3718 | 7290 | 8 |
| 3 | 6858 | 4581 | 9424 | 0612 | 3741 | 7278 | 7 |
| 4 | 6871 | 4554 | 9457 | 0575 | 3763 | 7266 | 6 |
| 43,5 | 0,6884 | 1,4527 | 0,9490 | 1,0538 | 1,3786 | 0,7254 | 46,5 |
| 6 | 6896 | 4501 | 9523 | 0501 | 3809 | 7242 | 4 |
| 7 | 6909 | 4474 | 9556 | 0464 | 3832 | 7230 | 3 |
| 8 | 6921 | 4448 | 9590 | 0428 | 3855 | 7218 | 2 |
| 9 | 6934 | 4422 | 9623 | 0392 | 3878 | 7206 | 1 |
| 44,0 | 0,6947 | 1,4396 | 0,9657 | 1,0355 | 1,3902 | 0,7193 | 46,0 |
| 1 | 6959 | 4370 | 9691 | 0319 | 3925 | 7181 | 9 |
| 2 | 6972 | 4344 | 9725 | 0283 | 3949 | 7169 | 8 |
| 3 | 6984 | 4318 | 9759 | 0247 | 3972 | 7157 | 7 |
| 4 | 6997 | 4293 | 9793 | 0212 | 3996 | 7145 | 6 |
| 44,5 | 0,7009 | 1,4267 | 0,9827 | 1,0176 | 1,4020 | 0,7133 | 45,5 |
| 6 | 7022 | 4242 | 9861 | 0141 | 4044 | 7120 | 4 |
| 7 | 7034 | 4217 | 9896 | 0105 | 4069 | 7108 | 3 |
| 8 | 7046 | 4192 | 9930 | 0070 | 4093 | 7096 | 2 |
| 9 | 7059 | 4167 | 9965 | 0035 | 4118 | 7083 | 1 |
| 45,0 | 0,7071 | 1,4142 | 1,0000 | 1,0000 | 1,4142 | 0,7071 | 45,0 |

| Δ | Пропорциональные части | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 20 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 30 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 40 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 50 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 60 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 70 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 80 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 90 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Таблица 22

## Натуральные значения тригонометрических функций для углов в радианной мере

Натуральные значения синусов

| ϱ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ϱ° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0600 | 0699 | 0799 | 0899 | 0,0 |
| 0,1 | 0,0998 | 1098 | 1197 | 1296 | 1395 | 1494 | 1593 | 1692 | 1790 | 1889 | 0,1 |
| 0,2 | 0,1987 | 2085 | 2182 | 2280 | 2377 | 2474 | 2571 | 2667 | 2764 | 2860 | 0,2 |
| 0,3 | 0,2955 | 3051 | 3146 | 3240 | 3335 | 3429 | 3523 | 3616 | 3709 | 3802 | 0,3 |
| 0,4 | 0,3894 | 3986 | 4078 | 4169 | 4259 | 4350 | 4439 | 4529 | 4618 | 4706 | 0,4 |
| 0,5 | 0,4794 | 4882 | 4969 | 5055 | 5141 | 5227 | 5312 | 5396 | 5480 | 5564 | 0,5 |
| 0,6 | 0,5646 | 5729 | 5810 | 5891 | 5972 | 6052 | 6131 | 6210 | 6288 | 6365 | 0,6 |
| 0,7 | 0,6442 | 6518 | 6594 | 6669 | 6743 | 6816 | 6889 | 6961 | 7033 | 7104 | 0,7 |
| 0,8 | 0,7174 | 7243 | 7311 | 7379 | 7446 | 7513 | 7578 | 7643 | 7707 | 7771 | 0,8 |
| 0,9 | 0,7833 | 7895 | 7956 | 8016 | 8076 | 8134 | 8192 | 8249 | 8305 | 8360 | 0,9 |
| 1,0 | 0,8415 | 8468 | 8521 | 8573 | 8624 | 8674 | 8724 | 8772 | 8820 | 8866 | 1,0 |
| 1,1 | 0,8912 | 8957 | 9001 | 9044 | 9086 | 9128 | 9168 | 9208 | 9246 | 9284 | 1,1 |
| 1,2 | 0,9320 | 9356 | 9391 | 9425 | 9458 | 9490 | 9521 | 9551 | 9580 | 9608 | 1,2 |
| 1,3 | 0,9636 | 9662 | 9687 | 9711 | 9735 | 9757 | 9779 | 9799 | 9819 | 9837 | 1,3 |
| 1,4 | 0,9854 | 9871 | 9887 | 9901 | 9915 | 9927 | 9939 | 9949 | 9959 | 9967 | 1,4 |
| 1,5 | 0,9975 | 9982 | 9987 | 9992 | 9995 | 9998 | 9999 | 1,000 | — | — | 1,5 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,0000 | 0000 | 9998 | 9996 | 9992 | 9988 | 9982 | 9976 | 9968 | 9960 | 0,0 |
| 0,1 | 0,9950 | 9940 | 9928 | 9916 | 9902 | 9888 | 9872 | 9856 | 9838 | 9820 | 0,1 |
| 0,2 | 0,9801 | 9780 | 9759 | 9737 | 9713 | 9689 | 9664 | 9638 | 9611 | 9582 | 0,2 |
| 0,3 | 0,9553 | 9523 | 9492 | 9460 | 9428 | 9394 | 9359 | 9323 | 9287 | 9249 | 0,3 |
| 0,4 | 0,9211 | 9171 | 9131 | 9090 | 9048 | 9004 | 8961 | 8916 | 8870 | 8823 | 0,4 |
| 0,5 | 0,8776 | 8727 | 8678 | 8628 | 8577 | 8525 | 8473 | 8419 | 8365 | 8309 | 0,5 |
| 0,6 | 0,8253 | 8196 | 8139 | 8080 | 8021 | 7961 | 7900 | 7838 | 7776 | 7712 | 0,6 |
| 0,7 | 0,7648 | 7584 | 7518 | 7452 | 7385 | 7317 | 7248 | 7179 | 7109 | 7038 | 0,7 |
| 0,8 | 0,6967 | 6895 | 6822 | 6749 | 6675 | 6600 | 6524 | 6448 | 6372 | 6294 | 0,8 |
| 0,9 | 0,6216 | 6137 | 6058 | 5978 | 5898 | 5817 | 5735 | 5653 | 5570 | 5487 | 0,9 |
| 1,0 | 0,5403 | 5319 | 5234 | 5148 | 5062 | 4976 | 4889 | 4801 | 4713 | 4625 | 1,0 |
| 1,1 | 0,4536 | 4447 | 4357 | 4267 | 4176 | 4085 | 3993 | 3902 | 3809 | 3717 | 1,1 |
| 1,2 | 0,3624 | 3530 | 3436 | 3342 | 3248 | 3153 | 3058 | 2963 | 2867 | 2771 | 1,2 |
| 1,3 | 0,2675 | 2579 | 2482 | 2385 | 2288 | 2190 | 2092 | 1994 | 1896 | 1798 | 1,3 |
| 1,4 | 0,1700 | 1601 | 1502 | 1403 | 1304 | 1205 | 1106 | 1006 | 0907 | 0807 | 1,4 |
| 1,5 | 0,0707 | 0608 | 0508 | 0408 | 0308 | 0208 | 0108 | 0008 | — | — | 1,5 |
| ϱ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ϱ° |

Натуральные значения косинусов

**Пример:** sin 1,24 = 0,9458.

Натуральные значения тангенсов

| φ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | φ° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0601 | 0701 | 0802 | 0902 | 0,0 |
| 0,1 | 0,1003 | 1104 | 1206 | 1307 | 1409 | 1511 | 1614 | 1717 | 1820 | 1923 | 0,1 |
| 0,2 | 0,2027 | 2131 | 2236 | 2341 | 2447 | 2553 | 2660 | 2768 | 2876 | 2984 | 0,2 |
| 0,3 | 0,3093 | 3203 | 3314 | 3425 | 3537 | 3650 | 3764 | 3879 | 3994 | 4111 | 0,3 |
| 0,4 | 0,4228 | 4346 | 4466 | 4586 | 4708 | 4831 | 4954 | 5080 | 5206 | 5334 | 0,4 |
| 0,5 | 0,5463 | 5594 | 5726 | 5859 | 5994 | 6131 | 6269 | 6410 | 6552 | 6696 | 0,5 |
| 0,6 | 0,6841 | 6989 | 7139 | 7291 | 7445 | 7602 | 7761 | 7923 | 8087 | 8253 | 0,6 |
| 0,7 | 0,8423 | 8595 | 8771 | 8949 | 9131 | 9316 | 9505 | 9697 | 9893 | 0092 | 0,7 |
| 0,8 | 1,0296 | 0505 | 0717 | 0934 | 1156 | 1383 | 1616 | 1853 | 2097 | 2346 | 0,8 |
| 0,9 | 1,2602 | 2864 | 3133 | 3409 | 3692 | 3984 | 4284 | 4592 | 4910 | 5237 | 0,9 |
| 1,0 | 1,5574 | 5922 | 6281 | 6652 | 7036 | 7433 | 7844 | 8270 | 8712 | 9171 | 1,0 |
| 1,1 | 1,9648 | ·0143 | ·0660 | ·1198 | ·1759 | ·2845 | ·2958 | ·3600 | ·4273 | ·4979 | 1,1 |
| 1,2 | 2,572 | 650 | 733 | 820 | 912 | ·010 | ·113 | ·224 | ·341 | ·467 | 1,2 |
| 1,3 | 3,602 | 747 | 903 | 4,072 | 4,256 | 4,455 | 4,673 | 4,913 | 5,177 | 5,471 | 1,3 |
| 1,4 | 5,798 | 6,165 | 6,581 | 7,055 | 7,602 | 8,238 | 8,989 | 9,887 | 10,98 | 12,35 | 1,4 |
| 1,5 | 14,10 | 16,43 | 19,67 | 24,50 | 32,46 | 48,08 | 92,62 | 1255,8 | — | — | 1,5 |

| φ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | φ° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | — | 100,0 | 49,99 | 33,32 | 24,99 | 19,98 | 16,65 | 14,26 | 12,47 | 11,08 | 0,0 |
| 0,1 | 9,967 | 9,054 | 8,293 | 7,649 | 7,096 | 6,617 | 6,197 | 5,826 | 5,495 | 5,200 | 0,1 |
| 0,2 | 4,933 | 4,692 | 4,472 | 4,271 | 4,086 | 3,3916 | 3,3759 | 3,3613 | 3,3478 | 3,3351 | 0,2 |
| 0,3 | 3,2327 | 1218 | 0176 | ·9195 | ·8270 | ·7395 | ·6567 | ·5782 | ·5037 | ·4328 | 0,3 |
| 0,4 | 2,3652 | 3008 | 2393 | 1804 | 1241 | 0702 | 0184 | ·9686 | ·9208 | ·8748 | 0,4 |
| 0,5 | 1,8305 | 7878 | 7465 | 7067 | 6683 | 6310 | 5950 | 5601 | 5263 | 4935 | 0,5 |
| 0,6 | 1,4617 | 4308 | 4007 | 3715 | 3431 | 3154 | 2885 | 2622 | 2366 | 2116 | 0,6 |
| 0,7 | 1,1872 | 1634 | 1402 | 1174 | 0952 | 0734 | 0521 | 0313 | 0109 | ·9908 | 0,7 |
| 0,8 | 0,9712 | 9520 | 9331 | 9146 | 8964 | 8785 | 8609 | 8437 | 8267 | 8100 | 0,8 |
| 0,9 | 0,7936 | 7774 | 7615 | 7458 | 7303 | 7151 | 7001 | 6853 | 6707 | 6563 | 0,9 |
| 1,0 | 0,6421 | 6281 | 6142 | 6005 | 5870 | 5736 | 5604 | 5473 | 5344 | 5216 | 1,0 |
| 1,1 | 0,5090 | 4964 | 4840 | 4718 | 4596 | 4475 | 4356 | 4237 | 4120 | 4003 | 1,1 |
| 1,2 | 0,3888 | 3773 | 3659 | 3546 | 3434 | 3323 | 3212 | 3102 | 2993 | 2884 | 1,2 |
| 1,3 | 0,2776 | 2669 | 2562 | 2456 | 2350 | 2245 | 2140 | 2035 | 1931 | 1828 | 1,3 |
| 1,4 | 0,1725 | 1622 | 1519 | 1417 | 1315 | 1214 | 1113 | 1011 | 1910 | 0810 | 1,4 |
| 1,5 | 0,0709 | 0609 | 0508 | 0408 | 0308 | 0208 | 0108 | 0008 | — | — | 1,5 |
| φ° | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | φ° |

Натуральные значения котангенсов

## Обратные тригонометрические функции

### Арксинусы

| $\varrho$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0600 | 0701 | 0801 | 0901 | 0,0 |
| 0,1 | 0,1002 | 1102 | 1203 | 1304 | 1405 | 1506 | 1607 | 1708 | 1810 | 1912 | 0,1 |
| 0,2 | 0,2014 | 2116 | 2218 | 2321 | 2424 | 2527 | 2630 | 2734 | 2838 | 2942 | 0,2 |
| 0,3 | 0,3047 | 3152 | 3257 | 3363 | 3469 | 3576 | 3683 | 3790 | 3898 | 4006 | 0,3 |
| 0,4 | 0,4115 | 4225 | 4334 | 4445 | 4556 | 4668 | 4780 | 4893 | 5007 | 5121 | 0,4 |
| 0,5 | 0,5236 | 5352 | 5469 | 5586 | 5704 | 5824 | 5944 | 6065 | 6187 | 6311 | 0,5 |
| 0,6 | 0,6435 | 6561 | 6687 | 6816 | 6945 | 7076 | 7208 | 7342 | 7478 | 7615 | 0,6 |
| 0,7 | 0,7754 | 7895 | 8038 | 8183 | 8331 | 8481 | 8633 | 8788 | 8947 | 9108 | 0,7 |
| 0,8 | 0,9273 | 9442 | 9614 | 9791 | 9973 | ·0160 | ·0353 | ·0552 | ·0759 | ·0973 | 0,8 |
| 0,9 | 1,1198 | 1433 | 1681 | 1944 | 2226 | 2532 | 2870 | 3252 | 3705 | 4293 | 0,9 |
| 1,0 | 1,5708 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,0 |

### Арккосинусы

| $\varrho$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\varrho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,5708 | 5608 | 5508 | 5408 | 5308 | 5208 | 5108 | 5007 | 4907 | 4807 | 0,0 |
| 0,1 | 1,4706 | 4606 | 4505 | 4404 | 4303 | 4202 | 4101 | 4000 | 3898 | 3796 | 0,1 |
| 0,2 | 1,3694 | 3592 | 3490 | 3387 | 3284 | 3181 | 3078 | 2974 | 2870 | 2766 | 0,2 |
| 0,3 | 1,2661 | 2556 | 2451 | 2345 | 2239 | 2132 | 2025 | 1918 | 1810 | 1702 | 0,3 |
| 0,4 | 1,1593 | 1483 | 1374 | 1263 | 1152 | ·1040 | ·0928 | ·0815 | ·0701 | ·0587 | 0,4 |
| 0,5 | 1,0472 | 0356 | 0239 | 0122 | 0004 | ·9884 | ·9764 | ·9643 | ·9521 | ·9397 | 0,5 |
| 0,6 | 0,9273 | 9147 | 9021 | 8892 | 8763 | 8632 | 8500 | 8366 | 8230 | 8093 | 0,6 |
| 0,7 | 0,7954 | 7813 | 7670 | 7525 | 7377 | 7227 | 7075 | 6920 | 6761 | 6600 | 0,7 |
| 0,8 | 0,6435 | 6266 | 6094 | 5917 | 5735 | 5548 | 5355 | 5156 | 4949 | 4735 | 0,8 |
| 0,9 | 0,4510 | 4275 | ·4027 | 3764 | 3482 | 3176 | 2838 | 2456 | 2003 | 1415 | 0,9 |
| 1,0 | 0,0000 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1,0 |

**Примеры.** 1. $\arcsin 0{,}42 = 0{,}4334$.
2. $\arccos 0{,}55 = 0{,}9884$.

Арктангенсы

| ϱ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ϱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0100 | 0200 | 0300 | 0400 | 0500 | 0599 | 0699 | 0798 | 0,898 | 0,0 |
| 0,1 | 0,0997 | 1096 | 1194 | 1293 | 1391 | 1489 | 1587 | 1684 | 1781 | 1878 | 0,1 |
| 0,2 | 0,1974 | 2070 | 2166 | 2261 | 2355 | 2450 | 2544 | 2637 | 2730 | 2823 | 0,2 |
| 0,3 | 0,2915 | 3006 | 3097 | 3187 | 3277 | 3367 | 3456 | 3544 | 3631 | 3719 | 0,3 |
| 0,4 | 0,3805 | 3891 | 3976 | 4061 | 4145 | 4229 | 4311 | 4394 | 4475 | 4556 | 0,4 |
| 0,5 | 0,4636 | 4716 | 4795 | 4874 | 4951 | 5028 | 5105 | 5181 | 5256 | 5330 | 0,5 |
| 0,6 | 0,5404 | 5477 | 5550 | 5622 | 5693 | 5764 | 5834 | 5903 | 5972 | 6040 | 0,6 |
| 0,7 | 0,6107 | 6174 | 6240 | 6306 | 6371 | 6435 | 6499 | 6562 | 6624 | 6686 | 0,7 |
| 0,8 | 0,6747 | 6808 | 6868 | 6928 | 6987 | 7045 | 7103 | 7160 | 7217 | 7273 | 0,8 |
| 0,9 | 0,7228 | 7383 | 7438 | 7491 | 7545 | 7598 | 7650 | 7702 | 7753 | 7804 | 0,9 |
| 1,0 | 0,7854 | 7904 | 7953 | 8002 | 8050 | 8098 | 8145 | 8192 | 8238 | 8284 | 1,0 |
| 1,1 | 0,8330 | 8375 | 8419 | 8464 | 8507 | 8551 | 8593 | 8636 | 8678 | 8719 | 1,1 |
| 1,2 | 0,8761 | 8801 | 8842 | 8882 | 8921 | 8961 | 8999 | 9038 | 9076 | 9114 | 1,2 |
| 1,3 | 0,9151 | 9188 | 9225 | 9261 | 9297 | 9332 | 9368 | 9403 | 9437 | 9472 | 1,3 |
| 1,4 | 0,9505 | 9539 | 9572 | 9605 | 9638 | 9670 | 9703 | 9734 | 9766 | 9797 | 1,4 |
| 1,5 | 0,9828 | 9859 | 9889 | 9919 | 9949 | 9978 | 1,0008 | 1,0037 | 1,0065 | 1,0094 | 1,5 |

Арккотангенсы

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,5708 | 5608 | 5508 | 5408 | 5308 | 5208 | 5109 | 5009 | 4910 | 4810 | 0,0 |
| 0,1 | 1,4711 | 4612 | 4514 | 4415 | 4317 | 4219 | 4121 | 4024 | 3927 | 3830 | 0,1 |
| 0,2 | 1,3734 | 3638 | 3542 | 3447 | 3353 | 3258 | 3164 | 3071 | 2978 | 2885 | 0,2 |
| 0,3 | 1,2793 | 2702 | 2611 | 2520 | 2431 | 2341 | 2252 | 2164 | 2076 | 1989 | 0,3 |
| 0,4 | 1,1903 | 1817 | 1732 | 1647 | 1563 | 1479 | 1397 | 1314 | 1233 | 1152 | 0,4 |
| 0,5 | 1,1071 | 0992 | 0913 | 0834 | 0757 | 0680 | 0603 | 0527 | 0452 | 0378 | 0,5 |
| 0,6 | 1,0304 | 0231 | 0158 | 0086 | 0015 | ·9944 | ·9874 | ·9805 | ·9736 | ·9668 | 0,6 |
| 0,7 | 0,9601 | 9534 | 9468 | 9402 | 9337 | 9273 | 9209 | 9146 | 9084 | 9022 | 0,7 |
| 0,8 | 0,8961 | 8900 | 8840 | 8780 | 8721 | 8663 | 8605 | 8548 | 84,91 | 8435 | 0,8 |
| 0,9 | 0,8380 | 8325 | 8270 | 8217 | 8163 | 8110 | 8058 | 8006 | 7955 | 7904 | 0,9 |
| 1,0 | 0,7854 | 7804 | 7755 | 7706 | 7658 | 7610 | 7563 | 7516 | 7470 | 7424 | 1,0 |
| 1,1 | 0,7378 | 7333 | 7289 | 7244 | 7201 | 7157 | 7115 | 7072 | 7030 | 6989 | 1,1 |
| 1,2 | 0,6947 | 6907 | 6866 | 6826 | 6787 | 6747 | 6709 | 6670 | 6632 | 6594 | 1,2 |
| 1,3 | 0,6557 | 6520 | 6483 | 6447 | 6411 | 6375 | 6340 | 6305 | 6271 | 6236 | 1,3 |
| 1,4 | 0,6202 | 6169 | 6136 | 6103 | 6070 | 6037 | 6005 | 5974 | 5942 | 5911 | 1,4 |
| 1,5 | 0,5880 | 5849 | 5819 | 5789 | 5759 | 5730 | 5700 | 5671 | 5643 | 5614 | 1,5 |

**Примеры. 1.** arcctg 1,24 = 0,6787. **2.** arcctg 0,69 = 0,9668.

Таблица 24

## Перевод десятичных долей градуса в градусную меру

### Сотые доли

| Градусы | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0′00″ | 0′36″ | 1′12″ | 1′48″ | 2′24″ | 3′00″ | 3′36″ | 4′12″ | 4′48″ | 5′24″ |
| 0,1 | 6 00 | 6 36 | 7 12 | 7 48 | 8 24 | 9 00 | 9 36 | 10 12 | 10 48 | 11 24 |
| 0,2 | 12 00 | 12 36 | 13 12 | 13 48 | 14 24 | 15 00 | 15 36 | 16 12 | 16 48 | 17 24 |
| 0,3 | 18 00 | 18 36 | 19 12 | 19 48 | 20 24 | 21 00 | 21 36 | 22 12 | 22 48 | 23 24 |
| 0,4 | 24 00 | 24 36 | 25 12 | 25 48 | 26 24 | 27 00 | 27 36 | 28 12 | 28 48 | 29 24 |
| 0,5 | 30 00 | 30 36 | 31 12 | 31 48 | 32 24 | 33 00 | 33 36 | 34 12 | 34 48 | 35 24 |

### Тысячные доли

| Градусы | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0′00″,0 | 0′03″,6 | 0′07″,2 | 0′10″,8 | 0′14″,4 | 0′18″,0 | 0′21″,6 | 0′25″,2 | 0′28″,8 | 0′32″,4 |
| 0,01 | 0 36, 0 | 0 39, 6 | 0 43, 2 | 0 46, 8 | 0 50, 4 | 0 54, 0 | 0 57, 6 | 1 01, 2 | 1 04, 8 | 1 08, 4 |
| 0,02 | 1 12, 0 | 1 15, 6 | 1 19, 2 | 1 22, 8 | 1 26, 4 | 1 30, 0 | 1 33, 6 | 1 37, 2 | 1 40, 8 | 1 44, 4 |
| 0,03 | 1 48, 0 | 1 51, 6 | 1 55, 2 | 1 58, 8 | 2 02, 4 | 2 06, 0 | 2 09, 6 | 2 13, 2 | 2 16, 8 | 2 20, 4 |
| 0,04 | 2 24, 0 | 2 27, 6 | 2 31, 2 | 2 34, 8 | 2 38, 4 | 2 42, 0 | 2 45, 6 | 2 49, 2 | 2 52, 8 | 2 56, 4 |
| 0,05 | 3 00, 0 | 3 03, 6 | 3 07, 2 | 3 10, 8 | 3 14, 4 | 3 18, 0 | 3 21, 6 | 3 25, 2 | 3 28, 8 | 3 32, 4 |

### Десятитысячные доли

| Градусы | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,000 | 0′,00 | 0″,36 | 0″,72 | 1″,08 | 1″,44 | 1″,80 | 2″,16 | 2″,52 | 2″,88 | 3″,24 |
| 0,001 | 3, 60 | 3, 96 | 4, 32 | 4, 68 | 5, 04 | 5, 40 | 5, 76 | 6, 12 | 6, 48 | 6, 84 |
| 0,002 | 7, 20 | 7, 56 | 7, 92 | 8, 28 | 8, 64 | 9, 00 | 9, 36 | 9, 72 | 10, 08 | 10, 44 |
| 0,003 | 10, 80 | 11, 16 | 11, 52 | 11, 88 | 12, 24 | 12, 60 | 12, 96 | 13, 32 | 13, 68 | 14, 04 |
| 0,004 | 14, 40 | 14, 76 | 15, 12 | 15, 48 | 15, 84 | 16, 20 | 16, 56 | 16, 92 | 17, 28 | 17, 64 |
| 0,005 | 18, 00 | 18, 36 | 18, 72 | 19, 08 | 19, 44 | 19, 80 | 20, 16 | 20, 52 | 20, 88 | 21, 24 |

**Примеры.** 1. $4°,3124 = 4° + 18′,36″ + 8″,64 = 4°18′44″,64$.

2. $16°,7815 = 16°,5815 + 0°,2000 = 16° + 34′48″ + 12′00″ + 5″,40 = 16°46′53″,40$.

Таблица 25

## Перевод углов из градусной меры в радианы (длины дуг окружности радиуса 1)

| ° | Радианы | ° | Радианы | ′ | Радианы | ′ | Радианы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,01745 | 140 | 2,443$\bar{5}$ | 1 | 0,0002909 | 24 | 0,006981 |
| 2 | 03941 | 150 | 6180 | 2 | 0005818 | 25 | 007272 |
| 3 | 05236 | 160 | 7925 | 3 | 0008727 | 26 | 007563 |
| 4 | 0,06981 | 170 | 9671 | 4 | 0,0011636 | 27 | 0,007854 |
| 5 | 08727 | 180 | 3,1416 | 5 | 0014544 | 28 | 008145$\bar{5}$ |
| 6 | 0,10472 | 190 | 3161 | 6 | 0017453 | 29 | 008436 |
| 7 | 0,12217 | 200 | 3,4907 | 7 | 0,0020362 | 30 | 0,008727 |
| 8 | 13963 | 210 | 6652 | 8 | 0023271 | 31 | 009018 |
| 9 | 15708 | 220 | 8397 | 9 | 0026180 | 32 | 009308 |
| 10 | 0,17453 | 230 | 4,0143 | 10 | 0,0029089 | 33 | 0,009599 |
| 20 | 34907 | 240 | 1888 | 11 | 0031998 | 34 | 009890 |
| 30 | 52360 | 250 | 3633 | 12 | 0034907 | 35 | 010181 |
| 40 | 0,69813 | 260 | 4,5379 | 13 | 0,0037815 | 36 | 0,010472 |
| 50 | 87266 | 270 | 7124 | 14 | 0040724 | 37 | 010763 |
| 60 | 1,04720 | 280 | 8869 | 15 | 0043633 | 38 | 010054 |
| 70 | 1,22173 | 290 | 5,0615 | 16 | 0,0046542 | 39 | 0,011345$\bar{5}$ |
| 80 | 39626 | 300 | 2360 | 17 | 0049451 | 40 | 011636 |
| 90 | 57080 | 310 | 4105 | 18 | 0052360 | 41 | 011926 |
| 100 | 1,74533 | 320 | 5,5851 | 19 | 0,0055269 | 42 | 0,012217 |
| 110 | 91986 | 330 | 7596 | 20 | 0058178 | 43 | 012508 |
| 120 | 2,09440 | 340 | 9341 | 21 | 0061087 | 44 | 012799 |
| 130 | 2,26893 | 350 | 6,1087 | 22 | 0063995 | 45 | 013090 |
| | | | | 23 | 0,0066904 | 50 | 0,014544 |

| ″ | Радианы | ″ | Радианы | ″ | Радианы | ″ | Радианы |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000004848 | 5 | 0,00002424 | 9 | 0,00004363 | 40 | 0,0001939 |
| 2 | 9696 | 6 | 2909 | 10 | 4848 | 45 | 2182 |
| 3 | 0,000014544 | 7 | 3394 | 20 | 9696 | 50 | 2424 |
| 4 | 19393 | 8 | 3879 | 30 | 0,00014544 | 55 | 2666 |

***Примечание.*** 1 радиан (дуга, равная радиусу) равен 57°,17′44″,8.

**Пример.** 56°16′33″ перевести в радианы.

50° = 0,8726
6° = 0,10472
16′ = 0,00465
30″ = 0,00015
3″ = 0,00001

56°16′33″ = 0,98219

Таблица 26

## Перевод радианов в градусную меру

| Радианы | Градусная мера | Радианы | Градусная мера |
|---|---|---|---|
| 1 | 57°17′44″,8 | 0,001 | 0°03′26″,3 |
| 2 | 114 35 29,6 | 2 | 0 06 52 ,5 |
| 3 | 171 53 14,4 | 3 | 0 10 18 ,8 |
| 4 | 229°10′59″,2 | 0,004 | 0°13′45″,1 |
| 5 | 286 28 44 ,0 | 5 | 0 17 11 ,3 |
| 6 | 343 46 28 ,8 | 6 | 0 20 37 ,6 |
| 7 | 401°04′13″,6 | 0,007 | 0°24′03″,9 |
| 8 | 458 21 58 ,4 | 8 | 0 27 30 ,1 |
| 9 | 515 39 43 ,3 | 9 | 0 30 56 ,4 |
| 0,1 | 5°43′46″,5 | 0,0001 | 0°00′20″,6 |
| 2 | 11 27 33 ,0 | 2 | 0 00 41 ,3 |
| 3 | 17 11 19 ,4 | 3 | 0 01 01 ,9 |
| 0,4 | 22°55′05″,9 | 0,0004 | 0°01′22″,5 |
| 5 | 28 38 52 ,4 | 5 | 0 01 43 ,1 |
| 6 | 34 22 38 ,9 | 6 | 0 02 03 ,8 |
| 0,7 | 40°06′25″,4 | 0,0007 | 0°02′24″,4 |
| 8 | 45 50 11 ,8 | 8 | 0 02 45 ,0 |
| 9 | 51 33 58 ,3 | 9 | 0 03 05 ,6 |
| 0,01 | 0°34′22″,6 | 0,00001 | 0°00′02″,1 |
| 2 | 1 08 45 ,3 | 2 | 0 00 04 ,1 |
| 3 | 1 43 07 ,9 | 3 | 0 00 06 ,2 |
| 0,04 | 2°17′30″,6 | 0,00004 | 0°00′08″,3 |
| 5 | 2 51 53 ,2 | 5 | 0 00 10 ,3 |
| 6 | 3 26 15 ,9 | 6 | 0 00 12 ,4 |
| 0,07 | 4°00′38″,5 | 0,00007 | 0°00′14″,4 |
| 8 | 4 35 01 ,2 | 8 | 0 00 16 ,5 |
| 9 | 5 09 23 ,8 | 9 | 0 00 18 ,6 |

**Пример.** 7,325 радиана перевести в градусную меру.

$$\begin{aligned} 7 &= 401°04′13″,6 \\ 0,3 &= 17°11′19″,4 \\ 0,02 &= 1°08′45″,3 \\ 0,005 &= 0°17′11″,3 \\ \hline 7,325 &= 419°41′29″,6 \end{aligned}$$

Таблица 27

## Пропорциональные части

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,4 | 5,5 | 6,6 | 7,7 | 8,8 | 9,9 |
| 12 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,8 | 6,0 | 7,2 | 8,4 | 9,6 | 10,8 |
| 13 | 1,3 | 2,6 | 3,9 | 5,2 | 6,5 | 7,8 | 9,1 | 10,4 | 11,7 |
| 14 | 1,4 | 2,8 | 4,2 | 5,6 | 7,0 | 8,4 | 9,8 | 11,2 | 12,6 |
| 15 | 1,5 | 3,0 | 4,5 | 6,0 | 7,5 | 9,0 | 10,5 | 12,0 | 13,5 |
| 16 | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 8,0 | 9,6 | 11,2 | 12,8 | 14,4 |
| 17 | 1,7 | 3,4 | 5,1 | 6,8 | 8,5 | 10,2 | 11,9 | 13,6 | 15,3 |
| 18 | 1,8 | 3,6 | 5,4 | 7,2 | 9,0 | 10,8 | 12,6 | 14,4 | 16,2 |
| 19 | 1,9 | 3,8 | 5,7 | 7,6 | 9,5 | 11,4 | 13,3 | 15,2 | 17,1 |
| 20 | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,0 | 12,0 | 14,0 | 16,0 | 18,0 |
| 21 | 2,1 | 4,2 | 6,3 | 8,4 | 10,5 | 12,6 | 14,7 | 16,8 | 18,9 |
| 22 | 2,2 | 4,4 | 6,6 | 8,8 | 11,0 | 13,2 | 15,4 | 17,6 | 19,8 |
| 23 | 2,3 | 4,6 | 6,9 | 9,2 | 11,5 | 13,8 | 16,1 | 18,4 | 20,7 |
| 24 | 2,4 | 4,8 | 7,2 | 9,6 | 12,0 | 14,4 | 16,8 | 19,2 | 21,6 |
| 25 | 2,5 | 5,0 | 7,5 | 10,0 | 12,5 | 15,0 | 17,5 | 20,0 | 22,5 |
| 26 | 2,6 | 5,2 | 7,8 | 10,4 | 13,0 | 15,6 | 18,2 | 20,8 | 23,4 |
| 27 | 2,7 | 5,4 | 8,1 | 10,8 | 13,5 | 16,2 | 18,9 | 21,6 | 24,3 |
| 28 | 2,8 | 5,6 | 8,4 | 11,2 | 14,0 | 16,8 | 19,6 | 22,4 | 25,2 |
| 29 | 2,9 | 5,8 | 8,7 | 11,6 | 14,5 | 17,4 | 20,3 | 23,2 | 26,1 |
| 30 | 3,0 | 6,0 | 9,0 | 12,0 | 15,0 | 18,0 | 21,0 | 24,0 | 27,0 |
| 31 | 3,1 | 6,2 | 9,3 | 12,4 | 15,5 | 18,6 | 21,7 | 24,8 | 27,9 |
| 32 | 3,2 | 6,4 | 9,6 | 12,8 | 16,0 | 19,2 | 22,4 | 25,6 | 28,8 |
| 33 | 3,3 | 6,6 | 9,9 | 13,2 | 16,5 | 19,8 | 23,1 | 26,4 | 29,7 |
| 34 | 3,4 | 6,8 | 10,2 | 13,6 | 17,0 | 20,4 | 23,8 | 27,2 | 30,6 |
| 35 | 3,5 | 7,0 | 10,5 | 14,0 | 17,5 | 21,0 | 24,5 | 28,0 | 31,5 |
| 36 | 3,6 | 7,2 | 10,8 | 14,4 | 18,0 | 21,6 | 25,2 | 28,8 | 32,4 |
| 37 | 3,7 | 7,4 | 11,1 | 14,8 | 18,5 | 22,2 | 25,9 | 29,6 | 33,3 |
| 38 | 3,8 | 7,6 | 11,4 | 15,2 | 19,0 | 22,8 | 26,6 | 30,4 | 34,2 |
| 39 | 3,9 | 7,8 | 11,7 | 15,6 | 19,5 | 23,4 | 27,3 | 31,2 | 35,1 |
| 40 | 4,0 | 8,0 | 12,0 | 16,0 | 20,0 | 24,0 | 28,0 | 32,0 | 36,0 |
| 41 | 4,1 | 8,2 | 12,3 | 16,4 | 20,5 | 24,6 | 28,7 | 32,8 | 36,9 |
| 42 | 4,2 | 8,4 | 12,6 | 16,8 | 21,0 | 25,2 | 29,4 | 33,6 | 37,8 |
| 43 | 4,3 | 8,6 | 12,9 | 17,2 | 21,5 | 25,8 | 30,1 | 34,4 | 38,7 |
| 44 | 4,4 | 8,8 | 13,2 | 17,6 | 22,0 | 26,4 | 30,8 | 35,2 | 39,6 |
| 45 | 4,5 | 9,0 | 13,5 | 18,0 | 22,5 | 27,0 | 31,5 | 36,0 | 40,5 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 4,6 | 9,2 | 13,8 | 18,4 | 23,0 | 27,6 | 32,2 | 36,8 | 41,4 |
| 47 | 4,7 | 9,4 | 14,1 | 18,8 | 23,5 | 28,2 | 32,9 | 37,6 | 42,3 |
| 48 | 4,8 | 9,6 | 14,4 | 19,2 | 24,0 | 28,8 | 33,6 | 38,4 | 43,2 |
| 49 | 4,9 | 9,8 | 14,7 | 19,6 | 24,5 | 29,4 | 34,3 | 39,2 | 44,1 |
| 50 | 5,0 | 10,0 | 15,0 | 20,0 | 25,0 | 30,0 | 35,0 | 40,0 | 45,0 |
| 51 | 5,1 | 10,2 | 15,3 | 20,4 | 25,5 | 30,6 | 35,7 | 40,8 | 45,9 |
| 52 | 5,2 | 10,4 | 15,6 | 20,8 | 26,0 | 31,2 | 36,4 | 41,6 | 46,8 |
| 53 | 5,3 | 10,6 | 15,9 | 21,2 | 26,5 | 21,8 | 37,1 | 42,4 | 47,7 |
| 54 | 5,4 | 10,8 | 16,2 | 21,6 | 27,0 | 32,4 | 37,8 | 43,2 | 48,6 |
| 55 | 5,5 | 11,0 | 16,5 | 22,0 | 27,5 | 33,0 | 38,5 | 44,0 | 49,5 |
| 56 | 5,6 | 11,2 | 16,8 | 22,4 | 28,0 | 33,6 | 39,2 | 44,8 | 50,4 |
| 57 | 5,7 | 11,4 | 17,1 | 22,8 | 28,5 | 34,2 | 39,9 | 45,6 | 51,3 |
| 58 | 5,8 | 11,6 | 17,4 | 23,2 | 29,0 | 34,8 | 40,6 | 46,4 | 52,2 |
| 59 | 5,9 | 11,8 | 17,7 | 23,6 | 29,5 | 35,4 | 41,3 | 47,2 | 53,1 |
| 60 | 6,0 | 12,0 | 18,0 | 24,0 | 30,0 | 36,0 | 42,0 | 48,0 | 54,0 |
| 61 | 6,1 | 12,2 | 18,3 | 24,4 | 30,5 | 36,6 | 42,7 | 48,8 | 54,9 |
| 62 | 6,2 | 12,4 | 18,6 | 24,8 | 31,0 | 37,2 | 43,4 | 49,6 | 55,8 |
| 63 | 6,3 | 12,6 | 18,9 | 25,2 | 31,5 | 37,8 | 44,1 | 50,4 | 56,7 |
| 64 | 6,4 | 12,8 | 19,2 | 25,6 | 32,0 | 38,4 | 44,8 | 51,2 | 57,6 |
| 65 | 6,5 | 13,0 | 19,5 | 26,0 | 32,5 | 39,0 | 45,5 | 52,0 | 58,5 |
| 66 | 6,6 | 13,2 | 19,8 | 26,4 | 33,0 | 39,6 | 46,2 | 52,8 | 59,4 |
| 67 | 6,7 | 13,4 | 20,1 | 26,8 | 33,5 | 40,2 | 46,9 | 53,6 | 60,3 |
| 68 | 6,8 | 13,6 | 20,4 | 27,2 | 34,0 | 40,8 | 47,6 | 54,4 | 61,2 |
| 69 | 6,9 | 13,8 | 20,7 | 27,6 | 34,5 | 41,4 | 48,3 | 55,2 | 62,1 |
| 70 | 7,0 | 14,0 | 21,0 | 28,0 | 35,0 | 42,0 | 49,0 | 56,0 | 63,0 |
| 71 | 7,1 | 14,2 | 21,3 | 28,4 | 35,5 | 42,6 | 49,7 | 56,8 | 63,9 |
| 72 | 7,2 | 14,4 | 21,6 | 28,8 | 36,0 | 43,2 | 50,4 | 57,6 | 64,8 |
| 73 | 7,3 | 14,6 | 21,9 | 29,2 | 36,5 | 43,8 | 51,1 | 58,4 | 65,7 |
| 74 | 7,4 | 14,8 | 22,2 | 29,6 | 37,0 | 44,4 | 51,8 | 59,2 | 66,6 |
| 75 | 7,5 | 15,0 | 22,5 | 30,0 | 37,5 | 45,0 | 52,5 | 60,0 | 67,5 |
| 76 | 7,6 | 15,2 | 22,8 | 30,4 | 38,0 | 45,6 | 53,2 | 60,8 | 68,4 |
| 77 | 7,7 | 15,4 | 23,1 | 30,8 | 38,5 | 46,2 | 53,9 | 61,6 | 69,3 |
| 78 | 7,8 | 15,6 | 23,4 | 31,2 | 39,0 | 46,8 | 54,6 | 62,4 | 70,2 |
| 79 | 7,9 | 15,8 | 23,7 | 31,6 | 39,5 | 47,4 | 55,3 | 63,2 | 71,1 |
| 80 | 8,0 | 16,0 | 24,0 | 32,0 | 40,0 | 48,0 | 56,0 | 64,0 | 72,0 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 81 | 8,1 | 16,2 | 24,3 | 32,4 | 40,5 | 48,6 | 56,7 | 64,8 | 72,9 |
| 82 | 8,2 | 16,4 | 24,6 | 32,8 | 41,0 | 49,2 | 57,4 | 65,6 | 73,8 |
| 83 | 8,3 | 16,6 | 24,9 | 33,2 | 41,5 | 49,8 | 58,1 | 66,4 | 74,7 |
| 84 | 8,4 | 16,8 | 25,2 | 33,6 | 42,0 | 50,4 | 58,8 | 67,2 | 75,6 |
| 85 | 8,5 | 17,0 | 25,5 | 34,0 | 42,5 | 51,0 | 59,5 | 68,0 | 76,5 |
| 86 | 8,6 | 17,2 | 25,8 | 34,4 | 43,0 | 51,6 | 60,2 | 68,8 | 77,4 |
| 87 | 8,7 | 17,4 | 26,1 | 34,8 | 43,5 | 52,2 | 60,9 | 69,6 | 78,3 |
| 88 | 8,8 | 17,6 | 26,4 | 35,2 | 44,0 | 52,8 | 61,6 | 70,4 | 79,2 |
| 89 | 8,9 | 17,8 | 26,7 | 35,6 | 44,5 | 53,4 | 62,3 | 71,2 | 80,1 |
| 90 | 9,0 | 18,0 | 27,0 | 36,0 | 45,0 | 54,0 | 63,0 | 72,0 | 81,0 |
| 91 | 9,1 | 18,2 | 27,3 | 36,4 | 45,5 | 54,6 | 63,7 | 72,8 | 81,9 |
| 92 | 9,2 | 18,4 | 27,6 | 36,8 | 46,0 | 55,2 | 64,4 | 73,6 | 82,8 |
| 93 | 9,3 | 18,6 | 27,9 | 37,2 | 46,5 | 55,8 | 65,1 | 74,4 | 83,7 |
| 94 | 9,4 | 18,8 | 28,2 | 37,6 | 47,0 | 56,4 | 65,8 | 75,2 | 84,6 |
| 95 | 9,5 | 19,0 | 28,5 | 38,0 | 47,5 | 57,0 | 66,5 | 76,0 | 85,5 |
| 96 | 9,6 | 19,2 | 28,8 | 38,4 | 48,0 | 57,6 | 67,2 | 76,8 | 86,4 |
| 97 | 9,7 | 19,4 | 29,1 | 38,8 | 48,5 | 58,2 | 67,9 | 77,6 | 87,3 |
| 98 | 9,8 | 19,6 | 29,4 | 39,2 | 49,0 | 58,8 | 68,6 | 78,4 | 88,2 |
| 99 | 9,9 | 19,8 | 29,7 | 39,6 | 49,5 | 59,4 | 69,3 | 79,2 | 89,1 |
| 100 | 10,0 | 20,0 | 30,0 | 40,0 | 50,0 | 60,0 | 70,0 | 80,0 | 90,0 |
| 101 | 10,1 | 20,2 | 30,3 | 40,4 | 50,5 | 60,6 | 70,7 | 80,8 | 90,9 |
| 102 | 10,2 | 20,4 | 30,6 | 40,8 | 51,0 | 61,2 | 71,4 | 81,6 | 91,8 |
| 103 | 10,3 | 20,6 | 30,9 | 41,2 | 51,5 | 61,8 | 72,1 | 82,4 | 92,7 |
| 104 | 10,4 | 20,8 | 31,2 | 41,6 | 52,0 | 62,4 | 72,8 | 83,2 | 93,6 |
| 105 | 10,5 | 21,0 | 31,5 | 42,0 | 52,5 | 63,0 | 73,5 | 84,0 | 94,5 |
| 106 | 10,6 | 21,2 | 31,8 | 42,4 | 53,0 | 63,6 | 74,2 | 84,8 | 95,4 |
| 107 | 10,7 | 21,4 | 32,1 | 42,8 | 53,5 | 64,2 | 74,9 | 85,6 | 96,3 |
| 108 | 10,8 | 21,6 | 32,4 | 43,2 | 54,0 | 64,8 | 75,6 | 86,4 | 97,2 |
| 109 | 10,9 | 21,8 | 32,7 | 43,6 | 54,5 | 65,4 | 76,3 | 87,2 | 98,1 |
| 110 | 11,0 | 22,0 | 33,0 | 44,0 | 55,0 | 66,0 | 77,0 | 88,0 | 99,0 |
| 111 | 11,1 | 22,2 | 33,3 | 44,4 | 55,5 | 66,6 | 77,7 | 88,8 | 99,9 |
| 112 | 11,2 | 22,4 | 33,6 | 44,8 | 56,0 | 67,2 | 78,4 | 89,6 | 100,8 |
| 113 | 11,3 | 22,6 | 33,9 | 43,2 | 56,5 | 67,8 | 79,1 | 90,4 | 101,7 |
| 114 | 11,4 | 22,8 | 34,2 | 45,6 | 56,0 | 68,4 | 79,8 | 91,2 | 102,6 |
| 115 | 11,5 | 23,0 | 34,5 | 46,0 | 57,5 | 69,0 | 80,5 | 92,0 | 103,5 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 116 | 11,6 | 23,2 | 34,8 | 46,4 | 58,0 | 69,6 | 81,2 | 92,8 | 104,4 |
| 117 | 11,7 | 23,4 | 35,1 | 46,8 | 58,5 | 70,2 | 81,9 | 93,6 | 105,3 |
| 118 | 11,8 | 23,6 | 35,4 | 47,2 | 59,0 | 70,8 | 82,6 | 94,4 | 106,2 |
| 119 | 11,9 | 23,8 | 35,7 | 47,6 | 59,5 | 71,4 | 83,3 | 95,2 | 107,1 |
| 120 | 12,0 | 24,0 | 36,0 | 48,0 | 60,0 | 72,0 | 84,0 | 96,0 | 108,0 |
| 121 | 12,1 | 24,2 | 36,3 | 48,4 | 60,5 | 72,6 | 84,7 | 96,8 | 108,9 |
| 122 | 12,2 | 24,4 | 36,6 | 48,8 | 61,0 | 73,2 | 85,4 | 97,6 | 109,8 |
| 123 | 12,3 | 24,6 | 36,9 | 49,2 | 61,5 | 73,8 | 86,1 | 98,4 | 110,7 |
| 124 | 12,4 | 24,8 | 37,2 | 49,6 | 62,0 | 74,4 | 86,8 | 99,2 | 111,6 |
| 125 | 12,5 | 25,0 | 37,5 | 50,0 | 62,5 | 75,0 | 87,5 | 100,0 | 112,5 |
| 126 | 12,6 | 25,2 | 37,8 | 50,4 | 63,0 | 75,6 | 88,2 | 100,8 | 113,4 |
| 127 | 12,7 | 25,4 | 38,1 | 50,8 | 63,5 | 76,2 | 88,9 | 101,6 | 114,3 |
| 128 | 12,8 | 25,6 | 38,4 | 51,2 | 64,0 | 76,8 | 89,6 | 102,4 | 115,2 |
| 129 | 12,9 | 25,8 | 38,7 | 51,6 | 64,5 | 77,4 | 90,3 | 103,2 | 116,1 |
| 130 | 13,0 | 26,0 | 39,0 | 52,0 | 65,0 | 78,0 | 91,0 | 104,0 | 117,0 |
| 131 | 13,1 | 26,2 | 39,3 | 52,4 | 65,5 | 78,6 | 91,7 | 104,8 | 117,9 |
| 132 | 13,2 | 26,4 | 39,6 | 52,8 | 66,0 | 79,2 | 92,4 | 105,6 | 118,8 |
| 133 | 13,3 | 26,6 | 29,9 | 53,2 | 66,5 | 79,8 | 93,1 | 106,4 | 119,7 |
| 134 | 13,4 | 26,8 | 40,2 | 53,6 | 67,0 | 80,4 | 93,8 | 107,2 | 120,6 |
| 135 | 13,5 | 27,0 | 40,5 | 54,0 | 67,5 | 81,0 | 94,5 | 108,0 | 121,5 |
| 136 | 13,6 | 27,2 | 40,8 | 54,4 | 68,0 | 81,6 | 95,2 | 108,8 | 122,4 |
| 137 | 13,7 | 27,4 | 41,2 | 54,8 | 68,5 | 82,2 | 95,9 | 109,6 | 123,3 |
| 138 | 13,8 | 27,6 | 41,4 | 55,2 | 69,0 | 82,8 | 96,6 | 110,4 | 124,2 |
| 139 | 13,9 | 27,8 | 41,7 | 55,6 | 69,5 | 83,4 | 97,3 | 111,2 | 125,1 |
| 140 | 14,0 | 28,0 | 42,0 | 56,0 | 70,0 | 84,0 | 98,0 | 112,0 | 126,0 |
| 141 | 14,1 | 28,2 | 42,3 | 56,4 | 70,5 | 84,6 | 98,7 | 112,8 | 126,9 |
| 142 | 14,2 | 28,4 | 42,6 | 56,8 | 71,0 | 85,2 | 99,4 | 113,6 | 127,8 |
| 143 | 14,3 | 28,6 | 42,9 | 57,2 | 71,5 | 85,8 | 100,1 | 114,4 | 128,7 |
| 144 | 14,4 | 28,8 | 43,2 | 57,6 | 72,0 | 86,4 | 100,8 | 115,2 | 129,6 |
| 145 | 14,5 | 29,0 | 43,5 | 58,0 | 72,5 | 87,0 | 101,5 | 116,0 | 130,5 |
| 146 | 14,6 | 29,2 | 43,8 | 58,4 | 73,0 | 87,6 | 102,2 | 116,8 | 131,4 |
| 147 | 14,7 | 29,4 | 44,1 | 58,8 | 73,5 | 88,2 | 102,9 | 117,6 | 132,3 |
| 148 | 14,8 | 29,6 | 44,4 | 59,2 | 74,0 | 88,8 | 103,6 | 118,4 | 133,2 |
| 149 | 14,9 | 29,8 | 44,7 | 59,6 | 74,5 | 89,4 | 104,3 | 119,2 | 134,1 |
| 150 | 15,0 | 30,0 | 45,0 | 60,0 | 75,0 | 90,0 | 105,0 | 120,0 | 135,5 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 151 | 15,1 | 30,2 | 45,3 | 60,4 | 75,5 | 90,6 | 105,7 | 120,8 | 135,9 |
| 152 | 15,2 | 30,4 | 45,6 | 60,8 | 76,0 | 91,2 | 106,4 | 121,6 | 136,8 |
| 153 | 15,3 | 30,6 | 45,9 | 61,2 | 76,5 | 91,8 | 107,1 | 122,4 | 137,7 |
| 154 | 15,4 | 30,8 | 46,2 | 61,6 | 77,0 | 92,4 | 107,8 | 123,2 | 138,6 |
| 155 | 15,5 | 31,0 | 46,5 | 62,0 | 77,5 | 93,0 | 108,5 | 124,0 | 139,5 |
| 156 | 15,6 | 31,2 | 46,8 | 62,4 | 78,0 | 93,6 | 109,2 | 124,8 | 140,4 |
| 157 | 15,7 | 31,4 | 47,1 | 62,8 | 78,5 | 94,2 | 109,9 | 125,6 | 141,3 |
| 158 | 15,8 | 31,6 | 47,4 | 63,2 | 79,0 | 94,8 | 110,6 | 126,4 | 142,2 |
| 159 | 15,9 | 31,8 | 47,7 | 63,6 | 79,5 | 95,4 | 111,3 | 127,2 | 143,1 |
| 160 | 16,0 | 32,0 | 48,0 | 64,0 | 80,0 | 96,0 | 112,0 | 128,0 | 144,0 |
| 161 | 16,1 | 32,2 | 48,3 | 64,4 | 80,5 | 96,6 | 112,7 | 128,8 | 144,9 |
| 162 | 16,2 | 32,4 | 48,6 | 64,8 | 81,0 | 97,2 | 113,4 | 129,6 | 145,8 |
| 163 | 16,3 | 32,6 | 48,9 | 65,2 | 81,5 | 97,8 | 114,1 | 130,4 | 146,7 |
| 164 | 16,4 | 32,8 | 49,2 | 65,6 | 82,0 | 98,4 | 114,8 | 131,2 | 147,6 |
| 165 | 16,5 | 33,0 | 49,5 | 66,0 | 82,5 | 99,0 | 115,5 | 132,0 | 148,5 |
| 166 | 16,6 | 33,2 | 49,8 | 66,4 | 83,0 | 99,6 | 116,2 | 132,8 | 149,4 |
| 167 | 16,7 | 33,4 | 50,1 | 66,8 | 83,5 | 100,2 | 116,9 | 133,6 | 150,3 |
| 168 | 16,8 | 33,6 | 50,4 | 67,2 | 84,0 | 100,8 | 117,6 | 134,3 | 151,2 |
| 169 | 16,9 | 33,8 | 50,7 | 67,6 | 84,5 | 101,4 | 118,3 | 135,2 | 152,1 |
| 170 | 17,0 | 34,0 | 51,0 | 68,0 | 85,0 | 102,0 | 119,0 | 136,0 | 153,0 |
| 171 | 17,1 | 34,2 | 51,3 | 68,4 | 85,5 | 102,6 | 119,7 | 136,8 | 153,9 |
| 172 | 17,2 | 24,4 | 51,6 | 68,8 | 86,0 | 103,2 | 120,4 | 137,6 | 154,8 |
| 173 | 17,3 | 34,6 | 51,9 | 69,2 | 86,5 | 103,8 | 121,1 | 138,4 | 155,7 |
| 174 | 17,4 | 34,8 | 52,2 | 69,6 | 87,0 | 104,4 | 121,8 | 139,2 | 156,6 |
| 175 | 17,5 | 35,0 | 52,5 | 70,0 | 87,5 | 105,0 | 122,5 | 140,0 | 157,5 |
| 176 | 17,6 | 35,2 | 52,8 | 70,4 | 88,0 | 105,6 | 123,2 | 140,8 | 158,4 |
| 177 | 17,7 | 35,4 | 53,1 | 70,8 | 88,5 | 106,2 | 123,9 | 141,6 | 159,3 |
| 178 | 17,8 | 35,6 | 53,4 | 71,2 | 89,0 | 106,8 | 124,6 | 142,4 | 160,2 |
| 179 | 17,9 | 35,8 | 53,7 | 71,6 | 89,5 | 107,4 | 125,3 | 143,2 | 161,1 |
| 180 | 18,0 | 36,0 | 54,0 | 72,0 | 90,0 | 108,0 | 126,0 | 144,0 | 162,0 |
| 181 | 18,1 | 36,2 | 54,3 | 72,4 | 90,5 | 108,6 | 126,7 | 144,8 | 162,9 |
| 182 | 18,2 | 36,4 | 54,6 | 72,8 | 91,0 | 109,2 | 127,4 | 145,6 | 163,8 |
| 183 | 18,3 | 36,6 | 54,9 | 73,2 | 91,5 | 109,8 | 128,1 | 146,4 | 164,7 |
| 184 | 18,4 | 36,8 | 55,2 | 73,6 | 92,0 | 110,4 | 128,8 | 147,2 | 165,6 |
| 185 | 18,5 | 37,0 | 55,5 | 74,0 | 92,5 | 111,0 | 129,5 | 148,0 | 166,5 |

## Постоянные величины и их логарифмы

| | Число | Логарифм | | Число | Логарифм |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi^2$ | 9,8698 | 0,99430 | $1:\sqrt[3]{2\pi}$ | 0,5419 | 9,73392 |
| $\pi^3$ | 31,0063 | 1,49145 | $2:3\pi$ | 0,2122 | 9,32675 |
| $2\pi$ | 6,2832 | 0,79818 | $3:4\pi$ | 0,2387 | 9,37785 |
| $3\pi$ | 9,4248 | 0,97427 | $4:\pi^2$ | 0,4053 | 9,60778 |
| $4\pi$ | 12,5664 | 1,09921 | $64:\pi$ | 20,3718 | 1,30903 |
| $5\pi$ | 15,7080 | 1,19612 | $360:\pi$ | 114,5916 | 2,05915 |
| $6\pi$ | 18,8496 | 1,27530 | $\pi^2:16$ | 0,6169 | 9,79021 |
| $7\pi$ | 21,9911 | $1,3422\overline{5}$ | $\sqrt{\pi}$ | $1,772\overline{5}$ | 0,24859 |
| $8\pi$ | 25,1327 | 1,40024 | $\sqrt{2\pi}$ | 2,5066 | 0,39909 |
| $2\pi^2$ | 19,7392 | 1,29533 | $2\sqrt{\pi}$ | 3,5449 | 0,54960 |
| $3\pi^2$ | 29,6088 | 1,47142 | $\pi\sqrt{2}$ | 4,4429 | 0,64767 |
| $4\pi^2$ | 39,4784 | 1,59636 | $\pi\sqrt{3}$ | 5,4414 | 0,73571 |
| $\pi:64$ | 0,0491 | 8,69108 | $\pi\sqrt{\pi}$ | 5,5683 | 0,74572 |
| $\pi:90$ | 0,0349 | 8,54283 | $\pi\sqrt[3]{\pi}$ | 4,6012 | 0,66287 |
| $\pi:180$ | $0,017\overline{5}$ | 8,24304 | $\pi\sqrt[3]{\pi^2}$ | 6,7388 | 9,82858 |
| $\pi:360$ | 0,0087 | 7,93952 | $\sqrt{\pi}:2$ | 0,8862 | 9,94753 |
| $(\pi:2)^2$ | 2,4674 | 0,39224 | $2:\sqrt{\pi}$ | 1,1284 | 0,05246 |
| $3\pi:2$ | 4,7124 | 0,67324 | $\sqrt{\pi}:2$ | 1,2533 | 0,09806 |
| $4\pi:3$ | 4,1888 | 0,62209 | $\sqrt{\pi}:3$ | 1,0233 | 0,01000 |
| $1:\pi^2$ | 0,1013 | 9,00561 | $\sqrt{\pi}:8$ | 0,6267 | 9,79706 |
| $1:\pi^3$ | 0,0323 | 8,50920 | $\sqrt{2}:\pi$ | 0,7979 | $9,9019\overline{5}$ |
| $1:\pi^4$ | 0,0103 | 8,01284 | $\sqrt{3}:\pi$ | 0,9772 | 9,98998 |
| $1:\pi^5$ | 0,0033 | 7,51851 | $\sqrt{8}:\pi$ | 1,5958 | 0,20298 |
| $1:2\pi$ | 0,1592 | 9,20194 | $\sqrt{90}:\pi$ | 5,3524 | $0,7285\overline{5}$ |
| $1:3\pi$ | 0,1061 | 9,02572 | $\sqrt[3]{\pi}$ | 1,4646 | 0,16572 |
| $1:4\pi$ | 0,0796 | 8,90091 | $\sqrt[3]{2\pi}$ | 1,8453 | 0,26607 |
| $1:2\pi^2$ | 0,0507 | 8,70501 | $\sqrt[3]{\pi^2}$ | 2,1450 | 0,33143 |
| $1:3\pi^2$ | 0,0338 | 8,52892 | $\sqrt[3]{2}:\pi$ | 0,8603 | 9,93465 |
| $1:4\pi^2$ | 0,0253 | 7,40312 | $\sqrt[3]{3}:\pi$ | 0,9847 | 9,99330 |
| $1:\sqrt{\pi}$ | 0,5642 | 9,75143 | $\sqrt[3]{4}:\pi$ | 1,0839 | 0,03499 |
| $1:\sqrt{2\pi}$ | 0,3989 | 9,60086 | $\sqrt[3]{6}:\pi$ | 1,2407 | 0,09367 |
| $1:2\sqrt{\pi}$ | 0,2821 | 9,45040 | $\sqrt[3]{16}:\pi$ | 1,7205 | 0,23565 |
| $1:\pi\sqrt{\pi}$ | 0,1796 | 9,25431 | $\sqrt[3]{32}:\pi$ | 2,1677 | 0,33600 |
| $1:\sqrt[3]{\pi}$ | 0,6828 | 9,83429 | $\sqrt[3]{\pi}:2$ | 1,1624 | 0,06536 |
| $\sqrt[3]{\pi}:4$ | 0,9226 | 9,96501 | $1:\varrho'$ | $2909\cdot10^{-7}$ | 6,46374 |
| $\sqrt[3]{\pi}:6$ | 0,8060 | 9,90634 | $1:\varrho''$ | $4848\cdot10^{-9}$ | 4,68556 |
| $\sqrt[3]{\pi}:16$ | 0,5812 | 9,76433 | $\varrho^g$ | $63^g,6620$ | 1,80388 |
| $\sqrt[3]{\pi}:32$ | 0,4613 | 9,66398 | $\varrho^c$ | $6366^c,20$ | 3,80388 |

| | Число | Логарифм | | Число | Логарифм |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[3]{3} : 4\pi$ | 0,6204 | 9,79267 | $\varrho^{cc}$ | $636620^{cc}$ | 5,80388 |
| $\sqrt[3]{4\pi} : 3$ | 1,6120 | 0,20737 | $1 : \varrho^{g}$ | $1571 \cdot 10^{-5}$ | 8,19618 |
| $\sqrt[4]{2} : \pi$ | 0,8932 | $9,9509\bar{5}$ | $1 : \varrho^{c}$ | $1571 \cdot 10^{-7}$ | 6,19618 |
| $\sqrt[4]{4} : \pi$ | 1,0623 | $0,0262\bar{5}$ | $1 : \varrho^{cc}$ | $1571 \cdot 10^{-9}$ | 4,19618 |
| $\sqrt[4]{32} : \pi$ | $1,786\bar{5}$ | 0,25200 | $1 : \sqrt[3]{2}$ | 0,7937 | 9,89966 |
| $\sqrt[4]{64} : \pi$ | 2,1245 | 0,32726 | $1 : \sqrt[3]{3}$ | 0,6934 | 9,84098 |
| $\sqrt[4]{\pi} : 2$ | 1,1195 | 0,04902 | $1 : \sqrt[3]{4}$ | 0,6300 | 9,79934 |
| $\sqrt[4]{\pi} : 4$ | 0,9414 | 9,97377 | $1 : \sqrt[3]{5}$ | 0,5848 | 9,76701 |
| $\sqrt[4]{\pi} : 32$ | 0,5598 | 9,74803 | $1 : \sqrt[3]{6}$ | 0,5503 | 9,74060 |
| $\sqrt[4]{\pi} : 64$ | 0,4707 | 9,67274 | $1 : \sqrt[3]{7}$ | 0,5228 | 9,71834 |
| $e^2$ | 7,3891 | 0,86859 | $1 : \sqrt[3]{9}$ | 0,4807 | 9,68187 |
| $e^3$ | 20,0855 | 1,30288 | $1 : \sqrt[3]{10}$ | 0,4642 | 9,66671 |
| $e^{\pi}$ | 23,1407 | 1,36438 | $1 : \sqrt[3]{10\,000}$ | 21,5443 | 1,33333 |
| $e^{\pi:2}$ | $4,810\bar{5}$ | 0,68219 | $\sqrt{1/2}$ | 0,7071 | 9,84948 |
| $e^{-\pi:2}$ | 0,2079 | 9,31785 | $g$ | 9,807 | 0,99154 |
| $e^{\pi:4}$ | 2,1933 | 0,34110 | $g^2$ | 96,177 | 1,98307 |
| $e^{-\pi:4}$ | 0,4559 | 9,65887 | $\sqrt{g}$ | 3,1316 | 0,49577 |
| $1 : e^2$ | 0,1353 | 9,13130 | $\sqrt{2g}$ | 4,4283 | 0,64624 |
| $1 : e^3$ | 0,0498 | 8,69723 | $1 : g$ | 0,1019 | 0,00817 |
| $1 : e^4$ | 0,0183 | 8,26245 | $1 : g^2$ | 0,0104 | 8,01703 |
| $1 : e^5$ | 0,0067 | 7,82607 | $\sqrt{1} : g$ | 0,3193 | 9,50420 |
| $\sqrt{e}$ | 1,6487 | 0,21714 | $\sqrt{\pi} : 3$ | 0,5908 | 9,77144 |
| $\sqrt[3]{e}$ | 1,3956 | 0,14476 | $\sqrt{\pi} : 4$ | 0,4431 | 9,64650 |
| $1 : \sqrt{e}$ | 0,6065 | 9,78283 | $\sqrt{\pi} : 5$ | 0,3545 | 9,54962 |
| $1 : \sqrt[3]{e}$ | 0,7165 | 9,85522 | $\sqrt{\pi} : 6$ | 0,2954 | 9,47041 |
| $1 : e^{\pi}$ | 0,0432 | 8,63548 | $\sqrt{\pi} : 7$ | 0,2532 | 9,40346 |
| $\varrho^{\circ}$ | $57^{\circ},2958$ | 1,75812 | $\sqrt{\pi} : 8$ | 0,2216 | 9,34557 |
| $\varrho'$ | $3437',7\bar{5}$ | 3,53627 | $\sqrt{\pi} : 9$ | 0,1969 | $0,2942\bar{5}$ |
| $\varrho''$ | $206265''$ | 5,31443 | $\pi = 3,14159\ 26536$ | | |
| $1/\varrho^{\circ}$ | $0,017\bar{5}$ | 8,24304 | $1 : \pi = 0,31830\ 98862$ | | |
| | | | $\lg \pi = 0,49714\ 98727$ | | |
| | | | $\ln \pi = 1,14472\ 98858$ | | |

## Метрическая система мер

### *Меры длины*

| | мк | мм | см | дм | м | км | Наименование |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мк | 1 | 0,001 | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-9}$ | микрон |
| мм | 1000 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | $10^{-6}$ | миллиметр |
| см | $10^4$ | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | $10^{-5}$ | сантиметр |
| дм | $10^5$ | 100 | 10 | 1 | 0,1 | $10^{-4}$ | дециметр |
| м | $10^6$ | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,001 | метр |
| км | $10^9$ | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | 1000 | 1 | километр |

### *Меры площади*

| | мм² | см² | дм² | м² | а | га | км² | Наименование |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мм² | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-4}$ | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | $10^{-10}$ | $10^{-12}$ | квадратный миллиметр |
| см² | $10^2$ | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-4}$ | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | $10^{-10}$ | квадратный сантиметр |
| дм² | $10^4$ | $10^2$ | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-4}$ | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | квадратный дециметр |
| м² | $10^6$ | $10^4$ | $10^2$ | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-4}$ | $10^{-6}$ | квадратный метр |
| а | $10^8$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^2$ | 1 | $10^{-2}$ | $10^{-4}$ | ар |
| га | $10^{10}$ | $10^8$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^2$ | 1 | $10^{-2}$ | гектар |
| км² | $10^{12}$ | $10^{10}$ | $10^8$ | $10^6$ | $10^4$ | $10^2$ | 1 | квадратный километр |

*Меры объема и емкости*

| | мл$^3$ (см) | сл | дл | л | дкл | гл | м$^3$ | Наименование |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мл (см)$^3$ | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | миллиметр (кубический сантиметр) |
| сл | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | сантилитр |
| дл | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | $10^{-4}$ | децилитр |
| л | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | литр |
| дкл | $10^4$ | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | декалитр |
| гл | $10^5$ | $10^4$ | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,1 | гектолитр |
| м$^3$ | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | 1000 | 100 | 10 | 1 | кубический метр (кубометр) |

*Меры массы*

| | мг | сг | дг | г | кг | ц | т | Наименование |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| мг | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | $10^{-6}$ | $10^{-8}$ | $10^{-9}$ | миллиграмм |
| сг | 10 | 1 | 0,1 | 0,01 | $10^{-5}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ | сантиграмм |
| дг | 100 | 10 | 1 | 0,1 | $10^{-4}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | дециграмм |
| г | 1000 | 100 | 10 | 1 | 0,001 | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | грамм |
| кг | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | 1000 | 1 | 0,01 | 0,001 | килограмм |
| ц | $10^8$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^5$ | 100 | 1 | 0,1 | центнер |
| т | $10^9$ | $10^8$ | $10^7$ | $10^6$ | 1000 | 10 | 1 | тонна |

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ


Абсолютная величина числа 17, 29, 35
— погрешность 299, 300
Абсолютное тождество 53
Абсолютно сходящийся ряд 291
Абсцисса 215
Адрес 203
Аксиома 108
— индукции 106
Алгебра булева 104
— переключательных схем 104
— символической логики 104
Алгебраическая линия 219
— функция 244
Алгебраическое уравнение 54, 67
Алгоритм 193, 313
— линейный 198
— управляющий 201
Аналитический способ задания функции 241
Аналогии Непера 168, 170
Аппаратные средства 202, 203
Аргумент функции 241
— комплексного числа 35
Арифметико-логическое устройство 203
Арифметическая прогрессия 94
Арифметические выражения 210
— функции стандартные 210
Арифметический корень 37
Арифметическое среднее 90
Арккосинус 156, 157
Арккотангенс 157
Арксинус 156, 157
Арктангенс 157
Архимедовы многогранники 144
Асимптоты гиперболы 229
Ассоциативность 29, 33, 103
Астроида 235

Бесконечная десятичная дробь 23
Бесконечно большая 250
— малая 250
— убывающая геометрическая прогрессия 95
Биквадратное уравнение 61
Бином Ньютона 101, 102
Биссектриса внешнего угла треугольника 115
— треугольника 114, 115, 118, 119, 164
— угла 113
Большой круг 165
Бочка 148
Булева алгебра 104
Буферная память 204
БЭЙСИК-система 206

Вектор 237
Вектор-столбец 73
Вектор-строка 73
Величина угла 113
Верзьера Аньези 233
Верные знаки 300
Вершина 137
— параболы 231
Вершины эллипса 226
Взаимно однозначное соответствие 241
Взвешенное среднее 91
Включение 103
Вневписанная окружность 115
Внутренняя точка 242
Вогнутость 262
Возведение в степень числа натурального 5
— — — — комплексного 36
— — — — приближенного 303
Возвратное уравнение 62
Возрастание 93, 247, 260
Восьмиугольник правильный 125
Вписанная окружность 115
Вписанный угол 126
— четырехугольник 122
Вращения фигуры 147, 148
Временной ряд 177
Вход, выход алгоритма 194
Вынесение за скобки 45

Выпуклость 262
Выпуклый многогранник 137
Выражения, не имеющие смысла 6
Высота треугольника 114, 116, 118, 119, 164
Вычислительная система (ВС) 201
Вычитание дробей 18
— — алгебраических 47
— — десятичных 22
— чисел действительных 29
— — комплексных 33
— — натуральных 5
— — приближенных 302

Гармоническая пропорция 21
Гармоническое среднее 90
Гексаэдр 140
Геодезическая линия 165
Геометрическая прогрессия 94, 95
Геометрические преобразования 132—136
Геометрический смысл определенного интеграла 282
— — производной 256
Геометрическое среднее 90
Гипербола 228
Гиперболоид 148
Гипоциклоида 235
Гистограмма 185
Гомотетия 133, 134
Градовая мера углов 314
Градус 112
Градусная мера углов 112
Грань 137
График функции 219, 316, 317
Графический способ задания функции 242
Графическое интегрирование 343
— представление данных 185

Данные 194
— табличные 171—177
Двойственность 104
Двугранный угол 137
Двуугольник сферический 116
Двучлен 41
Двучленное уравнение 63
Действительная ось 34
— — гиперболы 228
— часть комплексного числа 32
Декартов лист 235

Деление дробей 19
— — алгебраических 48
— — десятичных 22
— многочленов 42
— отрезка 216
— чисел действительных 29
— — комплексных 33
— — — в тригонометрической форме 35
— — приближенных 303
Делимость чисел 13
Делитель 5
— общий наибольший (НОД) 14
Десятиугольник правильный 125
Диагональ многоугольника 117
— четырехугольника 117
Диаграмма секторная 185
Диаметр 123
Дизъюнкция 105
Директивы БЭЙСИК-системы 207
Директриса 233
— гиперболы 229
— параболы 231
— эллипса 227
Дисперсия 188
Дисплей 204
Дистрибутивность 29, 33, 103
Дифференциал второго порядка 267
— дуги 267
— порядка $n$ 267
— функции 265
Дифференциальные уравнения 286
Дифференцирование 256
— графическое 342
Длина вектора 237
— дуги плоской кривой 285
— пути 285
Додекаэдр 141
— большой 142
— — звездчатый 143
— малый звездчатый 142
Дополнение множества 103
Достаточное условие 109
Дробная функция 244
Дробь 17
— алгебраическая 47
— двоичная 25
— десятичная 22
— — бесконечная 22, 28
— неправильная 18
— периодическая 23, 28

— правильная 18
— сократимая, несократимая 18

Евклида способ отыскания НОД 15
Единица 14, 27, 29

Зависимая переменная 241
Замена переменной при интегрировании 270, 283
Замечательные пределы 252, 253
Замкнутая ломаная 111
Звездчатые многогранники 141
Звенья ломаной 111
Знак числа 17, 30
Знаменатель 17
— наименьший общий (НОД) 18
Значащие цифры 300

Идентификатор 209
Извлечение корня 5
— — из комплексного числа 36
— — — приближенного числа 303
Измерение углов 112
Измерения косвенные 306
— непосредственные 306
— неравноточные 310
— равноточные 306, 308
Икосаэдр 141
— большой 143
Имя переменной 209
Инвариантность формы дифференциала 266
Инверсия 135
Индукция математическая 106
Интеграл дифференциального уравнения 287
— неопределенный 268
— определенный 281
Интегральная сумма 281
Интегрирование 268, 283
— алгебраических дробей 273
— по частям 271, 284
Интервал 242
— сходимости степенного ряда 293
Интерполирование 320
— линейное 320
Интерпретация 205
Информатика 193
Иррациональные функции 244
— неравенства 87
— уравнения 54, 64

«Искра-110» 332, 333
«Искра-12М» 333
Исполнитель 193
Исследование функций 260

Кардиоида 235
Касательная 256
— к окружности 123
Квадрант 215
Квадрат 121, 124
Квадратичное среднее 91
Квадратные неравенства 87
— уравнения 60
Класс 7
Классы по модулю $n$ 16
Клин 139
Коллинеарность 238
Кольцо 126
Команды 203
Комбинаторика 99—101
Коммутативность 21, 33, 103
Компиляция 205
Компланарность 238
Компьютер 203
Конечные суммы 291
Конические сечения 233
Константа 195
Конус 146
Конхоида Никомеда 234
Концентрические окружности 126
Концы интервала 242
Конъюнкция 105
Координаты 215
— вектора 239
— полярные 218
— текущие 219
Корень арифметический, действительный 37
Корреляция 188
Косеканс 150
Косинус 149, 150
Косоугольные треугольники 165
— — сферические 168—170
Котангенс 149, 150
Коэффициент 41
— корреляции 189
— подобия 133
— угловой 220
Коэффициенты регрессии 192
Кратное общее наименьшее (НОК) 15
Кривизна 263, 264
Кривые второго порядка 225
Круг 123

Куб 140
Кубическая парабола 233

Левая система координат 215
Лемниската Бернулли 234
Линейные неравенства 85
— уравнения 60
Логарифмирование 97
— приближенных чисел 304
Логарифмическая линейка 323
— производная 259
— функция 244
Логарифмические неравенства 89
— уравнения 68
Логарифмическое дифференцирование 259
Логарифмы 95
— десятичные 98
— натуральные 253
Логическая структура ВС 202
Логические операции 105
— устройства 202
Локальная память 204
Ломаная 111
Луч 111

Максимум 260
Малые электронно-клавишные вычислительные машины 331
Мантисса 99
Масштабное расстояние (единица) 27
Матрица 73
Машинные операции 203
Мгновенная скорость 256
Медиана 114, 116, 118, 119, 164
Медианное значение (медиана) 187
Метод Гаусса исключения неизвестных 69
— интервалов 85
— координат 215
— неопределенных коэффициентов 45
— Ньютона (касательных) 345
— проб 344
— хорд 345
Микрокалькуляторы 334
Минимум 261
Минор 74
Минута 112
Мнимая ось 34
— — гиперболы 228
— часть 32
Многогранная поверхность 137
Многогранник 137
Многогранный угол 137
Многоугольник 112, 117
— выпуклый 112
Многочлен 41, 244
Множество 102—104
— упорядоченное 16
Мода 186
Модуль вектора 237, 238
— комплексного числа 35
— перехода 97, 253
Момент инерции 287
Монотонность 93, 247

Наибольшее значение функции 262
Накрестлежащие углы 113
Начало координат 215
Независимая переменная 241
Необходимое условие 109
Неопределенный интеграл 268
Непрерывная пропорция (гармоническая) 21
Непрерывность функции 254
Неравенство 83
— Гельдера 92
— иррациональное 87
— квадратное 87
— Коши 91
— — обобщенное 91
— линейное 85
— логарифмическое 89
— Минковского 92
— треугольника 92, 144
Неявная функция 243
Номограмма 315, 316
Нормаль 256
Нуль 6, 16, 27, 29
Нуль-вектор 237
Нуль-множество 103

Обелиск 139
Область значений 241
— — допустимых 52
— определения 241
— существования 52
— сходимости ряда 292
Обработка данных 171—192
Обратная дробь 19
— теорема 109
— функция 247
Обратные тригонометрические функции 156—159, 244

Общий член ряда 291
Объединение множеств 103
Объем тела вращения 285
Ограниченность 94, 248
Односторонние углы 113
Одночлен 41
Округление механическое 301
— по дополнению 301
— простое 301
— с поправкой 301
Окружность 123
Октаэдр 140
Оперативная память ВС 23
Оператор безусловного перехода 197, 212
— ввода 197
— вывода 197
— присваивания 195
— управления 197
— условный 196, 213
— цикла 214
Операторы языка БЭЙСИК 207
— ввода/вывода 212
Операция присваивания 195
— преобразования данных 196
Описанная окружность 116
Описанный угол 126
— четырехугольник 122
Определения 109
Определенный интеграл 281
Определитель 73, 74, 76
Ордината 215
Ортоцентр 117
Осевая симметрия 133
Оси гиперболы 228
— координат 215
— эллипса 226
Основание логарифма 95
Остаток сходящегося ряда 290
Остроугольный треугольник 114
Острый угол 113
Ось параболы 231
— полярная 218
— симметрии 133
Относительная погрешность 300
Отрезок 111, 242
Отрицание высказывания 105
Ошибки измерений 306
— — грубые 307
— — систематические 307
— — случайные 307

Память 203, 204
Парабола 231, 235
— кубическая 233
— полукубическая 233
Параболоид вращения 147
Параллелепипед 138
Параллелограмм 120
Параллельность прямых 223
— — и плоскостей 136
Параллельные прямые 113
— — в пространстве 136
Параллельный перенос 132, 217
Параметры 243
Первообразная 268
Переменная 195, 240
Переместительность 29
Пересечение множеств 103
Перестановки 99
— с повторениями 99
Периметр эллипса 227
Период функции 248
Периодичность 153, 248
Перпендикулярность прямых 223
Пирамида 138
Плоскость 111
Плотность линейная 256
Площадь криволинейной трапеции 282
— многоугольника 117, 123
— треугольника 117, 164
— эллипса 227
Поверхность многогранная 137
— тела вращения 285
Поворот осей 217
Погрешность абсолютная, относительная 299, 300
Подкова цилиндрическая 145
Подобие 133, 134
Подобные члены 41
Позиционная система счисления 7
Показательные уравнения 67
Полином 244
Полный угол 112, 113
Полуправильные многогранники 144
Полупрямая 111
Полый цилиндр 145
Полюс 218
Полярные координаты 218
Показательная функция 244
Порядок действий 6
Порядок бесконечно большой величины 251
— — малой величины 250, 251
— числа 300
Последовательность 92
— возрастающая 93
— монотонная 93

— невозрастающая 93
— неубывающая 93
— ограниченная (сверху, снизу) 94
— убывающая 93
Построение графика функции 263
— по точкам гиперболы 230
— — — параболы 232
— — — эллипса 227
Построения на плоскости 128—132
Правая система координат 215
Правила вычисления дифференциалов 265
— дифференцирования 257
— интегрирования 269, 283
Правильный многогранник 139
— многоугольник 123—125
— треугольник 124
Предел функции 151
Пределы интегрирования 281
Преобразование графиков 248—250
— координат 217
Приближенное значение 299
— — с избытком 299
— — с недостатком 299
— решение уравнений 344
Приближенные вычисления на основе дифференциалов 267
— значения функций 304
Призма 138
Признак вогнутости 262
— выпуклости 262
— сравнения рядов 291
— существования точки перегиба 262
— — экстремума 261
— сходимости Даламбера (достаточный) 291
— — Лейбница (достаточный) 291
— — необходимый 290
Признаки делимости 13
— подобия треугольников 134
Принтер 204
Принцип математической индукции 106
Приращение независимой переменной 253, 254
— функции 254
Программа 204
Программные средства 202, 204
Прогрессии 94, 95
Проекция вектора на ось 238
— ортогональная 136
— точки на ось 238
Произведение многочленов 42
Произведения тригонометрических функций 155
Производная 255
— вторая 257
— неявной функции 260
— обратной функции 260
— порядка $n$ 260
— сложной функции 258
Промежуток 242
Пропорции 20
— производные 21
Пропорциональные отрезки в круге 127
Простые множители 14
Противоположная теорема 110
Проценты 24
— сложные 25
Процессор 203
Прямая 111
Прямой угол 113
Прямоугольная система координат 215
Прямоугольник 121
Прямоугольный треугольник 114, 118, 119, 164
— — сферический 167
Пуансо многогранники 142
Пустое множество 103
Пятиугольник правильный 124

Равенство множеств 103
— буквенное, числовое, истинное, ложное 51
Равнобедренный треугольник 118
Равнобочная трапеция 120
Равнозначность высказываний 105
Равносильность уравнений 54
Равносторонний треугольник 119
Равносторонняя гипербола 230
Радиан 112
Радианная мера 112
Радиус инверсии 135
— кривизны 264
— круга 123
— — вписанного 163
— — вневписанного 163
— —, описанного около треугольника 163
— окружности 123
— полярный 218
Развернутый угол 112, 113

Развертка окружности 236
Разветвление алгоритма 198
Разложение на множители многочлена 44
— — простейшие дроби 48, 273
— — простые множители 14
— по формуле Ньютона 102
— функции в ряд Маклорена 293
— — в ряд Фурье 295
Размещения 100
— с повторениями 100
Разность векторов 238
Разрыв в точке 255
Разряд 7
Распределительность 29
Расстояние 216
Растяжение графика 249
Расширение дроби 18
Рациональная функция 244
Рациональное уравнение 54
Ребро 137
Регрессия 191
Решение дифференциального уравнения 287
— неравенств 85—90
— уравнений графическое 341
Роза трехлепестковая, четырехлепестковая 237
Ромб 121
Ряд законопеременный 291
— Маклорена 293
— расходящийся 290
— степенной 293
— сходящийся 289
— тригонометрический 295
— Фурье 295
— числовой 289
Ряды и их суммы 292
— функциональные 292

Самопересекающиеся правильные многогранники 141
Сдвиг 249
Сегмент круга 126
— шаровой 147
Секанс 150
Сектор 126
— шаровой 147
Секунда 112
Секущая 123
Сжатие графика 249
Символьные данные 209
Симметрический многочлен 46
Симметричное уравнение 63
Симметрия 249
— осевая, центральная 133, 134
Синус 149
Система координат декартова 215
— неравенств 84
— счисления восьмеричная 12
— — двоичная 8
— — десятичная 7
— — троичная
— уравнений 53, 57
— — алгебраических 69
— — второй степени 78—82
— — линейных 69—78
— — симметричных 82
Скаляр 237
Скалярное произведение 239
Скобки 6
Скользящий вектор 238
Скорость изменения функции 256
— мгновенная 256
— средняя 254
— угловая 256
Следствие уравнения 55
Следствия 109
Сложение дробей 19
— — алгебраических 47
— — десятичных 22
— логическое 105
— многочленов 42
— множеств 103
Сложение чисел действительных 29
— — комплексных 32
— — натуральных 5
— — приближенных 302
Смежные углы 113
Совокупность неравенств 84
— уравнений 53
Сокращение дроби 18
Соответственные углы 113
Соответствие 240
Сопряженные гиперболы 229
Сочетания 100
— с повторениями 100
Сочетательность 29
Способ группировки 45
— двух окружностей 227
— проективных пучков 227
Способы интегрирования 270, 283
Спираль архимедова 235
— гиперболическая 236
— логарифмическая 236
Средние величины 90, 91

Средняя 187
— линия 120
Стандартизация данных 189
Стандартное отклонение 188
Статические моменты 287
Стационарные точки функции 261
Степенной ряд 293
Степень действительного числа 37
— многочлена 42
— точности таблицы 319
Стрелка дуги 126
Строфоида 236
Структура алгоритма 197
Сумма векторов 238
— обратных тригонометрических функций 159
— ряда 290
— тригонометрических функций 155
Сферический двуугольник 166
— избыток 167
— треугольник 166—170
Схема 313
— Горнера 43
Сходимость ряда абсолютная 291
Счеты 322

Таблица неопределенных интегралов 275—281
Таблицы общие, специальные 315, 316
Табличный способ задания функции 242
Тангенс 149, 150
Тело цикла 199
Темп прироста, роста 179
Теорема 109
— Безу 44
— Виета 61, 64
— Гюльдена (первая, вторая) 285
— косинусов 163
— — для сферы 167
— Коши 91
— основная алгебры 64
— — арифметики 14
— Пифагора 118
— синусов 163
— — для сферы 167
— тангенсов 163
— — для сферы 170
Теоремы для половинного угла треугольника 163
— о пределах 252
— сложения 153
Терминал 204
Тетраэдр 139
Тождество 52
— абсолютное 53
Точка 111
— перегиба 262
— разрыва функции 255
Точность приближенного числа 301
Трансляция, транслятор 205
Трансцендентные уравнения 67
— функции 244
— числа 29
Трапеция 120
Треугольник 114—119, 163—170
— Паскаля 101
Трехчлен 41
Трехчленное уравнение 63
Тригонометрическая форма комплексного числа 34
Тригонометрические уравнения 160—162
— функции 244
Тригонометрия 149—179
Тупой угол 113
Тупоугольный треугольник 114

Убывание 93, 247, 260
Угловой коэффициент 220
Углы и окружность 126, 127
—, классификация 113
— при параллельных прямых 113
Угол 111
— между прямой и плоскостью 136
— — прямыми 222
— полярный 218
Умножение вектора на число 239
— дробей 19
— — алгебраических 48
— — десятичных 22
— логическое 105
— множеств 103
— чисел действительных 29
— — комплексных 32
— — — в тригонометрической форме 35
— — натуральных 5
— — приближенных 302
Уравнение 53
— биквадратное 61

— возвратное 62
— гиперболы 228
— двучленное 63
— дробное 64
— иррациональное 64
— касательной к гиперболе 229
— — — кривой 256
— — — параболе 231
— — — эллипсу 227
— квадратное 60
— линейное 60
— линии 219
— логарифмическое 68
— нормали к кривой 256
— окружности 225
— параболы 231
— показательное 67
— прямой 219
— — в отрезках 221
— с абсолютными величинами 30
— симметричное 63
— степени $n$ 64
— трансцендентное 67
— трехчленное 63
— эллипса 226
Уравнения дифференциальные 286
— — линейные 289
— — однородные 289
— — с разделяющимися переменными 288
— тригонометрические 160—162
Усеченная пирамида 139
— призма 138
Усеченный клин 139
— конус 146
— параболоид вращения 148
— цилиндр 145
Ускорение 257
Условие равенства многочленов 45
— разложения в ряд Фурье (достаточное) 295
Условно сходящийся ряд 291
Условный оператор 196, 212
Устройство управления 203

Фокальное расстояние гиперболы 228
— — эллипса 226
Фокальные радиусы гиперболы 228
— — эллипса 226
Фокальный радиус параболы 231
Фокус 233
— параболы 231
Фокусы гиперболы 228
— эллипса 226
Формат 207
Формула 318
— Герона 117
— Муавра 36, 107
— Ньютона 101
— прямоугольников 342
— Симпсона (парабол) 343
— сложного радикала 41
— трапеций 342
— вычисления дифференциалов 266
Формулы Гасса—Деламбра 170
— дифференцирования 258
— интегрирования 269
— Мальвейде 163
— приведения 153
— сокращенного умножения и деления многочленов 42
Функции взаимно обратные 247
— кратных углов 154
— половинного угла 154
— суммы и разности углов 153
— тригонометрические 149
— элементарные 243
Функциональная зависимость 242
Функциональный ряд 292
Функция 241
— возрастающая 247, 260
— монотонная 247
— неограниченная 249
— непрерывная 254
— нечетная 248
— —, ряд Фурье 298
— обратная 247
— ограниченная 248
— периодическая 248
— убывающая 247, 260
— четная 247
— —, ряд Фурье 298

Характеристика десятичного логарифма 99
Хорда 123

Целая функция 244
Целое алгебраическое выражение 41
— — уравнение 54
Центрально-подобное преобразование 134

Центральный угол 126
Центр кривизны 264
— тяжести 287
— гиперболы 228
— инверсии 135
— круга, окружности 123
— — треугольника 116
— эллипса 226
Цепная линия 235
Циклическая перестановка 164
Циклоида обыкновенная 284
— удлиненная 234
— укороченная 234
Цилиндр 144
Циссоида Диокла 234

Часовая мера углов 314
Частичные суммы ряда 289
Частное решение дифференциального уравнения 288
Четность 247
Четырехугольник 117, 120, 121
Числа алгебраические 28
— вещественные, действительные 28
— иррациональные 28
— комплексно-сопряженные 33
— комплексные 32
— натуральные 5, 16, 27
— нечетные 14
— обратные 29
— отрицательные 27
— противоположные 29, 33
— простые 14
— рациональные 17, 26, 28
— смешанные 18
— составные 14
— трансцендентные 29
— целые 16, 27
— — отрицательные 17, 27
— четные 14
Числитель 17
Числовая ось 27
Числовые данные 209
— последовательности 92
Число e 252
Член многочлена 41
— последовательности 92

Шар 146
Шестиугольник правильный 125

ЭВМ 203
Эксцентриситет гиперболы 228
— параболы 231
— эллипса 226
«Электроника» 335
«Электроника БЗ-04» 336
«Электроника БЗ-18М» 336
«Электроника БЗ-34» 340
«Электроника МК-56» 340
Элемент множества 102
Эллипс 226
Эллипсоид 148
Эпициклоида 236

Явная функция 243
Языки программирования 204

*Справочное издание*

**Альберт Анатольевич Рывкин**
**Анатолий Залманович Рывкин**
**Леонид Сергеевич Хренов**

# СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

---

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Научный редактор В. П. Моденов. Редактор Л. С. Куликова. Мл. редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Оформление художника В. И. Казакова. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор В. В. Кожуткина

ИБ № 5883

Изд. № ФМ-848. Сдано в набор 17.04.86. Подп. в печать 02.12.86. Формат 84 × 108/32. Бумага кн.-журн. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Объем 25,2 усл. печ. л. 25,2 усл. кр.-отт. 26,57 уч.-изд. л. Тираж 110 000 экз. Заказ № 1287. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.